Esercizi svolti di fisica

Andrea de Capoa

17 marzo 2024

Ricerca per parole chiave

Gli esercizi di questo libro sono tutti catalogati per parole chiave sul sito "Maledetta fisica". Andate all'indirizzo Ricerca esercizi ed inserite il codice privato **anonimo**. Potrete così ricercare gli esercizi per argomento.

In alcuni esercizi è contenuto un link ad un video su YouTube con una videolezione che spiega l'esercizio. Il canale YouTube con tutti gli esercizi è raggiungibile con il link @maledettafisica

Introduzione all'opera

Scheda 2

2.1 Lo scopo del progetto

L'apprendimento della fisica passa spesso attraverso la risoluzione di esercizi. I concetti fondanti della materia sono spesso molto più profondi di quanto non appaia a prima vista, e spesso si imparano sempre meglio e più in profondità quando ci si trova di fronte a problemi che non si riesce a risolvere. Con questo libro voglio fornire agli studenti delle scuole superiori uno strumento per mettere alla prova le proprie conoscenze e sviluppare le relative abilità. Per questo motivo tutti gli esercizi sono risolti, e quei pochi ancora non risolti verranno risolti quanto prima. Buon lavoro.

2.2 Lo stato dell'arte

L'opera è in continua evoluzione. Se mi scriverete all'email *decapoa@gmail.com* potrete indicarmi quali argomenti ritenete sia più utile sviluppare, correggere, sostituire, ampliare, ecc. ecc. Vi sarò grato dell'aiuto che vorrete fornire.

Calorimetria: soluzioni Scheda 3

Problema di: Calorimetria - $Q0001$

Testo *[Q0001]* [2 ⭐ 2 ⏳ 2a 📖]
Quanta energia serve per innalzare la temperatura di un oggetto di ferro di $\Delta T = 50\,K$ sapendo che ha una massa $m = 10\,kg$ e che si trova ad una temperatura $T_i = 300\,K$? Se la temperatura iniziale fosse stata $T_i = 1800\,K$ sarebbe servita più energia? *[rispondi indicando anche il perché]*

Spiegazione Inizialmente abbiamo un oggetto di ferro di una certa massa e che si trova ad una certa temperatura. Gradualmente gli forniamo del calore e vogliamo che aumenti la sua temperatura. Innanzi tutto dobiamo chiederci quali siano i fenomeni fisici che accadono in questa situazione. Visto che l'oggetto dovrà passare da una temperatura iniziale $T_i = 300\,K$ ad una finale $T_f = 350\,K$ noi siamo sicuri che l'oggetto si trova allo stato solido e che non subisce alcuna transizione di fase. La temperatura di fusione del ferro è infatti $T_{fus} = 1808\,K$, molto più alta delle temperature assunte dall'oggetto. L'unico fenomeno che avviene è quindi il riscaldamento dell'oggetto.

Svolgimento

$$\Delta Q = c_s \cdot m \cdot \Delta T = 440\,\frac{J}{kgK} \cdot 10\,kg \cdot 50\,K = 220\,kJ$$

Se la temperatura iniziale fosse stata $T_i = 1800\,K$ allora sarebbe avvenuta anche una transizione di fase e ci sarebbe voluta molta più energia.

Problema di: Calorimetria - $Q0003$

Testo *[Q0003]* [2 ⭐ 3 ⏳ 2a 📖]
Quanta energia serve per innalzare, in un contenitore ermetico rigido, la temperatura di $m = 10\,kg$ di acqua da $T_i = 80\,°C$ fino a $T_f = 130\,°C$?

Spiegazione Per aumentare la temperatura di un materiale è necessario fornirgli del calore. Daremo quindi del calore per portare inizialmente l'acqua fino alla temperatura $T_{eb} = 100\,°C$ alla quale l'acqua comincia a bollire. Continuiamo a fornire calore e l'acqua rimarrà alla stessa temperatura fino a quando si sarà trasformata tutta in vapore acqueo. Fornendo ulteriore calore possiamo finalmente innalzare la temperatura dell'acqua fino alla temperatura finale $T_f = 130\,°C$.

Svolgimento La quantità di energia necessaria per aumentare la temperatura dell'acqua da $T_i = 80\,°C$ fino alla temperatura di ebollizione $T_{eb} = 100\,°C$ vale

$$\Delta Q_1 = c_s \cdot m \cdot \Delta T = 4186\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 10\,kg \cdot 20\,K \simeq 837\,kJ$$

La quantità di energia necessaria per far bollire completamente l'acqua vale

$$\Delta Q_2 = Q_{lat-eb} \cdot m = 2272\,\frac{kJ}{kg} \cdot 10\,kg = 22720\,kJ$$

La quantità di energia necessaria per aumentare la temperatura dell'acqua da $T_{eb} = 100\,°C$ fino a $T_f = 130\,°C$, tenendo conto che si tratta di un gas chiuso in un contenitore rigido, per cui dobbiamo utilizzare il calore specifico a volume costante espresso in
$dfracJkg$, vale

$$\Delta Q_3 = c_{sv} \cdot m \cdot \Delta T = 1616\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 10\,kg \cdot 30\,K = 484,8\,kJ$$

La quantità totale di energia che bisogna quindi fornire all'acqua è

$$\Delta Q_{tot} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 24042\,kJ$$

Problema di: Calorimetria - $Q0004$

Testo [Q0004] [1 ⭐ 2 ⏳ 2a 📖]
Due sbarre di eguale lunghezza $l_i = 3\,m$, una di ferro e l'altra di alluminio, vengono scaldate di $\Delta T = 50\,K$. Ammettendo che nessuna delle due raggiunga il punto di fusione, di quanto una risulterà più lunga dell'altra?

Spiegazione Il fenomeno fisico descritto da questo esercizio è quello della dilatazione termica lineare. Entrambe le sbarre si allungano in quanto aumenta la loro temperatura, ma essendo di materiali differenti, una si allungherà più dell'altra.

Svolgimento La prima sbarra si allunga di

$$\Delta l_{Fe} = \lambda_{Fe} l_i \Delta T$$

$$\Delta l_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K} \cdot 3\,m \cdot 50\,K = 18 \cdot 10^{-4}\,m = 1,8\,mm$$

La seconda sbarra si allunga di

$$\Delta l_{Al} = \lambda_{Al} l_i \Delta T$$

$$\Delta l_{Al} = 25 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K} \cdot 3\,m \cdot 50\,K = 37,5 \cdot 10^{-4}\,m = 3,75\,mm$$

La differenza di lunghezza tra le due sbarre sarà quindi

$$d = \Delta l_{Al} - \Delta l_{Fe} = 1,95\,mm$$

Problema di: Calorimetria - $Q0005$

Testo [Q0005] [2 ⭐ 2 ⏳ 2a 📖]
Una sbarra di ferro di massa $m = 15\,kg$, lunga $l_i = 3\,m$ ed alla temperatura $T_i = 1600\,K$ viene immersa in una massa $m_{H_2O} = 100\,kg$ d'acqua alla temperatura $T_{H_2O} = 300\,K$. Di quanto si accorcia?

Spiegazione Il fenomeno fisico di cui tratta l'esercizio è la dilatazione termica lineare. In questo caso la variazione di temperatura della sbarra avviene in quanto essa è stata immersa nell'acqua e raggiunge con essa l'equilibrio termico.

Svolgimento La temperatura di equilibrio raggiunta tra acqua e ferro vale

$$T_{eq} = \frac{cs_{Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} + cs_{H_2O} m_{H_2O} T_{i-H_2O}}{cs_{Fe} m_{Fe} + cs_{H_2O} m_{H_2O}}$$

$$T_{eq} = \frac{136140000\,J}{425200\,\frac{J}{K}} = 320,18\,K$$

L'acqua si scalda quindi di $\Delta T_{H_2O} = 20,18\,K$ e non inizia a bollire.
Il ferro si raffredda di $\Delta T_{Fe} = -1279,82\,K$
La sbarra si accorcia quindi di

$$\Delta l_{Fe} = \lambda_{Fe} l_i \Delta T$$

$$\Delta l_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K} \cdot 3\,m \cdot (-1279,82\,K) = -10,1 \cdot 10^{-3}\,m = -46\,mm$$

Problema di: Calorimetria - $Q0006$

Testo *[Q0006]* [3 ★ 4 ⌛ 2a 📖]
Ad un oggetto di ferro di massa $m = 2kg$, alla temperatura iniziale $T_i = 600\,K$ vengono forniti $\Delta Q_{tot} = 2000\,kJ$ di calore. Quanti kilogrammi di ferro riesco a fare fondere?

Spiegazione Il ferro alla temperatura iniziale indicata nel problema è solido. Fornendogli calore l'oggetto comincerà a scaldarsi, se arriva alla temperatura di fusione allora l'oggetto comincierà a fondere.

Svolgimento Il ferro fonde alla temperatura $T_{fus} = 1808\,K$. L'energia necessaria per scaldare l'oggetto dalla temperatura iniziale fino alla temperatura di fusione vale:

$$\Delta Q_1 = c_s m \Delta T = c_s m \left(T_{fus} - T_i\right)$$
$$\Delta Q_1 = 440\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 2\,kg \cdot 1208\,K = 1063040\,J = 1063,04\,kJ$$

L'energia fornita complessivamente è molto maggiore, quindi avanza del calore che verrà utilizzato per far fondere il ferro. Nel complesso avanzano

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_{tot} - \Delta Q_1 = 936,96\,kJ$$

Utilizzando la legge della transizione di fase, con questa quantità di calore è possibile calcolare quanta massa di ferro è possibile far fondere.

$$m_f = \frac{\Delta Q_2}{Q_{lat-fus}} = \frac{936,96\,kJ}{247,2\,\frac{kJ}{kg}} = 3,79\,kg$$

Tutto il ferro a disposizione viene quindi fuso, in quanto con l'energia a disposizione saremmo in grado di fondere molto più dei $2\,kg$ di ferro a disposizione.

Problema di: Calorimetria - $Q0007$

Testo *[Q0007]* [1 ★ 1 ⌛ 2a 📖]
Un blocco di ferro solido di massa $m = 50\,kg$ si trova alla temperatura di fusione. Quanto calore devo fornire se voglio fondere una percentuale $p = 10\%$ del blocco di ferro?

Spiegazione Visto che il blocco di ferro si trova già alla temperatura di fusione, tutto il calore che forniamo serve per fondere del ferro.

Svolgimento La quantità di ferro che vogliamo fondere è

$$m_f = m \cdot p = 50\,kg \cdot 0,1 = 5\,kg$$

La quantità di calore necessaria per fonderlo vale

$$\Delta Q = Q_{lat-fus} \cdot m_f = 247,2\,\frac{kJ}{kg} \cdot 5\,kg = 1236\,kJ$$

Problema di: Calorimetria - $Q0008$

Testo *[Q0008]* [2 2 2a]
Di quanto devo scaldare una sbarra di alluminio di lunghezza iniziale $l_{Al-i} = 2000\,mm$ ed una sbarra di ferro di lunghezza iniziale $l_{Fe-i} = 2001\,mm$ affinchè raggiungano la stessa lunghezza?

Spiegazione Ammettendo che le due sbarre, scaldandosi, non fondano, entrambe si dilatano aumentando la loro lunghezza. L'alluminio si dilata più di quanto faccia il ferro; quindi è possibile che le due sbarre abbiano alla fine la stessa lunghezza. Il punto chiave del problema è che l'aumento di temperatura delle due sbarre è lo stesso (probabilmente sono state messe nello stesso forno).

Svolgimento Per prima cosa chiamiamo x la differenza di lunghezza delle due sbarre; quindi $x = l_{Fe} - l_{Al}$

Visto che le lunghezze finali delle due sbarre devono essere uguali, allora

$$l_{Al-f} = l_{Fe-f}$$

$$\Delta l_{Al} = \Delta l_{Fe} + x$$

$$\lambda_{Al} l_{Al-i} \Delta T = \lambda_{Fe} l_{Fe-i} \Delta T + x$$

$$(\lambda_{Al} l_{Al-i} - \lambda_{Fe} l_{Fe-i})\,\Delta T = x$$

$$\Delta T = \frac{x}{\lambda_{Al} l_{Al-i} - \lambda_{Fe} l_{Fe-i}} = 38,5\,K$$

Esercizi concettualmente identici

1. Una sbarra di rame e una d'oro lunghe entrambe $l_i = 50\,cm$ si trovano in uno stretto contenitore lungo $l_c = 100.01\,cm$. Di quanto posso scaldare al massimo le due sbarre? [$\Delta t = 6,45\,K$]

Problema di: Calorimetria - $Q0009$

Testo *[Q0009]* [2 3 2a]
Quanta energia mi serve per portare una massa $m = 5\,kg$ di piombo, tenuta in un opportuno contenitore ermetico e rigido, dalla temperatura $T_i = 400\,°C$ alla temperatura $T_f = 2000\,°C$?

Spiegazione Per scaldare una massa di piombo è necessario fornire del calore. Considerando le temperature in gioco, la massa di piombo all'inizio è liquida, alla fine è gassosa; per questo motivo, oltre a fornire l'energia per scaldare, bisogna anche fornire l'energia per fare bollire il ferro.

Svolgimento La temperatura di fusione del piombo è $T_{fus} = 600,61\,K = 327,41\,°C$; quella di ebollizione è $T_{eb} = 2022\,K = 1749\,°C$.

Il calore necessario per portare il piombo alla temperatura di ebollizione è

$$\Delta Q_1 = c_s m \Delta T = c_s m\,(T_{eb} - T_i)$$

$$\Delta Q_1 = 129\,\frac{J}{kgK} \cdot 5\,kg \cdot (1749 - 400)\,K = 870105\,J \simeq 870\,kJ$$

Il calore necessario per far bollire quel ferro è

$$\Delta Q_{eb} = Q_{lat} m = 23161\,\frac{kJ}{kg} \cdot 5\,kg = 115806\,kJ$$

Il calore necessario per arrivare adesso alla temperatura finale, considerando che parliamo di un gas a volume costante, è

$$\Delta Q_2 = c_{sv} m \Delta T = c_s m\,(T_f - T_{eb})$$

$$\Delta Q_2 = 60,2\,\frac{J}{kgK} \cdot 5\,kg \cdot 251\,K = 75551\,J \simeq 76\,kJ$$

Il calore totale che bisogna fornire è quindi

$$\Delta Q_{tot} = \Delta Q_1 + \Delta Q_{eb} + \Delta Q_2 = 116752\,kJ$$

Esercizi concettualmente identici

1. Quanta energia mi serve per innalzare la temperatura di un oggetto di piombo fino alla temperatura $T_f = 4000\,K$ sapendo che ha una massa $m = 2\,kg$ e che si trova ad una temperatura $T_i = 30\,K$? [$\Delta Q = 2787060\,J$]

Problema di: Calorimetria - $Q0010$

Testo *[Q0010]* [2 3 2a]
Quanta energia mi serve per portare una massa $m = 5\,kg$ di acqua, in un contenitore rigido ed ermetico, dalla temperatura $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alla temperatura $T_f = 130\,°\mathrm{C}$?

Spiegazione L'acqua inizialmente è in forma liquida. Per portarla alla temperatura iniziale bisogna scaldarla e farla bollire. Dobbiamo quindi calcolare tutto il calore per farla scaldare e tutto il calore per farla bollire.

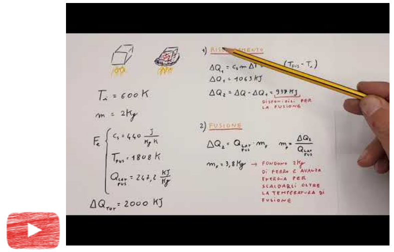


Fig. 3.1: *Guarda il video youtu.be/fpoV59BC6ZM*

Svolgimento Il calore per farla scaldare fino alla temperatura di ebollizione vale

$$\Delta Q_1 = c_s m \Delta t = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 5\,kg \cdot (100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C}) = 1674400\,J = 1674,4\,kJ$$

Il calore per farla bollire vale

$$\Delta Q_{eb} = Q_{lat-eb} m = 2272\,\frac{kJ}{kg} \cdot 5\,kg = 11360\,kJ$$

La quantità di energia necessaria per aumentare la temperatura dell'acqua da $T_{eb} = 100\,°\mathrm{C}$ fino a $T_f = 130\,°\mathrm{C}$, tenendo conto che si tratta di un gas chiuso in un contenitore rigido, per cui dobbiamo utilizzare il calore specifico del gas a volume costante espresso in $\frac{J}{kg}$, vale

$$\Delta Q_3 = c_{sv} \cdot m \cdot \Delta T = 1616\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 5\,kg \cdot 30\,K = 242,4\,kJ$$

Il calore totale che serve vale quindi

$$\Delta Q_{tot} = \Delta Q_1 + \Delta Q_{eb} + \Delta Q_3 = 13276,8\,kJ$$

Problema di: Calorimetria - $Q0011$

Testo *[Q0011]* [2 2 2a]
Quanta energia serve per far allungare di $\Delta l = 0,1\,mm$ una sbarra di alluminio di lunghezza $l_i = 200\,cm$ e massa $m = 0,5\,kg$?

Spiegazione In questo problema i fenomeni fisici coinvolti sono due: riscaldamento e dilatazione termica. Assumiamo ovviamente che la sbarra non fonda mentre viene riscaldata.

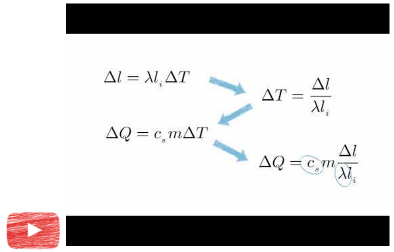


Fig. 3.2: *Guarda il video youtu.be/SpOByAQANd4*

Svolgimento Sapendo che la sbarra viene scaldata possiamo scrivere

$$\Delta Q = c_s m \Delta T$$

inoltre la sbarra si dilata, quindi

$$\Delta l = \lambda l_i \Delta T$$

Entrambi i fenomeni capitano contemporaneamente, quindi le due formule valgono contemporaneamente. Ricavando ΔT dalla seconda equazione con una formula inversa, e inserendolo nella prima otteniamo:

$$\Delta Q = c_s m \frac{\Delta l}{\lambda l_i}$$

$$\Delta Q = 900\,\frac{J}{kgK} \cdot 0,5\,kg \cdot \frac{0,1\,mm}{25 \cdot 10^{-6}\frac{1}{K} \cdot 2000\,mm} = 900\,J$$

Problema di: Calorimetria - $Q0013$

Testo *[Q0013]* [1 ⭐ 1 ⌛ 2a 📖]
Un oggetto di materiale sconosciuto e di massa $m_1 = 5\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{i1} = 350\,K$ viene messo a contatto con un oggetto dello stesso materiale e di massa $m_2 = 30\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{i2} = 300\,K$. Quale temperatura di equilibrio raggiungeranno i due oggetti?

Spiegazione Per calcolare la temperatura di equilibrio tra due oggetti messi a contatto abbiamo una sola formula da utilizzare

Svolgimento Utilizziamo la giusta formula:

$$T_{eq} = \frac{c_s m_1 T_{i1} + c_s m_2 T_{i2}}{c_s m_1 + c_s m_2}$$

Essendo i due oggetti fatti dello stesso materiale, i calori specifici sono stati indicati con lo stesso simbolo c_s che poi possiamo raccogliere a fattore comune.

$$T_{eq} = \frac{c_s\left(m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2}\right)}{c_s\left(m_1 + m_2\right)}$$

Adesso possiamo semplificare i calori specifici.

$$T_{eq} = \frac{m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2}}{m_1 + m_2} = \frac{1750\,kg\,K + 9000\,kg\,K}{35\,kg} = 307,14\,K$$

Problema di: Calorimetria - $Q0013a$

Testo *[Q0013a]* [1 ⭐ 1 ⌛ 2a 📖]
Un oggetto di ferro a temperatura $T_{i1} = 350\,K$ viene messo a contatto con un oggetto di rame della stessa massa, a temperatura $T_{i2} = 300\,K$. Quale temperatura di equilibrio raggiungeranno i due oggetti?

Spiegazione Per calcolare la temperatura di equilibrio tra due oggetti messi a contatto abbiamo una sola formula da utilizzare. Teniamo comunque presente che le masse dei due oggetti sono uguali.

Svolgimento Utilizziamo la giusta formula:

$$T_{eq} = \frac{c_{s1} m T_{i1} + c_{s2} m T_{i2}}{c_{s1} m + c_{s2} m}$$

Avendo i due oggetti la stessa massa, tale grandezza è stata indicata con la stessa lettera per i due oggetti in modo da raccogliere a fattor comune.

$$T_{eq} = \frac{m\left(c_{s1} T_{i1} + cs2 T_{i2}\right)}{m\left(c_{s1} + c_{s2}\right)}$$

Adesso possiamo semplificare i calori specifici.

$$T_{eq} = \frac{c_{s1} T_{i1} + c_{s2} T_{i2}}{c_{s1} + c_{s2}} = \frac{440\,\frac{J}{kg\cdot K}\cdot 350\,K + 380\,\frac{J}{kg\cdot K}\cdot 300\,K}{820\,\frac{J}{kg\cdot K}} = 326,8\,K$$

Problema di: Calorimetria - $Q0013b$

Testo *[Q0013b]* [1⭐ 1½⌛ 2a📖]
Tre oggetti dello stesso materiale, rispettivamente di massa $m_1 = 20\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{1i} = 300\,K$, di massa $m_2 = 10\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{2i} = 350\,K$, e di massa $m_3 = 1\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{3i} = 325\,K$, sono messi a contatto. Quale temperatura di equilibrio raggiungeranno?

Spiegazione Per calcolare la temperatura di equilibrio tra tre oggetti messi a contatto abbiamo una sola formula da utilizzare

Svolgimento Utilizziamo la giusta formula, con lo stesso calore specifico essendo dli oggetti dello stesso materiale, otteniamo:

$$T_{eq} = \frac{c_s m_1 T_{i1} + c_s m_2 T_{i2} + c_s m_3 T_{i3}}{c_s m_1 + c_s m_2} + c_s m_3$$

Essendo i due oggetti fatti dello stesso materiale, i calori specifici sono stati indicati con lo stesso simbolo c_s che poi possiamo raccogliere a fattore comune.

$$T_{eq} = \frac{c_s \left(m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2} + m_3 T_{i3}\right)}{c_s \left(m_1 + m_2 + m_3\right)}$$

Adesso possiamo semplificare i calori specifici.

$$T_{eq} = \frac{m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2} + m_3 T_{i3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Problema di: Calorimetria - $Q0014$

Testo *[Q0014]* [2⭐ 2⌛ 2a📖]
Posso scaldare una sbarra di ferro della lunghezza $l_i = 50\,cm$ e che si trova alla temperatura $T_i = 350\,K$ per farla allungare fino alla lunghezza $l_f = 51\,cm$?

Spiegazione In questo problema noi dobbiamo fornire del calore per fare aumentare la temperatura della sbarra e di conseguenza farla dilatare. Per ottenere la dilatazione richiesta dal problema, serve aumentare la temperatura di un certo valore; bisogna però controllare che a causa del tentato aumento di temperatura la sbarra non cominci a fondere invece che allungarsi.

Svolgimento L'aumento di temperatura necessario per allungare la sbarra è:

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{\lambda l_i} = \frac{1\,cm}{12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K} \cdot 50\,cm} = 1667\,K$$

Tale aumento non è però possibile, in quanto la sbarra arriverebbe alla temperatura finale

$$T_f = T_i + \Delta T = 2017\,K$$

che è superiore alla temperatura di fusione del ferro. Per questo motivo la sbarra, arrivata alla temperatura $T_{fus} = 1808\,K$, comincerebbe a fondere.

Problema di: Calorimetria - $Q0015$

Testo *[Q0015]* [1 ⭐ 17 ⌛ 2a 📖]
Esercizi banali di:

1. Riscaldamento
   (a) Che massa ha un oggetto di rame se dandogli un calore $\Delta Q = 1000\,J$ la sua temperatura aumenta di $\Delta T = 20\,K$? *[$m = 131,6\,g$]*
   (b) Quanta energia mi serve per innalzare la temperatura di un oggetto di ferro di $\Delta T = 50\,K$ sapendo che ha una massa $m = 10\,kg$ e che si trova ad una temperatura $T_i = 300\,K$? *[$\Delta Q = 220\,kJ$]*
   (c) Quanta energia mi serve per innalzare la temperatura di un oggetto di ferro fino alla temperatura $T_f = 350\,K$ sapendo che ha una massa $m = 10\,kg$ e che si trova ad una temperatura $T_i = 300\,K$? *[$\Delta Q = 220\,kJ$]*
2. Capacità termica
   (a) Un oggetto di ferro di massa $m_1 = 2\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{1i} = 300\,K$ viene messo a contatto con un oggetto di rame di massa $m_2 = 3\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{2i} = 320\,K$. Qual'è la capacità termica dei due oggetti? *[$C_{Fe} = 880\,\frac{J}{K}$;$C_{Cu} = 1140\,\frac{J}{K}$.]*
3. Temperatura di equilibrio
   (a) Quale temperatura raggiungono un oggetto di argento di $m_{Ag} = 0,1\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{i,Ag} = 350\,K$ ed un oggetto d'oro di $m_{Au} = 0,2\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{i,Au} = 400\,K$ messi a contatto? *[$T_{eq} = 376,2\,K$]*
   (b) Un oggetto di ferro di massa $m_1 = 2\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{1i} = 300\,K$ viene messo a contatto con un oggetto di rame di massa $m_2 = 3\,kg$ alla temperatura iniziale $T_{2i} = 320\,K$. Quale temperatura di equilibrio raggiungeranno i due oggetti? *[$T_{eq} = 311,3\,K$.]*
4. Transizioni di fase
   (a) Quanta energia serve per far fondere una massa $m = 20\,kg$ di ghiaccio alla temperatura di fusione? *[$\Delta Q = 6700\,kJ$]*
   (b) Quanta energia serve per far fondere una massa $m = 10\,kg$ di rame alla temperatura di fusione? *[$\Delta Q = 2058\,kJ$]*
   (c) Quanta energia serve per far bollire una massa $m = 5\,kg$ di acqua alla temperatura di ebollizione? *[$\Delta Q = 11360\,kJ$]*
   (d) Quanta energia devo dare ad una massa $m = 50\,kg$ di oro che si trovano alla temperatura $T = 3129\,K$ per farle compiere la transizione di fase? *[$\Delta Q = 84850\,kJ$]*
5. Dilatazione termica
   (a) Di quanto si allunga una sbarra d'oro della lunghezza iniziale $l_i = 10\,cm$ se aumentiamo la sua temperatura di $\Delta T = 20\,K$? *[$\Delta l = 2,8{\cdot}10^{-5}\,m$]*
   (b) Di quanto si accorcia una sbarra d'oro della lunghezza iniziale $l_i = 10\,cm$ se diminuiamo la sua temperatura di $\Delta T = 10\,K$? *[$\Delta l = -1,4 \cdot 10^{-5}\,m$]*
   (c) Di quanto si allunga una sbarra di rame di lunghezza iniziale $l_i = 30\,cm$ se aumentiamo la sua temperatura di $\Delta T = 30\,K$? *[$\Delta l = 1,53 \cdot 10^{-4}\,m$]*
   (d) Di quanto devo scaldare una sbarra di rame di lunghezza iniziale $l_i = 20\,m$ per allungarla di $\Delta l = 1,7\,mm$? *[$\Delta T = 0,5\,K$]*
   (e) Di quanto può aumentare la temperatura di una sbarra di ferro di lunghezza iniziale $l_i = 10\,m$ se non voglio che la sua lunghezza aumenti di più di 1 millimetro? *[$\Delta T = 8,33\,K$]*
6. Trasmissione del calore
   (a) Una finestra rettangolare di vetro spesso $l = 3\,mm$ è larga $b = 0,5\,m$ e alta $h = 1,2\,m$. Se dentro casa c'è una temperatura $T_{in} = 26°C$ e fuori una temperatura $T_{out} = 12°C$, quanta energia passa attraverso quella finestra ogni ora? La conducibilità termica del vetro è $\rho = 1\frac{W}{K\cdot m}$. *[$\Delta Q = 30240\,kJ$]*

Spiegazione In questo esercizio ho raccolto tutte quelle domande *banali* che possono essere fatte su questo argomento. Per *banale* si intende un problema nel quale la domanda consiste semplicemente nel fornire dei dati da inserire in una formula. Non è quindi richiesta alcuna particolare capacità di ragionamento, ne particolari doti matematiche. Questo esercizio serve unicamente ad aquisire dimestichezza con l'esecuzione dei conti numerici con le unità di misura.

Svolgimento

1. Riscaldamento

   (a) Utilizzando la formula inversa
   $$m = \frac{\Delta Q}{c_{s-Cu}\,\Delta T} = \frac{1000\,J}{380\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 20\,K} = 131,6\,g$$

   (b) Considerato che tra le temperatire iniziali e finali non avviene per il ferro alcuna transizione di fase
   $$\Delta Q = c_s m \Delta T = 440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 10\,kg\cdot 50\,K = 2200\,J$$

   (c) Considerato che tra le temperatire iniziali e finali non avviene per il ferro alcuna transizione di fase
   $$\Delta Q = c_s m \Delta T = 440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 10\,kg\cdot 50\,K = 2200\,J$$

2. Capacità termica

   (a) $C_{Fe} = c_{s-Fe} m_{Fe} = 440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 6\,kg = 2640\,\frac{J}{K}$

   (b)
   $$C_{Fe} = c_{s-Fe} m_{Fe} = 440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 2\,kg = 880\,\frac{J}{K}$$
   $$C_{Cu} = c_{s-Cu} m_{Cu} = 380\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 3\,kg = 1140\,\frac{J}{K}$$

3. Temperatura di equilibrio

   (a)
   $$T_{eq} = \frac{c_{s1} m_1 T_{i1} + c_{s2} m_2 T_{i2}}{c_{s1} m_1 + c_{s2} m_2}$$
   $$T_{eq} = \frac{232\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 0,1\,kg\cdot 350\,K + 128\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 0,2\,kg\cdot 400\,K}{232\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 0,1\,kg + 128\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 0,2\,kg}$$
   $$T_{eq} = 376,2\,K$$

   (b)
   $$T_{eq} = \frac{c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} + c_{s-Cu} m_{Cu} T_{i-Cu}}{c_{s-Fe} m_{Fe} + c_{s-Cu} m_{Cu}}$$
   $$T_{eq} = \frac{440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 2\,kg\cdot 300\,K + 380\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 3\,kg\cdot 320\,K}{440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 2\,kg + 380\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 3\,kg}$$
   $$T_{eq} = 311,3\,K$$

4. Transizioni di fase

   (a) $\Delta Q = Q_{lat-fus}\cdot m = 335\,\frac{kJ}{kg}\cdot 20\,kg = 6700\,kJ$

   (b) $\Delta Q = Q_{lat-fus}\cdot m = 205,8\,\frac{kJ}{kg}\cdot 10\,kg = 2058\,kJ$

   (c) $\Delta Q = Q_{lat-eb}\cdot m = 2271\,\frac{kJ}{kg}\cdot 5\,kg = 11360\,kJ$

   (d) La temperatura indicata è la temperatura di fusione dell'oro, per cui
   $$\Delta Q = Q_{lat_{fus}}\cdot m = 1697\,\frac{kJ}{kg}\cdot 50\,kg = 84850\,kJ$$

5. Dilatazione termica

   (a) $\Delta l = \lambda_{Au} l_i \Delta T = 14\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}\cdot 0,1\,m\cdot 20\,K = 2,8\cdot 10^{-5}\,m$

   (b) $\Delta l = \lambda_{Au} l_i \Delta T = 14\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}\cdot 0,1\,m\cdot(-10\,K) = -1,4\cdot 10^{-5}\,m$

   (c) $\Delta l = \lambda_{Cu} l_i \Delta T = 17\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}\cdot 0,3\,m\cdot 30\,K = 1,53\cdot 10^{-4}\,m$

   (d) Utilizzando la formula inversa
   $$\Delta T = \frac{\Delta l}{\lambda_{Cu}\cdot l_i} = \frac{0,0017\,m}{17\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}\cdot 20\,m} = 5\,K$$

(e) Utilizzando la formula inversa

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{\lambda_{Cu} \cdot l_i} = \frac{0,001\,m}{17 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K} \cdot 10\,m} = 8,33\,K$$

6. Trasmissione del calore

(a)

$$\Delta Q = \rho \cdot \frac{S}{l} \cdot \Delta T \cdot \Delta t = \rho \cdot \frac{bh}{l} \cdot \Delta T \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q = 1\,\frac{W}{K \cdot m} \cdot \frac{0,6\,m^2}{0,003\,m} \cdot 14°C \cdot 3600\,s = 30240\,kJ$$

Problema di: Calorimetria - $Q0016$

Testo *[Q0016]* [1 1 2a]
Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ sta scaldando una massa $m = 5\,kg$ di acqua liquida facendone aumentare la temperatura di $\Delta T = 45\,K$. Quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Il fornello fornisce calore all'acqua, la quale, dice il testo, non subisce alcuna transizione di fase. Stabilito quanto calore è necessario, tanto più il fornello è potente, tanto meno tempo ci impiega.

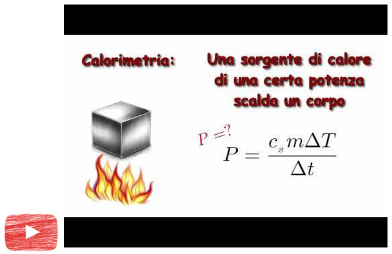


Fig. 3.3: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento Il calore necessario vale

$$\Delta Q = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 5\,kg \cdot 45\,K = 941850\,J$$

Il tempo impiegato dal fornello vale

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{P} = \frac{941850\,J}{1000\,W} = 941,85\,s$$

Esercizi concettualmente identici

1. Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ sta scaldando una massa di acqua facendone aumentare la temperatura di $\Delta t = 45\,K$ in un tempo $\Delta t = 30\,s$. Quanta massa di acqua sta scaldando?

2. Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ sta scaldando una massa $m = 5\,kg$ di acqua da un tempo $\Delta t = 60\,s$. Di quanto aumenta la temperatura dell'acqua?

3. Di quanto aumenta la temperatura di $m = 10\,kg$ di piombo che si trovano inizialmente alla temperatura $T_i = 350\,K$, se vengono messi in un forno di potenza $P = 1000\,W$ per un tempo $\Delta t = 2\,min$?

Problema di: Calorimetria - $Q0016a$

Testo *[Q0016a]* [1 1 2a]
Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ sta scaldando una massa $m = 2\,kg$ di ferro facendone aumentare la temperatura di $\Delta T = 10\,K$. Quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Il fornello fornisce calore all'acqua, la quale, dice il testo, non subisce alcuna transizione di fase. Stabilito quanto calore è necessario, tanto più il fornello è potente, tanto meno tempo ci impiega.

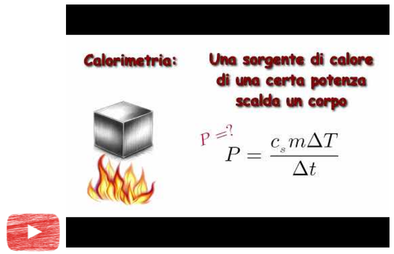


Fig. 3.4: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento Il calore necessario vale

$$\Delta Q = c_s m \Delta T = 440\,\frac{J}{kgK} \cdot 2\,kg \cdot 10\,K = 8800\,J$$

Il tempo impiegato dal fornello vale

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{P} = \frac{8800\,J}{1000\,W} = 8,8\,s$$

Problema di: Calorimetria - $Q0016b$

Testo *[Q0016b]* [1 1 2a]
In quanto tempo un forno di potenza $P = 500\,W$ incrementa di $\Delta T = 20\,K$ la temperatura di $m = 20\,kg$ di acqua liquida?

Spiegazione In questo problema, ammettendo che non avvenga alcuna trasformazione di fase durante il riscaldamento, l'unico fenomeno che accade è il riscaldamento dell'acqua. Il calore che serve a scaldare quell'acqua viene dato in un certo intervallo di tempo dal forno. L'intervallo di tempo sarà tanto più piccolo quanto più potente è il forno.

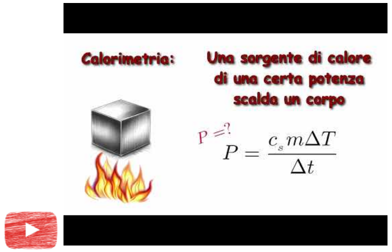


Fig. 3.5: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento Il calore necessario per scaldare l'acqua è

$$\Delta Q = c_s m \Delta T$$

Tale calore viene dato dal forno di potenza

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

quindi

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{P} = \frac{c_s m \Delta T}{P}$$

$$\Delta t = \frac{4186\,\frac{J}{kg K} \cdot 20\,kg \cdot 20\,K}{500\,W} = 3348,8\,s$$

Problema di: Calorimetria - $Q0016c$

Testo *[Q0016c]* [1 1 2a]
Quale potenza ha un fornelletto che sta scaldando una massa $m = 5\,kg$ di acqua da un tempo $\Delta t = 60\,s$ facendone aumentare la temperatura di $\Delta T = 50\,K$, sapendo che quell'acqua si trovava inizialmente alla temperatura $T_i = 20°C$?

Spiegazione Inizialmente abbiamo una certa massa di acqua che si trova ad una certa temperatura. Gradualmente gli forniamo del calore e vediamo che aumenta la sua temperatura. Innanzi tutto dobbiamo chiederci quali siano i fenomeni fisici che accadono in questa situazione. Visto che l'oggetto è passato da una temperatura iniziale $T_i = 20°C$ ad una finale $T_i = 70°C$ noi siamo sicuri che l'acqua si trova allo stato liquido e che non subisce alcuna transizione di fase. Le temperature di fusione e di ebollizione dell'acqua sono infatti rispettivamente $T_{fus} = 0°C$ e $T_{eb} = 100°C$. L'unico fenomeno che avviene è quindi il riscaldamento dell'oggetto.

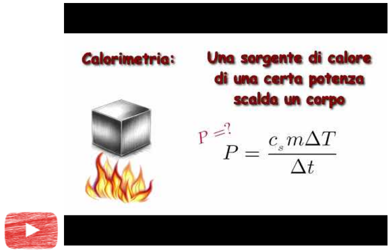


Fig. 3.6: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento Il calore fornito all'acqua dal fornelletto è dato da

$$\Delta Q = P\,\Delta t$$

con i dati del problema possiamo anche dire che

$$\Delta Q = c_s \cdot m \cdot \Delta T$$

da cui

$$P = \frac{c_s\, m\, \Delta T}{\Delta t}$$

$$P = \frac{4186 \frac{J}{kg\,K} \cdot 5\,kg \cdot 50\,K}{60\,s} = 17,442\,kW$$

Problema di: Calorimetria - $Q0016d$

Testo *[Q0016d]* [1 1 2a]
Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ scalda una massa $m = 5\,kg$ di ferro per un tempo $\Delta t = 10\,min$. Di quanto ne fa aumentare la temperatura?

Spiegazione Il fornello fornisce calore all'acqua, la quale, dice il testo, non subisce alcuna transizione di fase. Stabilito quanto calore è necessario, tanto più il fornello è potente, tanto meno tempo ci impiega.

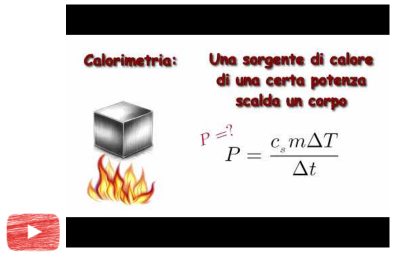


Fig. 3.7: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento [...]

Problema di: Calorimetria - $Q0016e$

Testo *[Q0016e]* [1 1 2a]
Un fornelletto di potenza $P = 1000\,W$ scalda una massa di ferro per un tempo $\Delta t = 10\,min$ facendone aumentare la temperatura di $\Delta T = 20\,K$. Quanta massa di ferro sta scaldando?

Spiegazione Il fornello fornisce calore all'acqua, la quale, dice il testo, non subisce alcuna transizione di fase. Stabilito quanto calore è necessario, tanto più il fornello è potente, tanto meno tempo ci impiega.

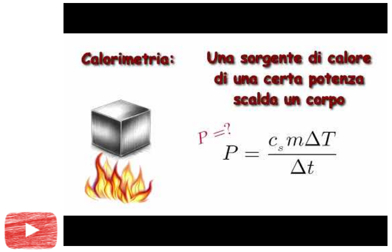


Fig. 3.8: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento [...]

Problema di: Calorimetria - $Q0016f$

Testo *[Q0016e]* [1 1 2a]
Un fornelletto di potenza $P = 2,2\,kW$ scalda un corpo di massa $m = 2\,kg$ per un tempo $\Delta t = 1000\,s$ facendone aumentare la temperatura di $\Delta T = 2,5\,K$. Di quale materiale è fatto il corpo?

Spiegazione Il fornello fornisce calore all'acqua, la quale, dice il testo, non subisce alcuna transizione di fase. Stabilito quanto calore è necessario, tanto più il fornello è potente, tanto meno tempo ci impiega. Per stabilire il materiale di cui è fatto il corpo è sufficiente calcolarsi il valore di una sua grandezza caratteristica e confrontarlo con i valori presenti nelle tabelle.

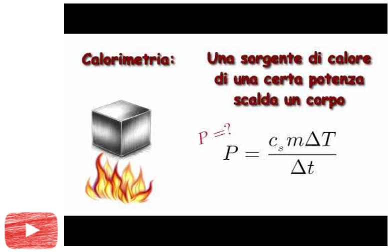


Fig. 3.9: *Guarda il video youtu.be/Hb_vj5N6CBI*

Svolgimento [...]

Problema di: Calorimetria - $Q0017$

Testo *[Q0017]* [3 4 2a]
Ad una sbarra di ferro di massa $m = 50\,kg$ e temperatura $T_i = 1500\,K$, fornisco $\Delta Q = 12000\,kJ$ di calore. Quale massa di ferro riesco a far fondere?

Spiegazione Alla temperatura a cui si trova il ferro, il calore che diamo serve per far scaldare quel ferro. Raggiunta la temperatura di fusione, il calore che avanza verrà utilizzato per far fondere parte del ferro.

Svolgimento Il calore necessario a scaldare la sbarra fino alla temperatura di fusione del ferro è

$$\Delta Q_{ris} = c_s m \Delta t = c_s m \left(T_{fus} - T_i\right)$$

$$\Delta Q_{ris} = 440\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 50\,kg \cdot (1808\,K - 1500\,K) = 6776\,kJ$$

Avanzano per la fusione

$$\Delta Q_{fus} = \Delta Q - \Delta Q_{ris} = 12000\,kJ - 6776\,kJ = 5224\,kJ$$

Questo calore fa fondere una certa massa di ferro

$$m_{fus} = \frac{\Delta Q_{fus}}{Q_{lat-fus}} = \frac{5224\,kJ}{247,2\,\frac{kJ}{kg}} = 21,13\,kg$$

Esercizi concettualmente identici

1. Ad un blocco di ghiaccio di massa $m = 10\,kg$ alla temperatura iniziale $T_i = -10\,°\mathrm{C}$ fornisco una quantità di calore $\Delta Q = 500\,kJ$. Quanto ghiaccio riesco a far sciogliere?

Problema di: Calorimetria - $Q0018$

Testo *[Q0018]* [4 5 3a]
Un pezzo di ferro di massa $m = 5\,kg$ alla temperatura $T_i = 1600\,K$ viene immerso in un volume $V = 2\,litri$ di acqua liquida alla temperatura di ebollizione. Quanta massa di acqua diventerà vapore?

Spiegazione In questo esercizio abbiamo un oggetto di ferro immerso nell'acqua. Visto che l'acqua si trova alla temperatura di ebollizione $T_{eb} = 100\,°\mathrm{C}$, e che il ferro ha una temperatura maggiore, il ferro cederà calore all'acqua. In questa situazione, il ferro si raffredderà, mentre la temperatura dell'acqua rimarrà costante visto che avviene il fenomeno dell'ebollizione. La temperatura finale del ferro sarà quindi uguale a quella di ebollizione dell'acqua.

Svolgimento Calcoliamo prima di tutto quanto calore il ferro cede all'acqua.

$$\Delta Q = c_s m \Delta T = 440\,\frac{J}{kg\,K} \cdot 5\,kg \cdot (373,15\,K - 1600\,K) = -2699070\,J$$

Ovviamente il segno meno indica solamente che questo calore è in uscita dall'oggetto di ferro. Calcoliamo adesso quanta acqua passa allo stato gassoso grazie a quel calore ceduto

$$m_{eb} = \frac{\Delta Q}{Q_{lat-eb}} = \frac{2699,070\,kJ}{2272\,\frac{kJ}{kg}} = 1,188\,kg$$

Problema di: Calorimetria - $Q0019$

Testo *[Q0019]* [2 ⭐ 2⏳ 2a📖]
Una sbarra di ferro di massa $m = 15\,kg$, lunga $l_i = 2\,m$ alla temperatura $T_i = 1600\,K$ viene immersa in una vasca riempita con $m_{H_2O} = 100\,kg$ d'acqua alla temperatura $T_{H_2O} = 300\,K$. Di quanto si accorcia la sbarra?

Spiegazione In questo esercizio una sbarra di ferro calda viene immersa in acqua fredda. L'acqua si scalda ed il ferro si raffredda, quindi il ferro si contrae. Calcolando prima la temperatura raggiunta dal ferro, si può poi calcolare di quanto di dilata la sbarra di ferro.

Svolgimento La temperatura di equilibrio raggiunta dal ferro è

$$T_{eq} = \frac{c_{s-Fe}m_{fe}T_{Fe} + c_{s-H_2O}m_{H_2O}T_{H_2O}}{c_{s-Fe}m_{fe} + c_{s-H_2O}m_{H_2O}}$$

$$T_{eq} = \frac{440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 15\,kg\cdot 1600\,K + 4186\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 100\,kg\cdot 300\,K}{440\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 15\,kg\cdot + 4186\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 100\,kg}$$

$$T_{eq} = \frac{136140000\,J}{425200\,\frac{J}{K}} = 320,18\,K$$

Possiamo adesso calcolare la dilatazione della sbarra di ferro

$$\Delta l = \lambda_{Fe} l_i \Delta T = 12\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}\cdot 2\,m\cdot (320,18\,K - 1600\,K) = 31\,mm$$

Problema di: calorimetria - $Q0020$

Testo *[Q0020]* [1 ⭐ 2⏳ 2a📖]

1. Cos'è il calore? Cos'è la temperatura di un oggetto?
2. Come varia la temperatura di un corpo durante una transizione di fase?
3. Cosa succede alle molecole di una sostanza durante una transizione di fase?
4. Cosa può succedere ad una sostanza solida se le forniamo calore?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare

Svolgimento

1. Il calore è una forma di energia. La temperatura di un oggetto è un indice dell'energia cinetica media delle molecole dell'oggetto.
2. Non cambia, rimane costante.
3. Durante una transizione di fase si formano o si spezzano i legami tra le molecole
4. Dando calore ad un solido, esso può scaldarsi e di conseguenza dilatarsi, o, se siamo alla temperatura di una transizione di fase, può fondere o sublimare.

Problema di: calorimetria - $Q0021$

Testo *[Q0021]* [1 ⭐ 1 ⌛ 2a 📖]
Due oggetti dello stesso materiale, di massa $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 15\,kg$, e con temperature $T_1 = 300\,°\mathrm{C}$ e $T_2 = 500\,°\mathrm{C}$, vengono messi a contatto. Senza fare calcoli, cosa puoi dire della temperatura che raggiungeranno? Perché?

Spiegazione Due oggetti a contatto si scambiano calore. Il più caldo darà calore al più freddo fino a che non raggiungono la stessa temperatura. La differente capacità termica dei due oggetti determinerà quale dei due cambia maggiormente la sua temperatura.

Svolgimento Visti i valori delle temperature iniziali, il primo oggetto si scalderà mentre il secondo si raffredderà. Visto che i due oggetti sono dello stesso materiale, per determinare la capacità termica contano solo le masse dei due oggetti. Quindi

$$C_1 < C_2$$

Il primo oggetto cambierà maggiormente la sua temperatura di quanto farà il secondo oggetto. La media delle due temperature è $T = 400\,°\mathrm{C}$. Visto che il primo oggetto deve scaldarsi molto ed il secondo raffreddarsi meno, allora la temperatura di equilibrio raggiunta sarà

$$400\,°\mathrm{C} < T_{eq} < 500\,°\mathrm{C}$$

Problema di: calorimetria - $Q0021a$

Testo *[Q0021a]* [1 ⭐ 1 ⌛ 2a 📖]
Due oggetti dello stesso materiale, di massa $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 15\,kg$, e di temperatura $T_1 = 500\,°\mathrm{C}$ e $T_2 = 300\,°\mathrm{C}$, sono messi a contatto. Senza fare calcoli, cosa puoi dire della temperatura che raggiungeranno?

Svolgimento L'esercizio è assolutamente identico all'esercizio *[Q0021]* solo che qui il primo oggetto, quello cioè che cambia maggiormente la sua temperatura, è quello più caldo che si raffredda, mentre il secondo, quello che cambia di poco la sua temperatura, è quello più freddo. Quindi

$$300\,°\mathrm{C} < T_{eq} < 400\,°\mathrm{C}$$

Problema di: calorimetria - $Q0022$

Testo *[Q0022]* [1 2 2a]

1. Cosa succede se mettiamo due corpi, con temperatura differente, a contatto tra loro? Perché?

2. Le molecole di un oggetto possono rimanere ferme?

3. Se fornisco energia ad un corpo e lo vedo fondere, come è stata utilizzata quell'energia?

4. Esiste un limite inferiore alla temperatura che può avere un oggetto? Quale?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare

Svolgimento

1. Il più caldo cede calore al più freddo fino a quando raggiungono la stessa temperatura.

2. No, le molecole si muovono sempre, e la loro velocità è legata alla loro temperatura.

3. Durante la fusione di un corpo, l'energia fornita viene utilizzata per rompere i legami tra le molecole.

4. Si, esiste un limite inferiore per la temperatura, ed esso corrisponde a $T_{zero} = 0\,K = -273,15\,°\mathrm{C}$. Visto che la temperatura è legata all'energia cinetica delle molecole, tale limite ideale alla temperatura corrisponderebbe ad una situazione di molecole *ferme*.

Problema di: Calorimetria - $Q0024$

Testo *[Q0024]* [2 3 2a]
Un termometro a mercurio è costituito da una piccola ampolla che contiene mercurio. Da tale ampolla esce un tubicino di sezione $S = 0,2\,mm^2$. La quantità totale di mercurio nel termometro è $m = 30\,g$. Inizialmente il termometro si trova a $T_i = 20\,°\mathrm{C}$. Il coefficiente di dilatazione termica volumetrico del mercurio è $\delta = 0,18 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K}$. Di quanti millimetri sale il livello del mercurio nel tubicino se in una giornata calda siamo a $T_f = 35\,°\mathrm{C}$

Spiegazione Il livello del mercurio nel tubicino sale in quanto il mercurio, scaldandosi, si dilata ed aumenta il suo volume. Il volume in più rispetto a prima è quello che si è posizionato nel tubicino ed ha quindi forma cilindrica si sezione S

Svolgimento Cominciamo con il calcolarci il volume iniziale del mercurio:

$$V_i = \frac{m}{\rho} = \frac{30\,g}{13,579\,\frac{g}{cm^3}} = 2,21\,cm^3$$

Calcoliamo adesso la variazione di temperatura del mercurio (ricordandoci che stiamo calcolando una *variazione* di temperatura e quindi $K = °\mathrm{C}$).

$$\Delta T = T_f - T_i = 15\,°\mathrm{C} = 15\,K$$

Calcoliamo adesso la variazione di volume del mercurio

$$\Delta V = \delta V_i \Delta T = 0,18 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{K} \cdot 2,21\,cm^3 \cdot 15\,K = 0,006\,cm^3 = 6\,mm^3$$

Possiamo infine calcolarci di quanto è salita la colonnina di mercurio.

$$h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{6\,mm^3}{0,2\,mm^2} = 30\,mm$$

Problema di: Calorimetria - $Q0025$

Testo *[Q0025]* [2 2 2a]

Una stufa elettrica mantiene in una stanza una temperatura $T_{int} = 24\,°\mathrm{C}$, mentre all'esterno la temperatura è $T_{ext} = 4\,°\mathrm{C}$. Il calore si disperde attraverso una finestra di vetro ($\rho_{vetro} = 1\,\frac{W}{m \cdot K}$) rettangolare ($b = 1,5\,m$ e $h = 1,8\,m$) spessa $l = 3\,mm$. Il costo dell'energia è $C = 0,18\frac{€}{kWh}$; quanto costa riscaldare la stanza per un tempo $\Delta t = 3\,h$?

Spiegazione Visto che c'è una differenza di temperatura tra la superficie interna ed esterna del vetro, allora attraverso di esso si muove del calore. Il calore quindi esce dalla stanza e deve essere rimpiazzato da nuovo calore proveniente dalla stufa elettrica.

Svolgimento La superficie della finestra è

$$S = bh = 2,7\,m^2$$

La potenza dissipata attraverso il vetro è data da

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \frac{S}{l} \Delta T = 1\,\frac{W}{m \cdot K}\,\frac{2,7\,m^2}{3\,mm} 20\,K = 18000\,W = 18\,kW$$

L'energia necessaria per compensare tale perdita è

$$\Delta Q = P \cdot \Delta t = 54\,kWh$$

Tale energia elettrica costa

$$Costo = C \cdot \Delta Q = 0,18\,\frac{€}{kWh} = 9,72\,€$$

Ovviamente è un costo molto alto... ecco perché nessuno scalda gli appartamenti con stufette elettriche.

Problema di: Calorimetria - $Q0026$

Testo *[Q0026]* [2 3 2a]

Fornendo $\Delta Q_{tot} = 3000\,kJ$ ad un oggetto di piombo alla temperatura $T_i = 280\,K$, riesco a portarlo alla temperatura di fusione e fonderlo interamente. Quanta massa di piombo liquido avrò alla temperatura di fusione?

Spiegazione Per scaldare una massa di piombo è necessario fornire del calore. Per fonderla è necessario del calore. Sapendo che con il calore a disposizione riesco a scaldare il piombo fino alla temperatura di fusione, e riesco poi anche a fonderlo tutto, il problema si risolve eguagliando il calore a disposizione con quello necessario a scaldare prima, e fondere poi, il piombo

Fig. 3.10: *Guarda il video youtu.be/eGdJhOG3p-U*

Svolgimento Il calore necessario a scaldare il piombo è

$$\Delta Q_{ris} = c_s \cdot m \cdot \Delta T$$

considerando che il piombo lo devo scaldare fino alla temperatura di fusione

$$\Delta Q_{ris} = c_s \cdot m \cdot (T_{fus} - T_i)$$

IL calore necessario per far fondere il piombo è

$$\Delta Q_{fus} = Q_{lat-fus} \cdot m$$

Il calore ΔQ_{tot} indicato nel testo dell'esercizio serve sia per scaldare che per fondere il ferro, quindi

$$\Delta Q_{tot} = \Delta Q_{ris} + \Delta Q_{fus}$$

per cui

$$\Delta Q_{tot} = c_s \cdot m \cdot (T_{fus} - T_i) + Q_{lat-fus} \cdot m$$

$$\Delta Q_{tot} = m \cdot \left[c_s \cdot (T_{fus} - T_i) + Q_{lat-fus}\right]$$

ed infine

$$m = \frac{\Delta Q_{tot}}{c_s \cdot (T_{fus} - T_i) + Q_{lat-fus}}$$

$$m = \frac{3000000\,J}{129\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot (600,61\,K - 280\,K) + 23,2\,\frac{kJ}{kg}} = 72,5\,kg$$

Problema di: Calorimetria - $Q0027$

Testo *[Q0027]* [1 ⭐ 1 ⏳ 2a 📖]
Le temperature di fusione e di ebollizione del ferro sono: $T_{fus} = 1808\,K$; $T_{eb} = 3023\,K$. Alle seguenti temperature il ferro è solido, liquido o gassoso?

$T_1 = 1600K$	$T_2 = 1890\,°\mathrm{C}$	$T_3 = 1600\,°\mathrm{C}$	$T_4 = 1808K$

Spiegazione Per sapere se una sostanza è solida, liquida o gassosa, è necessario guardare la sua temperatura e conoscere le temperature di fusione ed ebollizione di tale sostanza. La massa non ha alcuna importanza nel determinare quale sia lo stato fisico della sostanza.

Svolgimento Analizziamo le informazioni che ci sono state date

- $10\,kg$ di ferro alla temperatura $T = 1600\,K$. La sostanza ha una temperatura inferiore a quella di fusione: la sostanza è solida.
- $20\,kg$ di ferro alla temperatura $T = 1890\,°\mathrm{C}$. La sostanza ha una temperatura superiore a quella di fusione, ma inferiore a quella di ebollizione: la sostanza è liquida.
- $20\,kg$ di ferro alla temperatura $T = 1600\,°\mathrm{C}$. La sostanza ha una temperatura superiore a quella di fusione, ma inferiore a quella di ebollizione: la sostanza è liquida.
- $10\,kg$ di ferro alla temperatura $T = 1808\,K$. La sostanza ha una temperatura pari alla temperatura di fusione: la sostanza è in parte solida ed in parte liquida; i due stati della materia sono presenti contemporaneamente.

Problema di: Calorimetria - $Q0028$

Testo *[Q0028]* [1 2 2a]
Rispondi alle seguenti domande.

1. Perché l'alcool etilico bolle alla temperatura di circa $T_{eb-1} = 80\,°\mathrm{C}$ mentre l'acqua bolle alla temperatura di $T_{eb-2} = 100\,°\mathrm{C}$
2. Se prendo una certa massa di ferro alla temperatura $T = 1600\,K$, è solida, liquida, gassosa o plasma? Spiega perché.
3. L'acqua alla temperatura $T = 327\,K$ è solida, liquida, gassosa o plasma? Spiega perché.

Spiegazione In questo esercizio vengono presentate tre situazioni in cui bisogna applicare i concetti studiati in calorimetria.

Svolgimento

1. Il valore della temperatura di ebollizione di una sostanza dipende da quanto sono forti i legami chimici tra le molecole di quella sostanza. L'acqua bolle ad una temperatura superiore a quella dell'alcool, quindi i legami chimici tra le molecole dell'acqua sono più forti dei legami chimici tra le molecole dell'alcool.
2. La temperatura di fusione del ferro è $T_{fus-Fe} = 1808\,K$. Il testo della domanda specifica che il ferro ha una temperatura inferiore alla sua temperatura di fusione, quindi è necessariamente solido.
3. La temperatura di fusione dell'acqua è $T_{fus-H_2O} = 273,15\,K$, mentre quella di ebollizione è $T_{eb-H_2O} = 373,15\,K$. La temperatura dell'acqua in questo esercizio è maggiore della temperatura di fusione, ma minore della temperatura di ebollizione, quindi la sostanza è liquida.

Problema di: Calorimetria - $Q0029$

Testo *[Q0029]* [3 2 2a]
Un corpo di $m = 5\,kg$ di ferro a temperatura $T = 300\,K$, riceve $\Delta Q = 4400\,J$ di calore. Di quanto aumenta il suo volume?

Spiegazione Se forniamo ad un pezzo di ferro solido del calore senza che il pezzo di ferro cominci a fondere, allora questo si scalda e si dilata. Possiamo quindi calcolarci di quanto aumenta il suo volume a causa della dilatazione termica.

Svolgimento L'oggetto di ferro si trovava alla temperatura $T_i = 300\,K$, quindi inizialmente si scalda. Calcoliamoci di quanto aumenta la sua temperatura.

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c_s \cdot m} = \frac{4400\,J}{440\,\frac{J}{kgK} \cdot 5\,kg} = 2\,K$$

L'oggetto si trovava inizialmente alla temperatura $T_i = 300\,K$ e quindi non arriva alla temperatura di fusione del ferro $T_{fus} = 1808\,K$. Gli unici fenomeni che accadono sono il riscaldamento e la dilatazione termica.

Calcoliamoci adesso il volume iniziale del ferro, conoscendone la densità, e la variazione del suo volume.

$$V_i = \frac{m}{\rho_{Fe}} = \frac{5\,kg}{7874\,\frac{kg}{m^3}} = 6,35 \cdot 10^{-4} m^3$$

$$\Delta V = 3\lambda V_i \Delta T = 36 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K} \cdot 6,35 \cdot 10^{-4} m^3 \cdot 2\,K = 4,572 \cdot 10^{-8} m^3$$

La formula finale dell'esercizio facendo solo conti letterali sarebbe

$$\Delta V = 3\lambda \cdot \frac{m}{\rho_{Fe}} \cdot \frac{\Delta Q}{c_s \cdot m} = \frac{3\lambda}{\rho_{Fe}} \cdot \frac{\Delta Q}{c_s}$$

Problema di: Calorimetria - $Q0030$

Testo *[Q0030]* [4 5 3a]
In un contenitore termicamente isolato sono presenti una massa $m_g = 500\,g$ di ghiaccio alla temperatura $T_{ig} = 0\,°C$ ed una massa $m_v = 600\,g$ di vapore acqueo alla temperatura $T_{iv} = 100\,°C$. Calcola la temperatura di equilibrio del sistema e quanto vapore rimane.

Spiegazione In natura il calore si sposta dagli oggetti più caldi verso gli oggetti più freddi. Il vapore fonde il ghiaccio cedendogli calore; il vapore, cedendo calore, si condensa.

Svolgimento La quantità di calore che serve per fondere il ghiaccio è

$$\Delta Q_{fus} = Q_{lat-fus} \cdot m = 335\,\frac{kJ}{kg} \cdot 0,5\,kg = 167500\,J$$

Per poi portare il liquido alla temperatura di ebollizione servono

$$\Delta Q_{_{0\to100}} = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 0,5\,kg \cdot 100\,K = 209300\,J$$

Il calore totale sottratto al vapore è quindi

$$\Delta Q = \Delta Q_{fus} + \Delta Q_{_{0\to100}} = 376800\,J$$

Sottraendo questa quantità di calore al vapore, la quantità di vapore che riesco a far condensare è

$$m_{cond} = \frac{\Delta Q}{Q_{lat-eb}} = \frac{376,8\,kJ}{2272\,\frac{kJ}{kg}} = 0,166\,kg$$

Rimane quindi una massa di vapore pari a

$$m = m_v - m_{cond} = 434\,g$$

Problema di: Calorimetria - $Q0031$

Testo *[Q0031]* [3 5 3a]
Una sbarra di ferro di massa $m = 3\,kg$ alla temperatura $T_{i-ferro} = 800\,K$ viene fatta raffreddare per immersione in una vasca d'acqua alla temperatura $T_{i-acqua} = 300\,K$. Quale quantità *minima* di acqua devo usare per raffreddare il ferro senza che l'acqua cominci a bollire?

Spiegazione Il ferro e l'acqua a contatto raggiungeranno la stessa temperatura. Tanto meno acqua utilizzerò, tanto più alta sarà la temperatura di equilibrio raggiunta. La minima quantità di acqua utilizzabile corrisponderà alla massima temperatura raggiungibile. Visto che vogliamo che l'acqua non cominci a bollire, allora tale temperatura è quella di ebollizione dell'acqua.

Svolgimento Il ferro e l'acqua a contatto raggiungeranno la stessa temperatura:

$$T_{eq} = \frac{c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} + c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{i-H_2O}}{c_{s-Fe} m_{Fe} + c_{s-H_2O} m_{H_2O}}$$

$$(c_{s-Fe} m_{Fe} + c_{s-H_2O} m_{H_2O}) \cdot T_{eq} = c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} + c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{i-H_2O}$$

$$c_{s-Fe} m_{Fe} T_{eq} + c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{eq} = c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} + c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{i-H_2O}$$

$$c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{eq} - c_{s-H_2O} m_{H_2O} T_{i-H_2O} = c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} - c_{s-Fe} m_{Fe} T_{eq}$$

$$m_{H_2O} \cdot (c_{s-H_2O} T_{eq} - c_{s-H_2O} T_{i-H_2O}) = c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe} - c_{s-Fe} m_{Fe} T_{eq}$$

$$m_{H_2O} = \frac{c_{s-Fe} \cdot m_{Fe}\,(T_{i-Fe} - T_{eq})}{c_{s-H_2O} \cdot (T_{eq} - T_{i-H_2O})}$$

$$m_{H_2O} = \frac{440\,\frac{J}{kg\cdot K} \cdot 3\,kg\,(800\,K - 373,15\,K)}{4186\,\frac{J}{kg\cdot K} \cdot (373,15\,K - 300\,K)} = 1,84\,kg$$

Problema di: Calorimetria - $Q0033$

Testo *[Q0033]* [3 ⭐ 4 ⏳ 3a 📖]
Un muro è costituito da due strati: il primo di intonaco ($\rho_{int} = 0,8\,\frac{W}{mK}$) spesso $L_{int} = 3\,cm$; il secondo di mattone forato ($\rho_{int} = 0,4\,\frac{W}{mK}$) spesso $L_{int} = 10\,cm$. Sapendo che la temperatura sul lato interno del muro è $T_{int} = 25\,°\mathrm{C}$, e sul lato esterno $T_{ext} = 15\,°\mathrm{C}$, trovate la temperatura sulla superficie di separazione tra il mattone ed intonaco.

Spiegazione Il calore si muove dai luoghi più caldi verso quelli più freddi. La legge della conducibilità termica descrive questo spostamento nel problema in questione.

Svolgimento Considerando le temperature avremo

$$\Delta T_{muro} = \Delta T_{ma} + \Delta T_{in}$$

Considerato che per ogni superficie scelta il calore che attraversa uno strato di muro ogni secondo è lo stesso che poi attraversa lo strato successivo, avremo che

$$\frac{\Delta Q}{S\Delta t} = \frac{\Delta T_{in}\rho_{in}}{L_{in}} = \frac{\Delta T_{ma}\rho_{ma}}{L_{ma}}$$

quindi

$$\Delta T_{muro} = \Delta T_{ma} + \Delta T_{ma}\frac{\rho_{ma}L_{in}}{\rho_{in}L_{ma}}$$

$$\Delta T_{muro}\cdot\rho_{in}L_{ma} = \Delta T_{ma}\rho_{in}L_{ma} + \Delta T_{ma}\rho_{ma}L_{in}$$

$$\Delta T_{ma} = \Delta T_{muro}\frac{\rho_{in}L_{ma}}{\rho_{in}L_{ma} + \rho_{ma}L_{in}}$$

$$\Delta T_{ma} = 10\,°\mathrm{C}\cdot\frac{8}{9,4} = 8,5\,°\mathrm{C}$$

La temperatura richiesta è quindi

$$T = T_{in} - \Delta T_{ma} = 16,9\,°\mathrm{C}$$

Problema di: Calorimetria - $Q0034$

Testo *[Q0034]* [3 5 3a]
Un muro è costituito da tre strati: il primo di intonaco ($\rho_{int} = 0,8\,\frac{W}{mK}$) spesso $L_{int} = 3\,cm$; il secondo di mattone forato ($\rho_{int} = 0,4\,\frac{W}{mK}$) spesso $L_{int} = 10\,cm$; il terzo di legno ($\rho_{int} = 0,2\,\frac{W}{mK}$) spesso $L_{int} = 5\,cm$. La temperatura sul lato interno del muro è $T_{int} = 25\,°\mathrm{C}$, ; sul lato esterno è $T_{ext} = 15\,°\mathrm{C}$. Trovate la temperatura sulla superficie di separazione tra il mattone e legno.

Spiegazione Il calore si muove dai luoghi più caldi verso quelli più freddi. La legge della conducibilità termica descrive questo spostamento nel problema in questione.

Svolgimento Indichiamo il legno con le, l'intonaco con in ed il mattone con ma. Considerando le temperature avremo

$$\Delta T_{muro} = \Delta T_{in} + \Delta T_{ma} + \Delta T_{le}$$

Considerato che per ogni superficie scelta il calore che attraversa uno strato di muro ogni secondo è lo stesso che poi attraversa lo strato successivo, avremo che

$$\frac{\Delta Q}{S\Delta t} = \frac{\Delta T_{in}\rho_{in}}{L_{in}} = \frac{\Delta T_{ma}\rho_{ma}}{L_{ma}} = \frac{\Delta T_{le}\rho_{le}}{L_{le}}$$

quindi

$$\Delta T_{muro} = \Delta T_{le} + \Delta T_{le}\frac{\rho_{le}L_{ma}}{\rho_{ma}L_{le}} + \Delta T_{le}\frac{\rho_{le}L_{in}}{\rho_{in}L_{le}}$$

$$\Delta T_{muro}\cdot\rho_{in}\rho_{ma}L_{le} = \Delta T_{le}\cdot\rho_{in}\rho_{ma}L_{le} + \Delta T_{le}\cdot\rho_{in}\rho_{le}L_{ma} + \Delta T_{le}\cdot\rho_{ma}\rho_{le}L_{in}$$

$$\Delta T_{le} = \Delta T_{muro}\frac{\rho_{in}\rho_{ma}L_{le}}{\rho_{in}\rho_{ma}L_{le} + \rho_{in}\rho_{le}L_{ma} + \rho_{ma}\rho_{le}L_{in}}$$

$$\Delta T_{le} = 10\,°C\cdot\frac{1,6}{1,6+1,6+0,16} = 4,8\,°\mathrm{C}$$

La temperatura richiesta sarà quindi

$$T = T_{in} - \Delta T_{le} = 21,2\,°\mathrm{C}$$

Problema di: Calorimetria - $Q0035$

Testo *[Q0035]* [1 2 2a]
Rispondi alle seguenti domande:

1. Cosa indica la temperatura di un oggetto?
2. Perché esiste un limite inferiore alla temperatura?
3. Un bicchiere d'acqua si trova alla temperatura $T = 30\,°\mathrm{C}$: cosa posso dire sulla temperatura di una singola molecola d'acqua di quel bicchiere?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... bisogna semplicemente aver studiato per poter rispondere.

Svolgimento

1. La temperatura di un oggetto indica l'energia cinetica media delle sue molecole.
2. L'energia cinetica di un oggetto è sempre una quantità positiva o nulla. Per questo motivo esiste un limite inferiore all'energia cinetica media di un gruppo di molecole, e quindi un limite inferiore per la loro temperatura.
3. Se un bicchiere l'acqua ha una temperatura $T = 30\,°\mathrm{C}$ significa che la media delle temperature delle molecole ha questo valore. Le singole molecole hanno diverse temperature a seconda della distribuzione di Maxwell dal valore della temperatura di fusione fino al valore della temperatura di ebollizione. La probabilità che una molecola abbia una determinata temperatura diminuisce all'aumentare della distanza tra la temperatura della molecola ed il valore di temperatura media.

Problema di: Calorimetria - $Q0036$

Testo *[Q0036]* [4 5 5a]
Un contenitore pieno di un certo liquido a temperatura T_i scambia energia con l'ambiente esterno a temperatura T_a supposta costante, ed inferiore alla temperatura del liquido. Sappiamo che la rapidità con cui il calore viene ceduto dal liquido è proporzionale alla differenza di temperatura con l'ambiente esterno. Trovare l'andamento della temperatura del liquido in funzione del tempo.

Spiegazione Questo è un problema che parla del raffreddamento di un liquido, con l'informazione su quanto rapidamente il calore viene ceduto. Scrivendo tali informazioni di costruisce l'equazione differenziale che risolve il problema.

Svolgimento Trattandosi del raffreddamento di un liquido avremo

$$\Delta Q = c_s m \Delta T$$

ed al tempo stesso sappiamo che

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\alpha \left(T - T_a\right)$$

con T la temperatura del corpo e ΔQ il calore fornito al corpo.

Quindi

$$\frac{c_s m \Delta T}{\Delta t} = -\alpha \left(T - T_a\right)$$

$$\frac{\Delta T}{\left(T - T_a\right)} = -\frac{\alpha}{c_s m}\Delta t$$

in forma differenziale

$$\frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = -\frac{\alpha}{c_s m} dt$$

integrando l'equazione avremo

$$\int_{T_i}^{T} \frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = -\frac{\alpha}{c_s m}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{\left(T - T_a\right)}{\left(T_i - T_a\right)} = -\frac{\alpha}{c_s m} t$$

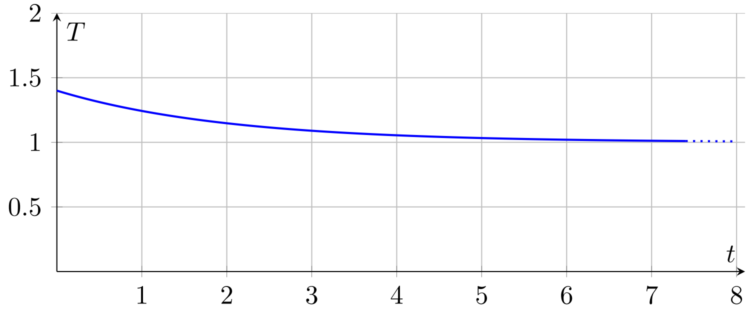
$$\left(T - T_a\right) = \left(T_i - T_a\right) e^{-\frac{\alpha}{c_s m} t}$$

$$T = T_a + \left(T_i - T_a\right) e^{-\frac{\alpha}{c_s m} t}$$

Nel caso di un corpo che Parte dalla temperatura iniziale $T_i = 1.4 \cdot T_a$ secondo l'equazione

$$T = T_a - 0,4 T_a e^{-\frac{1}{2}t}$$

Sull'asse verticale del grafico le unità sono indicate in funzione di T_a



Problema di: Calorimetria - $Q0037$

Testo *[Q0037]* [4 5 5a]
Un contenitore adiabatico contiene due liquidi differenti a temperatura iniziale rispettivamente T_{1i} e $T_{2i} > T_{1i}$, separati da una paratia che permette scambi di calore. La rapidità dello scambio di calore è proporzionale alla superficie della paratia di separazione. Calcola l'andamento delle temperature dei due liquidi in funzione del tempo. Utilizza la funzione trovata per verificare la formula della temperatura di equilibrio tra due corpi posti a contatto.

Spiegazione Questo è un problema che parla dello scambio di calore tra due liquidi e della conseguente variazione di temperatura. Sappiamo inoltre quanto rapidamente il calore viene ceduto da un liquido all'altro. Scrivendo tali informazioni si costruisce l'equazione differenziale che risolve il problema.

Svolgimento Il processo di scambio del calore può essere scritto come

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$$

indicando ΔQ come *il calore in ingresso* ed affermando che tutto il calore in uscita dal corpo più caldo entra in quello più freddo. In forma differenziale, avremo

$$\begin{cases} dQ_1 + dQ_2 = 0 \\ \dfrac{dQ_1}{\Delta t} = -\alpha\left(T_1 - T_2\right) \\ dQ_1 = C_1 dT_1 \\ dQ_2 = C_2 dT_2 \end{cases}$$

Da queste equazioni possiamo scrivere

$$\frac{dQ_1}{dt} = C_1 \frac{dT_1}{dt}$$

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = -\alpha\left(T_1 - T_2\right)$$

derivando

$$C_1 \frac{d^2T_1}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{dT_1}{dt} - \frac{T_2}{dt}\right)$$

sappiamo poi che il calore in uscita dal corpo caldo entra nel corpo freddo

$$dQ_1 = dQ_2$$

$$C_1 dT_1 = -C_2 dT_2$$

e quindi

$$C_1 \frac{d^2T_1}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{C_1}{C_2}\frac{T_1}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2T_1}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)\frac{dT_1}{dt}$$

Integrando l'equazione ed indicando con k la costante di integrazione

$$\frac{dT_1}{dt} = -\alpha\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)T_1 + k$$

Per valutare ora la costante k teniamo presenti le seguenti condizioni per l'istante iniziale $t = t_i = 0$:

$$\begin{cases} t_i = 0 \\ T_1 = T_{i1} \\ \dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{\alpha}{C_1}\left(T_{i1} - T_{i2}\right) \end{cases}$$

da cui

$$k = -\frac{\alpha}{C_1}\left(T_{i1} - T_{i2}\right) + \frac{\alpha}{C_1}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)T_{i1} = \alpha\frac{C_2 + C_1}{C_2 C_1}\frac{C_1 T_{i1} + C_2 T_{i2}}{C_1 + C_2}$$

definendo

$$T_{eq} = \frac{C_1 T_{i1} + C_2 T_{i2}}{C_1 + C_2}$$

avremo

$$k = \alpha\frac{C_2 + C_1}{C_2 C_1}T_{eq}$$

L'equazione è adesso

$$\frac{dT_1}{dt} = -\alpha\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)T_1 + \alpha\frac{C_2+C_1}{C_2C_1}T_{eq}$$

$$\frac{dT_1}{dt} = -\alpha\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)(T_1 - T_{eq})$$

Integrando avremo

$$\int_{T_{i1}}^{T_1} \frac{dT_1}{(T_1 - T_{eq})} = \int_0^t -\alpha\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)dt$$

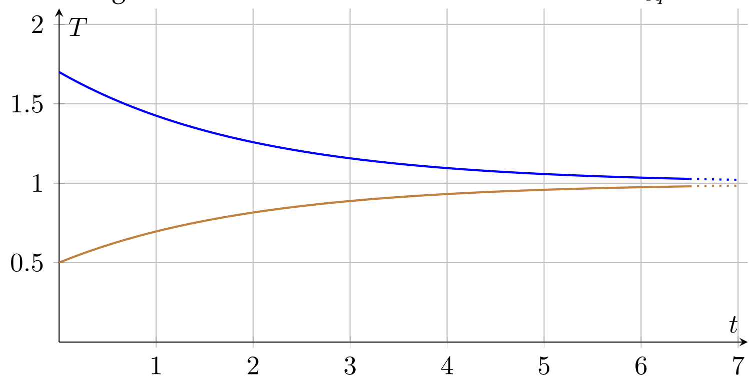
$$\ln\frac{T_1 - T_{eq}}{T_{i1} - T_{eq}} = -\alpha\frac{C_2+C_1}{C_2C_1}t$$

$$T_1 = T_{eq} + (T_{i1} - T_{eq})\, e^{-\alpha\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}t}$$

In modo analogo si ricava l'altra equazione

$$T_2 = T_{eq} + (T_{i2} - T_{eq})\, e^{-\alpha\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}t}$$

Rappresentiamo le due curve nell'ipotesi che $T_{i1} = 1.4T_{eq}$ e $T_{i1} = 1.4T_{eq}$ Sull'asse verticale del grafico le unità sono indicate in funzione di T_{eq}



Problema di: Calorimetria - $Q0038$

Testo *[Q0038]* [1 ⭐ 1 ⏳ 2a 📖]
Se metto un pezzo di ferro di massa $m_1 = 2\,kg$ alla temperatura $T_1 = 200\,°C$ dentro un contenitore pieno di $m = 5\,kg$ di acqua alla temperatura $T_2 = 20\,°C$, di quanti gradi si scalda l'acqua?

Spiegazione L'acqua ed il ferro, avendo temperature differenti, raggiungono una temperatura di equilibrio. In particolare per questo problema l'acqua si scalda ed il ferro si raffredda.

Svolgimento La temperatura che i due oggetti raggiungono è

$$T_{eq} = \frac{c_{s1}m_1T_1 + c_{s2}m_2T_2}{c_{s1}m_1 + c_{s2}m_2} = \frac{440\,\frac{J}{kgK}\cdot 2\,kg\cdot 200\,°C + 4186\,\frac{J}{kgK}\cdot 5\,kg\cdot 20\,°C}{440\,\frac{J}{kgK}\cdot 2\,kg + 4186\,\frac{J}{kgK}\cdot 5\,kg}$$

$$T_{eq} = \frac{594600\,\frac{J\,°C}{K}}{21810\,\frac{J}{K}} = 27,3\,°C$$

L'aumento di temperatura dell'acqua è quindi

$$\Delta T = T_{eq} - T_2 = 7,3\,°C$$

Problema di: Calorimetria - $Q0039$

Testo *[Q0039]* [2 2 2a]
Se fornisco $\Delta Q = 120\,kJ$ ad una massa $m = 1\,kg$ di acqua alla temperatura $T_i = 80°C$, si scalderà tanto da iniziare a bollire? Perché?

Spiegazione In questo problema abbiamo dell'acqua allo stato liquido e la scaldiamo fornendo del calore. Si scalderà a sufficienza per raggiungere il punto di ebollizione?

Svolgimento Per arrivare alla temperatura di ebollizione, l'acqua deve scaldarsi di

$$\Delta T = T_{eb} - T_i = 20\,°\mathrm{C}$$

Per variare la sua temperatura di quel ΔT, è necessario fornire

$$\Delta Q' = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 1\,kg \cdot 20\,°\mathrm{C} = 83,720\,kJ$$

Il testo dice che all'acqua vengono forniti $\Delta Q = 120\,kJ$, molti di più di quelli necessari per far arrivare l'acqua al punto di ebollizione. Quindi l'acqua bollirà.

Problema di: Calorimetria - $Q0039a$

Testo *[Q0039a]* [2 2 2a]
Se fornisco $\Delta Q = 120\,kJ$ ad una massa $m = 1\,kg$ di acqua ghiacciata alla temperatura $T_i = -30°C$, si scalderà tanto da iniziare a fondere? Perché? *[il calore specifico del ghiaccio vale* $c_s = 2220\,\frac{J}{kg\cdot°C}$*; il ghiaccio fonde a* $T_f = 0\,°C$*]*

Spiegazione In questo problema abbiamo del ghiaccio e lo scaldiamo fornendo del calore. Si scalderà a sufficienza per raggiungere il punto di fusione?

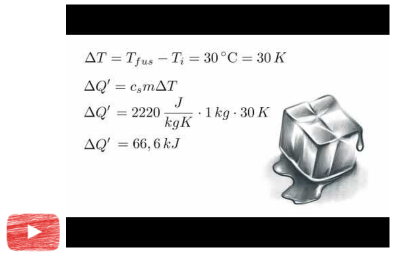


Fig. 3.11: *Guarda il video youtu.be/Q8CgcQ3mdt0*

Svolgimento Per arrivare alla temperatura di fusione, il ghiaccio deve scaldarsi di

$$\Delta T = T_{fus} - T_i = 30\,°\mathrm{C} = 30\,K$$

Per variare la sua temperatura di quel ΔT, è necessario fornire

$$\Delta Q' = c_s m \Delta T = 2220\,\frac{J}{kgK} \cdot 1\,kg \cdot 30\,K = 66,6\,kJ$$

Il testo dice che al giaccio vengono forniti $\Delta Q = 120\,kJ$, molti di più di quelli necessari per far arrivare il ghiaccio al punto di fusione. Quindi il ghiaccio fonderà.

Problema di: Calorimetria - $Q0039b$

Testo *[Q0039b]* [2 2 2a]
Se fornisco $\Delta Q = 120\,kJ$ ad una massa $m = 1\,kg$ di ferro alla temperatura $T_i = 1400°C$, si scalderà tanto da iniziare a fondere? Perché? *[il calore specifico del ferro vale* $c_s = 440\,\frac{J}{kg\cdot°C}$*; il ferro fonde a* $T_f = 1535\,°C$*]*

Spiegazione In questo problema abbiamo del ferro allo stato solido e lo scaldiamo fornendo del calore. Si scalderà a sufficienza per raggiungere il punto di fusione?

Svolgimento Il ferro si trova alla temperatura

$$T_i = 1400\,°\mathrm{C} = 1673\,K$$

Per arrivare alla temperatura di fusione, l'acqua deve scaldarsi di

$$\Delta T = T_{eb} - T_i = 1808\,K - 1673\,K = 135\,K$$

Per variare la sua temperatura di quel ΔT, è necessario fornire

$$\Delta Q' = c_s m \Delta T = 440\,\frac{J}{kgK}\cdot 1\,kg\cdot 135\,K = 59,4\,kJ$$

Il testo dice che al ferro vengono forniti $\Delta Q = 120\,kJ$, molti di più di quelli necessari per far arrivare il ferro al punto di ebollizione. Quindi il ferro fonderà.

Problema di: Calorimetria - $Q0040$

Testo *[Q0040]* [4 4 3a]
Due barrette sottili della stessa lunghezza $x = 1\,m$ e spessore $2d = 2\,mm$, una di rame ed una di alluminio, sono saldate insieme. Variando la temperatura esse assumono forma circolare. Calcola il raggio della circonferenza in funzione della variazione di temperatura.

Spiegazione In questo problema viene presentato il comportamento di un materiale bimetallico. Due barrette di materiale differente scaldandosi si dilatano in modo differente. Di lunghezza differente, devono comunque mantenere uguale la lunghezza del lato saldato, e quindi devono potere dilatarsi senza muoversi una rispetto all'altra. Il modo in cui questo può avvenire è assumendo una forma circolare. La barretta esterna sarà più lunga senza che le due barrette sul lato saldato debbano muoversi.

Svolgimento Gli allungamenti delle due barrette sono

$$\Delta l_{_{Cu}} = \lambda_{_{Cu}} x \Delta T$$

$$\Delta l_{_{Al}} = \lambda_{_{Al}} x \Delta T$$

La lunghezza delle due sbarre scaldate è quindi

$$l_{_{Cu}} = x\left(1 + \lambda_{_{Cu}}\Delta T\right)$$

$$l_{_{Al}} = x\left(1 + \lambda_{_{Al}}\Delta T\right)$$

Detto r il raggio di curvatura del materiale bimetallico, le due barrette si dispongono su di una forma circolare di raggi

$$r_{_{Cu}} = r - d$$

$$r_{_{Al}} = r + d$$

La lunghezza delle due circonferenze disegnate dal rame e dall'alluminio è differente di un fattore

$$c = 2\pi \frac{r+d}{r-d}$$

Le due sbarre differiscono in lunghezza di un fattore

$$c' = \frac{l_{Al}}{l_{Cu}} = \frac{1+\lambda_{Cu}\Delta T}{1+\lambda_{Al}\Delta T}$$

Il problema si risolve imponendo che i due fattori siano uguali

$$c = c'$$

$$2\pi \frac{r+d}{r-d} = \frac{1+\lambda_{Cu}\Delta T}{1+\lambda_{Al}\Delta T}$$

$$2\pi\,(r+d)\,(1+\lambda_{Al}\Delta T) = (r-d)\,(1+\lambda_{Cu}\Delta T)$$

$$2\pi r\,(1+\lambda_{Al}\Delta T) + 2\pi d\,(1+\lambda_{Al}\Delta T) = r\,(1+\lambda_{Cu}\Delta T) - d\,(1+\lambda_{Cu}\Delta T)$$

Problema di: Calorimetria - $Q0041$

Testo *[Q0041]* [2 ⭐ 2 ⏳ 2a 📖]
Se fornisco $\Delta Q = 240\,kJ$ ad un cubo di rame di lato $L = 10\,cm$ e alla temperatura $T_i = 1300\,°C$, si scalderà fino a fondere? [$c_{s-rame} = 380\,\frac{J}{kgK}$; $\rho_{rame} = 8920\,\frac{kg}{m^3}$; $T_{fus-rame} = 1357,6\,°C$]

Spiegazione Dando calore al rame, esso si scalderà. Se il calore dato è maggiore di quello necessario per raggiungere la temperatura di fusione allora il rame fonderà.

Svolgimento La massa del rame è in questo caso

$$m = \rho \cdot L^3 = 8920\,\frac{kg}{m^3} \cdot 1000\,cm^3 = 8,92\,kg$$

Il calore necessario per scaldare il rame fino alla temperatura di fusione è

$$\Delta Q = c_s m \Delta T = 380\,\frac{J}{kgK} \cdot 8,92\,kg \cdot (57,6\,°C) = 195,2\,kJ$$

molto meno del calore a disposizione. Quindi il rame fonderà.

Problema di: Calorimetria - $Q0041a$

Testo *[Q0041a]* [2 2 2a]
Se fornisco $\Delta Q = 240\,kJ$ ad un cubo di rame di lato $L = 20\,cm$ e alla temperatura $T_i = 30\,°C$, si scalderà fino a fondere? [$c_{s-rame} = 380\,\frac{J}{kgK}$; $\rho_{rame} = 8920\,\frac{kg}{m^3}$; $T_{fus-rame} = 1357,6\,°C$]

Spiegazione Dando calore al rame, esso si scalderà. Se il calore dato è maggiore di quello necessario per raggiungere la temperatura di fusione allora il rame fonderà.

Svolgimento La massa del rame è in questo caso

$$m = \rho \cdot L^3 = 8920\,\frac{kg}{m^3} \cdot 8000\,cm^3 = 71,36\,kg$$

Il calore necessario per scaldare il rame fino alla temperatura di fusione è

$$\Delta Q = c_s m \Delta T = 380\,\frac{J}{kgK} \cdot 71,36\,kg \cdot (1327,6\,°C) = 36\,MJ$$

molto di più del calore a disposizione. Quindi il rame non fonderà.

Problema di: Leggi di calorimetria e leggi di conservazione - $LQ0001$

Testo *[LQ0001]* [3 3 2a]
Un corpo ferro di massa $m = 20\,kg$ si trova in una piccola piscina, fermo ed immerso nell'acqua, all'altezza dal fondo $h_i = 50\,cm$. Nella piscina ci sono $m_2 = 50\,kg$ di acqua. La piscina è termicamente isolata dal mondo esterno. Ad un certo punto l'oggetto comincia a cadere verso il fondo della piscina fino a fermarsi sul fondo. Di quanto si scalda l'acqua della piscina?

Spiegazione L'oggetto che cade perde energia potenziale gravitazionale. Parte dell'energia diventa energia potenziale gravitazionale dell'acqua che sale ad occupare il volume precedentemente occupato dal ferro; l'energia restante, essendo trasferita all'acqua sotto forma di calore, ne fa innalzare la temperatura.

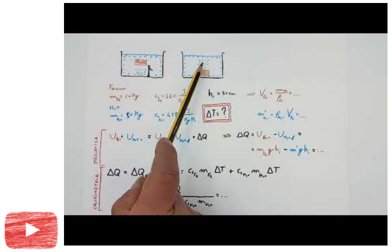


Fig. 3.12: *Guarda il video youtu.be/ABnNhU9ZXaQ*

Svolgimento Il volume dell'oggetto di ferro è

$$V_{Fe} = \frac{m}{\rho_{Fe}} = \frac{20\,kg}{7874\,\frac{kg}{m^3}} = 2,54 \cdot 10^{-3}\,m^3$$

L'oggetto è sceso verso il fondo, ed un eguale volume di acqua è salita dal fondo fino all'altezza $h = 50\,cm$. Le variazioni di energia potenziale gravitazionale e la conseguente produzione di calore sono

$$\Delta U_{Fe} = mg\Delta h = 20\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,5\,m = 98\,J$$

$$\Delta U_{H_2O} = mg\Delta h = \rho_{H_2O} V_{Fe} g \Delta h = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 2,54 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (-0,5\,m) = -12,45\,J$$

$$\Delta Q = \Delta U_{Fe} + \Delta U_{H_2O} = 85,55\,J$$

Di conseguenza l'aumento di temperatura dell'acqua, ammettendo che non ci siano dispersioni nell'ambiente circostante, e considerando che tale aumento avverrà anche nell'oggetto di ferro, sarà

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c_{s_{H_2O}} m_{H_2O} + c_{s_{Fe}} m_{Fe}} = \frac{85,55\,J}{4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 50\,kg + 440\,\frac{J}{kgK} \cdot 20\,kg} = 4 \cdot 10^{-4} K$$

Problema di: Leggi di calorimetria e leggi di conservazione - $LQ0002$

Testo *[LQ0002]* [2 2 2a]
Un corpo di ferro ha massa $m = 20\,kg$ e temperatura iniziale $T_i = 400\,K$. Esso striscia, fino a fermarsi, su di un piano orizzontale, con una velocità iniziale $V_i = 4\,\frac{m}{s}$. Ammettendo che tutto il calore prodotto sia utilizzato per scaldare il corpo, di quanto aumenta la sua temperatura?

Spiegazione Le forze di attrito trasformano l'energia cinetica dell'oggetto in calore. Il calore è trasferito all'oggetto che di conseguenza aumenta la sua temperatura. IL problema chiede di strascurare il calore trasferito al piano di appoggio edf all'aria.

Svolgimento La quantità di energia cinetica persa dall'oggetto è

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 = 10\,kg \cdot 16 \frac{m^2}{s^2} = -160\,J$$

Il calore in ingresso nell'oggetto è quindi

$$\Delta Q = -\Delta E_c = 160\,J$$

Di conseguenza l'aumento di temperatura del corpo di ferro, ammettendo che non ci siano dispersioni nell'ambiente circostante, sarà

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c_s m} = \frac{160\,J}{440\,\frac{J}{kgK} \cdots 20\,kg} = 1,82 \cdot 10^{-2} K$$

Problema di: Leggi di Conservazione e calorimetria- $LPQ0003$

Testo *[LPQ0003]* [4 4 3a]
Un proiettile di piombo di massa $m = 20\,g$ alla temperatura iniziale $T_{ip} = 200\,°C$ viene sparato alla velocità $V = 800\,\frac{m}{s}$ contro un blocco di legno di massa $M = 380\,g$ alla temperatura $T_{il} = 30\,°C$. Quale temperatura raggiungerà il blocco con il proiettile inserito? $\left[c_{s_{legno}} = 2000\,\frac{J}{kg \cdot K}\right]$

Spiegazione Il proiettile urta anelasticamente un blocco di legno trasferendogli dell'energia. Inoltre proiettile e legno si scambiano calore essendo a temperature differenti.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la velocità V_f del blocco dopo l'urto

$$mV = (m + M)\,V_f$$

$$V_f = \frac{m}{M+m}V = 40\,\frac{m}{s}$$

Il calore disperso a causa dell'urto anelastico risulta essere la differenza tra l'energia meccanica prima e dopo l'urto. Con la legge di conservazione dell'energia otteniamo

$$\Delta Q = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}(M+m)\,V_f^2$$

$$\Delta Q = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}V^2 = \frac{1}{2}mV^2 \cdot \left(\frac{M}{M+m}\right)$$

$$\Delta Q = 6080\,J$$

Dobbiamo adesso determinare la temperatura di equilibrio raggiunta. Il calore in ingresso nel proiettile sommato al calore in ingresso nel blocco di legno deve essere uguale al calore fornito dall'urto anelastico.

$$\Delta Q_p + \Delta Q_l = \Delta Q$$

$$c_{s_p}m\,(T_f - T_{ip}) + c_{s_l}M\,(T_f - T_{il}) = \Delta Q$$

da cui ricaviamo T_f

$$T_f = \frac{\Delta Q + c_{s_p}mT_{ip} + c_{s_l}MT_{il}}{c_{s_p}m + c_{s_l}M}$$

$$T_f = \frac{6080\,J + 130\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0,02\,kg \cdot 473\,K + 2000\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0,38\,kg \cdot 303\,K}{130\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0,02\,kg + 2000\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0,38\,kg}$$

$$T_f = 311,6\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0001$

Testo *[T0001]* [2 ★ 2 ⏳ 3a 📖]
Se un certo quantitativo di gas che si trova alla temperatura $T_1 = 380\,K$ compie una trasformazione isobara passando da un volume $V_1 = 10\,cm^3$ ad un volume $V_2 = 20\,cm^3$, quale temperatura ha raggiunto?

Spiegazione Questo esercizio parla di un certo quantitativo di gas, che si trova ad una temperatura $T_i = 380\,K$, all'interno di un certo contenitore di volume $V_i = 10\,cm^3$. Ad un certo punto il conteniore del gas aumenta il suo volume fino a raddoppiare e raggiunge il volume $V_f = 20\,cm^3$. Durante questa *trasformazione* per un qualche meccanismo, che adesso non ci interessa, la pressione del gas non cambia mai: il gas sta compiendo infatti una trasformazione *isobara* che vuol dire *a pressione costante*. Durante questa trasformazione in cui cambia il volume, cambia anche la temperatura del gas: quale temperatura avrà il gas alla fine della trasformazione?

Svolgimento La legge dei gas perfetti mi descrive lo stato del gas in un certo istante, per cui la posso applicare sia nel momento iniziale della trasformazione che in quello finale. Se lo faccio ottengo il seguente sistema:

$$\begin{cases} PV_f = NKT_f \\ PV_i = NKT_i \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema il modo più comodo è sicuramente quello di scrivere una terza equazione dividendo le due equazioni del sistema:

$$\frac{PV_f}{PV_i} = \frac{NKT_f}{NKT_i}$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

ed infine

$$T_f = \frac{V_f T_i}{V_i}$$

Inserendo a questo punto i dati del problema nella formula finale otteniamo:

$$T_f = \frac{20\,cm^3 \cdot 380\,K}{10\,cm^3} = 760\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0001a$

Testo *[T0001a]* [2 2 3a]
Durante una trasformazione isocora, un gas alla pressione iniziale $P_i = 25000\,Pa$ passa da una temperatura $T_i = 380\,K$ ad una temperatura $T_f = 450\,K$; quale pressione P_f ha raggiunto?

Spiegazione Abbiamo un gas che compie una trasformazione isocora durante la quale aumenta la temperatura. Sia per lo stato iniziale del gas che per quello finale vale la legge dei gas perfetti. Impostando il sistema risolviamo l'esercizio.

Svolgimento La legge dei gas perfetti mi descrive lo stato del gas in un certo istante, per cui la posso applicare sia nel momento iniziale della trasformazione che in quello finale. Se lo faccio ottengo il seguente sistema, nel quale, essendo una trasformazione isocora, non facciamo differenza tra volume iniziale e finale:

$$\begin{cases} P_f V = NKT_f \\ P_i V = NKT_i \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema il modo più comodo è sicuramente quello di scrivere una terza equazione dividendo le due equazioni del sistema:

$$\frac{P_f V}{P_i V} = \frac{NKT_f}{NKT_i}$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$\frac{P_f}{P_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

ed infine

$$P_f = \frac{P_i T_f}{T_i} = \frac{25000\,Pa \cdot 450\,K}{380\,K} = 29605\,Pa$$

Problema di: Termodinamica - $T0001b$

Testo *[T0001b]* [2 2 3a]
Durante una trasformazione isoterma, un gas alla pressione iniziale $P_i = 25000\,Pa$ passa da un volume $V_i = 10\,cm^3$ ad un volume $V_f = 20\,cm^3$; quale pressione P_f ha raggiunto?

Spiegazione Abbiamo un gas che compie una trasformazione isoterma durante la quale aumenta il volume. Sia per lo stato iniziale del gas che per quello finale vale la legge dei gas perfetti. Impostando il sistema risolviamo l'esercizio.

Svolgimento La legge dei gas perfetti mi descrive lo stato del gas in un certo istante, per cui la posso applicare sia nel momento iniziale della trasformazione che in quello finale. Se lo faccio ottengo il seguente sistema, nel quale, essendo una trasformazione isoterma, non facciamo differenza tra temperatura iniziale e finale:

$$\begin{cases} P_f V_f = NKT \\ P_i V_i = NKT \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema il modo più comodo è sicuramente quello di scrivere una terza equazione con il metodo di sostituzione:

$$P_f V_f = P_i V_i$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$P_f = \frac{P_i V_i}{V_f} = \frac{25000\,Pa \cdot 10\,cm^3}{20\,cm^3} = 12500\,Pa$$

Problema di: Termodinamica - $T0001$

Testo *[T0001c]* [2 2 3a]
Alla partenza di un viaggio, quando la temperatura è $T_i = 15°C$, le ruote di un'auto sono gonfiate alla pressione $P_i = 2\,atm$. Dopo molti kilometri le ruote si sono scaldate fino alla temperatura $T_f = 45°C$. Quale pressione hanno raggiunto?

Spiegazione Abbiamo un gas che compie una trasformazione isocora, in quanto il volume della gomma della guota non cambia, durante la quale aumenta la temperatura. Sia per lo stato iniziale del gas che per quello finale vale la legge dei gas perfetti. Impostando il sistema risolviamo l'esercizio.

Svolgimento La legge dei gas perfetti mi descrive lo stato del gas in un certo istante, per cui la posso applicare sia nel momento iniziale della trasformazione che in quello finale. Se lo faccio ottengo il seguente sistema, nel quale, essendo una trasformazione isocora, non facciamo differenza tra volume iniziale e finale:

$$\begin{cases} P_f V = NKT_f \\ P_i V = NKT_i \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema il modo più comodo è sicuramente quello di scrivere una terza equazione dividendo le due equazioni del sistema:

$$\frac{P_f V}{P_i V} = \frac{NKT_f}{NKT_i}$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$\frac{P_f}{P_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

ed infine

$$P_f = \frac{P_i T_f}{T_i} = \frac{2\,atm \cdot (273,15 + 45)\,K}{(273,15 + 15)\,K} = 2,2\,atm$$

Problema di: Termodinamica - $T0002$

Testo *[T0002]* [1 7 3a]

1. **Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione isobara**? X) dal suo interno; Y) dall'esterno; Z) dal lavoro che compie; W) la produce.
2. **In un gas, durante una trasformazione isocora, al diminuire della temperatura**: X) il volume aumenta; Y) il volume diminuisce; Z) il volume rimane invariato; W) il volume puó aumentare quanto diminuire.
3. **C'è scambio di calore durante una compressione adiabatica**? X) si; Y) no; Z) forse; W) a volte.
4. **Il gas cede calore durante una compressione isobara**? X) si; Y) no; Z) forse; W) a volte.
5. **Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione adiabatica**? X) dal suo interno; Y) dall'esterno; Z) dal lavoro che compie; W) la produce.
6. **Di un gas, durante una trasformazione adiabatica, cambia**: X) solo il volume; Y) solo la temperatura; Z) solo la pressione; W) Sia il volume che temperatura che pressione.
7. **In un gas, durante una trasformazione isoterma, al diminuire della pressione**: X) il volume aumenta; Y) il volume diminuisce; Z) il volume rimane invariato; W) il volume può aumentare quanto diminuire.
8. **In un gas, durante una trasformazione adiabatica, al diminuire della pressione**: X) il volume aumenta; Y) il volume diminuisce; Z) il voume rimane invariato; W) il volume può aumentare quanto diminuire.
9. **In un gas, durante una trasformazione isocora, al diminuire della temperatura**: X) il gas fa lavoro; Y) il riceve lavoro; Z) il gas diminuisce la sue energia interna; W) la press.

10. **In un gas, durante una trasformazione ciclica**: X) il volume aumenta; Y) il volume diminuisce; Z) il volume rimane invariato; W) il volume può aumentare e diminuire per ritornare al valore iniziale.
11. **Un ciclo di carnot è composto da**: X) due isoterme e due isocore; Y) due isocore e due adiabatiche; Z) due isoterme e due adiabatiche; W) quattro isoterme.
12. **Una trasformazione ciclica è una trasformazione in cui**: X) il gas si muove di moto circolare uniforme; Y) il gas non scambia calore con l'esterno; Z) gli stati iniziale e finale della trasformazione coincidono; W) Gli stati iniziale e finale della trasformazione cambiano ciclicamente.
13. **Il rendimeno di un qualunque ciclo termodinamico è dato dal**: X) lavoro fatto fratto calore assorbito; Y) lavoro fatto più calore assorbito; Z) lavoro fatto meno calore assorbito; W) solo lavoro fatto.
14. **In un gas, durante una trasformazione isobara, al diminuire della temperatura**: X) il volume aumenta; Y) il volume diminuisce; Z) il volume non varia; W) il volume sia aumenta che diminuire.

Spiegazione A tutte queste domande è possibile rispondere conoscendo pochi semplici concetti di termodinamica.

1. la legge fondamentale dei gas perfetti
$$PV = NKT$$
2. le quattro principali trasformazioni termodinamiche: isoterma, isocora, isobara ed adiabatica
3. la legge fondamentale della termodinamica
$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$
4. il legame tra variazione di volume e lavoro fatto: se il gas si espande fa lavoro verso l'esterno; se si comprime riceve lavoro dall'esterno
5. il legame tra temperatura ed energia interna: queste due variabili di stato sono direttamente correlate tra loro, se varia una, varia in proporzione anche l'altra.

Svolgimento

1. **Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione isobara**? *Y) dall'esterno*
   (a) Cominciamo con il constatare che il gas cede lavoro all'esterno in quanto si espande;
   (b) se osserviamo il grafico di un'espansione isobara, vediamo che la temperatura aumenta, e quindi aumenta anche l'energia interna;
   (c) se il gas cede lavoro ed aumenta la sua energia interna, l'unica soluzione è che riceva dell'energia dall'esterno sotto forma di calore.
2. **In un gas, durante una trasformazione isocora, al diminuire della temperatura**: *Z) il volume rimane invariato*
   (a) Le trasformazioni isocore sono quelle in cui il volume rimane invariato per definizione;
3. **C'è scambio di calore durante una compressione adiabatica**? *Y) no*
   (a) Le trasformazioni adiabatiche sono quelle in cui non c'è scambio di calore per definizione;
4. **Il gas cede calore durante una compressione isobara**? *X) si*
   (a) In una compressione il gas riceve lavoro;
   (b) in una compressione isobara, consultando il grafico, il gas diminuisce la sua temperatura e quindi la sua energia interna;
   (c) se il gas riceve lavoro e diminuisce la sua energia interna, l'unica possibilità è che ceda calore all'esterno
5. **Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione adiabatica**? *X) dal suo interno*
   (a) In una trasformazione adiabatica no c'è scabio di calore, quindi per dare lavoro all'esterno durante l'espansione, quell'energia può essere presa solo dall'energia interna con conseguente diminuzione della temperatura.

6. **Di un gas, durante una trasformazione adiabatica, cambia**: *W) Sia il volume che temperatura che pressione*

    (a) Se anche una sola delle tre variabili indicate dovesse rimanere costante, la trasformazione non si chiamerebbe adiabatica ma isocora, oppure isoterma, oppure isobara.

7. **In un gas, durante una trasformazione isoterma, al diminuire della pressione**: *X) il volume aumenta*

    (a) Dalla legge dei gas, se la temperatura non cambia, pressione e volume sono inversamente proporzionali.

8. **In un gas, durante una trasformazione adiabatica, al diminuire della pressione**: *X) il volume aumenta*

    (a) il grafico di una trasformazione adiabatica mostra in modo semplice quello che succede. La curva adiabatica è simile a quella isoterma, ma più ripida.

9. **In un gas, durante una trasformazione isocora, al diminuire della temperatura**: *Z) il gas diminuisce la sue energia interna;*

    (a) Il fatto che la trasformazione sia isocora è irrilevante: se diminuisce la temperatura di un gas vuol dire che diminuisce la sua energia interna.

10. **In un gas, durante una trasformazione ciclica**: *W) il volume può aumentare e diminuire per ritornare al valore iniziale*

    (a) Una trasformazione ciclica è caratterizzata dal fatto che le variabili di stato variano, ma, indipendentemente dalle loro variazioni, alla fine della trasformazione assumono nuovamente i valori iniziali.

11. **Un ciclo di carnot è composto da**: *Z) due isoterme e due adiabatiche*

    (a) Qui non c'è nulla da capire: si chiama ciclo di Carnot quella trasformazione ciclica formata da due isoterme e due adiabatiche.

12. **Una trasformazione ciclica è una trasformazione in cui**: *Z) gli stati iniziale e finale della trasformazione coincidono*

    (a) In questa domanda altro non si chiede se non la definizione di trasformazione ciclica.

13. **Il rendimeno di un qualunque ciclo termodinamico è dato dal**: *X) lavoro fatto fratto calore assorbito*

    (a) Il rendimento di un ciclo rappresenta la percentuale di calore assorbito che viene trasformata in lavoro; di qui la formula indicata nella risposta.

14. **In un gas, durante una trasformazione isobara, al diminuire della temperatura**: *Y) il volume diminuisce*

    (a) Se osserviamo il grafico, le trasformazioni isobare sono segmenti orizzontali. Nel caso di diminuzione della temperatura, il punto che rappresenta lo stato del gas deve spostarsi verso sinistra, indicando di conseguenza una diminuzione del volume.

15. **Di quanto varia una variabile di stato di un gas durante una trasformazione**? *W) Dipende dagli stati iniziale e finale della trasformazione*

    (a) Le variabili di stato sono definite tali in quanto la loro variazione dipende dagli stati iniziali e finali della trasformazione senza che sia importante il tipo di trasformazione per passare da uno stato all'altro.

16. **Di quanto varia una variabile non di stato di un gas durante una trasformazione**? *X) Dipende dalla trasformazione che subisce il gas*

    (a) Le variabili non di stato, per definizione di variabile di stato, dipendono dalla trasformazione per passare da uno stato all'altro e non dipendono unicamente dai due stati.

17. **In un gas, durante una trasformazione isobara, al diminuire della temperatura**: *Y) il calore esce*

    (a) Al diminuire della temperatura l'energia interna di un gas diminuisce

(b) In una isobara, al diminuire della temperatura, diminuisce il volume del gas che, quindi, riceve lavoro.

(c) Se il gas riceve energia sotto forma di lavoro, e contemporaneamente ha meno energia interna, l'unica spiegazione è che sia uscita dal gas dell'energia sotto forma di calore.

Problema di: Termodinamica - $T0003$

Testo *[T0003]* [1 6 3a]

1. **Il rendimeno di un qualunque ciclo termodinamico è**: X) minore o uguale a 1; Y) maggiore o uguale a 1; Z) uguale a 1; W) nessuna delle precedenti.
2. **La legge dei gas perfetti**: X) non contiene il volume del gas; Y) non contiene la temperatura del gas; Z) non contiene l'energia interna del gas; W) non contiene la pressione del gas.
3. **Di un gas, durante una trasformazione isocora, non cambia**: X) il volume; Y) la temperatura; Z) la pressione; W) l'energia interna.
4. **Di un gas, durante una trasformazione isoterma, non cambia**: X) la temperatura; Y) il volume; Z) la pressione; W) l'energia interna.
5. **Di un gas, durante una trasformazione isobara, non cambia**: X) il volume; Y) la temperatura; Z) la pressione; W) l'energia interna.
6. **Il rendimeno di un ciclo di Carnot**: X) è sempre maggiore di 1; Y) dipende solo dalla temperatura finale del gas; Z) dipende dalle temperature a cui viene scambiato il calore; W) dipende solo dalla temperatura iniziale del gas.
7. **Il calore scambiato ad alta temperatura, rispetto a quello scambiato a bassa temperatura è**: X) più pregiato; Y) meno pregiato; Z) egualmente pregiato; W) dipende dai casi.
8. **Per aumentare la tempratura di un gas è sufficiente**: X) comprimerlo; Y) farlo espandere; Z) aumentarne la pressione; W) aumentarne l'energia interna.
9. **Per aumentare l'energia interna di un gas è sufficiente**: X) comprimerlo; Y) fargli compiere una trasformazione isocora; Z) farlo espandere; W) fargli compiere una espansione isobara.
10. **Un gas compie sicuramente del lavoro se**: X) viene compresso; Y) si espande; Z) si scalda; W) nessuna delle precedenti.

11. **C'è scambio di calore durante una compressione isoterma**? X) si; Y) no; Z) forse; W) a volte.

Spiegazione A tutte queste domande è possibile rispondere conoscendo pochi semplici concetti di termodinamica.

1. la legge fondamentale dei gas perfetti

$$PV = NKT$$

2. le quattro principali trasformazioni termodinamiche: isoterma, isocora, isobara ed adiabatica
3. la legge fondamentale della termodinamica

$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$

4. il legame tra variazione di volume e lavoro fatto: se il gas si espande fa lavoro verso l'esterno; se si comprime riceve lavoro dall'esterno
5. il legame tra temperatura ed energia interna: queste due variabili di stato sono direttamente correlate tra loro, se varia una, varia in proporzione anche l'altra.

Svolgimento

1. **Il rendimeno di un qualunque ciclo termodinamico è**: *W) nessuna delle precedenti: minore di 1*
   (a) Questo viene affermato nella seconda legge della termodinamica.
2. **La legge dei gas perfetti**: *Z) non contiene l'energia interna del gas*
   (a) Basta leggere la formula della legge dei gas perfetti $PV = NKT$
3. **Di un gas, durante una trasformazione isocora, non cambia**: *X) il volume*
   (a) Questa è la definizione di trasformazione isocora
4. **Di un gas, durante una trasformazione isoterma, non cambia**: *X) la temperatura*
   (a) Questa è la definizione di trasformazione isoterma
5. **Di un gas, durante una trasformazione isobara, non cambia**: *Z) la pressione*
   (a) Questa è la definizione di trasformazione isobara
6. **Il rendimeno di un ciclo di Carnot**: *Z) dipende dalle temperature a cui viene scambiato il calore*
   (a) Oltre ad essere un principio valido in linea generale, basta guardare la formula del rendimento del ciclo di Carnot: $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{bassa}}{T_{alta}}$
7. **Il calore scambiato ad alta temperatura, rispetto a quello scambiato a bassa temperatura è**: *X) più pregiato;*
   (a) Con il calore scambiato ad alta temperatura è possibile ottenere cicli con rendimenti maggiori.
8. **Per aumentare la tempratura di un gas è sufficiente**: *W) aumentarne l'energia interna*
   (a) Energia interna di un gas e temperatura sono strettamente legati insieme, in particolare sono tra loro direttamente proporzionali
9. **Per aumentare l'energia interna di un gas è sufficiente**: *W) fargli compiere una espansione isobara*
   (a) Se un gas compie un'espansione isobara, osservando il grafico o la legge dei gas perfetti, si nota che la temperatura aumenta e quindi aumenta l'energia interna.
10. **Un gas compie sicuramente del lavoro se**: *Y) si espande*
    (a) il lavoro prodotto da un gas è sempre legato alla variazione di volume di quel gas. Nel caso di espansione il gas cede sempre lavoro all'esterno

11. **C'è scambio di calore durante una compressione isoterma**? *X) si*

    (a) In una compressione il gas riceve lavoro, ma visto che l'energia interna non cambia durante un'isoterma, allora quell'energia in ingresso deve immediatamente uscire sotto forma di calore.

Problema di: Termodinamica - $T0004$

Testo *[T0004]* [1 18 3a]

1. Da quale variabile di stato dipende l'energia interna di un gas?
2. In quali modi posso fornire energia ad un gas?
3. Come varia l'energia interna di un gas durante una trasformazione isoterma? Perchè?
4. Durante una espansione il gas compie o riceve lavoro? e durante una compressione?
5. Quanto calore scambia un gas durante una trasformazione adiabatica?
6. Quando un gas fa lavoro verso l'esterno?
7. Quando un gas riceve del lavoro dall'esterno?
8. Disegna un ciclo di Carnot, indicandone le trasformazioni e i flussi di energia durante ogni trasformazione.
9. C'è scambio di calore durante una espansione isoterma? Quel calore entra nel gas o esce?
10. Come cambia la temperatura di un gas durante una compressione adiabatica? e durante un'espansione adiabatica?
11. Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione adiabatica?
12. Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione isoterma?
13. In una trasf. isocora: $\delta L = ?\Delta U = ?$ Se il gas cede calore, da dove prende quell'energia? Che conseguenza ha questo sulla temperatura?

14. In una trasf. isoterma: $\Delta U = ? \delta L = ?$ Da dove viene presa l'energia per compiere lavoro?
15. In una trasf. adiabatica: $\delta Q = ? \Delta U = ?$ Da dove viene presa l'energia per compiere lavoro?
16. Cos'è il rendimento di un ciclo? Quanto vale per il ciclo di Carnot? Disegna il diagramma che descrive il flusso di calore da una sorgente ad alta temperatura ad una a bassa temperatura durante un ciclo termodinamico. Modifica quel diagramma per descrivere un ciclo frigorifero.
17. Il calore scambiato ad alta temperatura è più o meno pregiato di quello scambiato a bassa temperatura? Perchè?
18. Cosa rappresenta la superficie dell'area delimitata da una trasformazione ciclica in un diagramma Pressione-Volume?

Spiegazione A tutte queste domande è possibile rispondere conoscendo pochi semplici concetti di termodinamica.

1. la legge fondamentale dei gas perfetti
$$PV = NKT$$
2. le quattro principali trasformazioni termodinamiche: isoterma, isocora, isobara ed adiabatica
3. la legge fondamentale della termodinamica
$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$
4. il legame tra variazione di volume e lavoro fatto: se il gas si espande fa lavoro verso l'esterno; se si comprime riceve lavoro dall'esterno
5. il legame tra temperatura ed energia interna: queste due variabili di stato sono direttamente correlate tra loro, se varia una, varia in proporzione anche l'altra.

Svolgimento

1. Da quale variabile di stato dipende l'energia interna di un gas?
   (a) L'energia interna dipende dalla temperatura. La temperatura di un gas indica infatti la velocità delle molecole del gas e di conseguenza la loro energia cinetica, cioè l'energia interna del gas.
2. In quali modi posso fornire energia ad un gas?
   (a) Si può fornire energia ad un gas o tramite uno scambio di calore o tramite uno scambio di lavoro, come indicato dalla legge fondamentale della termodinamica $\Delta U = \delta Q - \delta L$
3. Come varia l'energia interna di un gas durante una trasformazione isoterma? Perchè?
   (a) in una trasformazione isoterma la temperatura non cambia e quindi non cambia neanche l'energia interna.
4. Durante una espansione il gas compie o riceve lavoro? e durante una compressione?
   (a) Durante una espansione il gas compie lavoro; durante una compressione lo riceve.
5. Quanto calore scambia un gas durante una trasformazione adiabatica?
   (a) Zero, perché si chiama adiabatica quella trasformazione nella quale non c'è scambio di calore con l'esterno
6. Quando un gas fa lavoro verso l'esterno?
   (a) Quando si espande
7. Quando un gas riceve del lavoro dall'esterno?
   (a) Quando si comprime

8. Disegna un ciclo di Carnot, indicandone le trasformazioni e i flussi di energia durante ogni trasformazione.

   (a) Dovete disegnare una espansione isoterma (esce lavoro ed entra calore), successivamente un'espansione adiabatica (esce lavoro), successivamente una compressione isoterma (entra lavoro ed esce calore), ed infine una compressione adiabatica (entra lavoro)

9. C'è scambio di calore durante una espansione isoterma? Quel calore entra nel gas o esce?

   (a) Si. In una trasformazione isoterma non cambia l'energia interna del gas, quindi visto che nell'espansione esce del lavoro, quell'energia deve essere presa dal calore in ingresso.

10. Come cambia la temperatura di un gas durante una compressione adiabatica? e durante un'espansione adiabatica?

    (a) In una compressione del lavoro entra; visto che la trasformazione è adiabatica e non scambia calore, quel lavoro diventa energia interna del gas e quindi la temperatura aumenta.

11. Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione adiabatica?

    (a) Visto che la trasformazione è adiabatica ed il gas non scambia calore, se cede lavoro prende quell'energia dall'energia interna.

12. Da dove prende energia un gas che compie lavoro durante una espansione isoterma?

    (a) In un'espanzione isoterma l'energia interna del gas non cambia, quindi se il gas cede lavoro, prende quell'energia dall'esterno sotto forma di calore.

13. In una trasf. isocora: $\delta L = ?\Delta U = ?$ Se il gas cede calore, da dove prende quell'energia? Che conseguenza ha questo sulla temperatura?

    (a) In una trasformazione isocora il volume non cambia, quindi $\Delta L = 0$. Dalla legge fondamentale della termodinamica otteniamo che $\Delta U = \delta Q$. Quindi se il gas cede calore lo prende dall'energia interna e quindi la temperatura diminuisce

14. In una trasf. isoterma: $\Delta U = ?\delta L = ?$ Da dove viene presa l'energia per compiere lavoro?

    (a) In una trasformazione isoterma la temperatura non cambia, quindi $\Delta U = 0$. Dalla legge fondamentale della termodinamica otteniamo che $\delta Q = -\delta L$. Quindi se il gas cede lavoro prende quell'energia dal calore in ingresso

15. In una trasf. adiabatica: $\delta Q = ?\Delta U = ?$ Da dove viene presa l'energia per compiere lavoro?

    (a) Per definizione di adiabatica $\delta Q = 0$; quindi $\Delta U = -\delta L$. l'energia per compiere lavoro viene quindi presa dall'energia interna.

16. Cos'è il rendimento di un ciclo? Quanto vale per il ciclo di Carnot? Disegna il diagramma che descrive il flusso di calore da una sorgente ad alta temperatura ad una a bassa temperatura durante un ciclo termodinamico. Modifica quel diagramma per descrivere un ciclo frigorifero.

    (a) Il rendimento di un ciclo è il rapporto tra il lavoro fatto dal ciclo ed il calore da esso assorbito: $\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}}$

    (b) per il ciclo di Carnot la formula precedente, calcolata su due isoterme e due adiabatiche, diventa $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{bassa}}{T_{alta}}$

    (c) Dalla sorgente ad alta temperatura viene assorbito del calore; una parte di questo viene trasformato in lavoro, la parte restante data ad un pozzo di calore a bassa temperatura.

    (d) Nel ciclo frigorifero, l'utilizzo di una piccola quantità di lavoro permette di assorbire del calore a bassa temperatura e metterlo, insieme al lavoro, in un luogo ad alta temperatura.

17. Il calore scambiato ad alta temperatura è più o meno pregiato di quello scambiato a bassa temperatura? Perchè?

    (a) Il calore scambiato ad alta temperatura è più pregiato in quanto con esso si riescono ad ottenere rendimenti maggiori

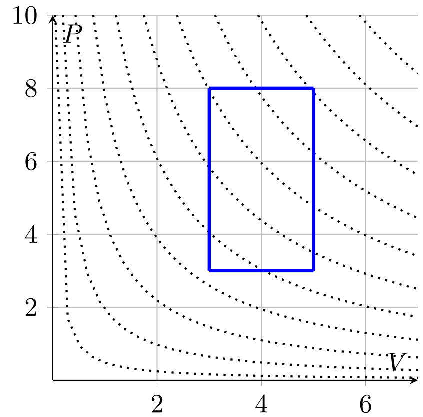
18. Cosa rappresenta la superficie dell'area delimitata da una trasformazione ciclica in un diagramma Pressione-Volume?

    (a) Come verificabile anche in base all'unità di misura dell'area in un simile grafico, l'area di un ciclo termodinamico indica il lavoro fatto dal ciclo.

Problema di: Termodinamica - $T0005$

Testo *[T0005]* [2 2 3a]
Un gas compie un ciclo termodinamico formato da due isobare e due isocore. Il ciclo comincia con un'espansione isobara che parte dallo stato $A(3\,m^3; 8\,atm)$; successivamente abbiamo un raffreddamento isocoro; la compressione isobara inizia invece dallo stato $B(5\,m^3; 3\,atm)$; infine un riscaldamento isocoro. Quanto lavoro ha fatto il ciclo?

Spiegazione Dopo aver disegnato il ciclo termodinamico nel piano PV dobbiamo calcolare il lavoro fatto in ognuna delle quattro trasformazioni del ciclo e calcolare infine il lavoro totale.



Svolgimento Il grafico del ciclo termodinamico è mostrato in figura. Il lavoro svolto nelle due isocore è nullo. Nell'espansione isobara il lavoro vale

$$\delta L = P{\cdot}\Delta V = 8\,atm{\cdot}2\,m^3 = 1600000\,J$$

Nella compressione isobara il lavoro vale

$$\delta L = P \cdot \Delta V = 3\,atm \cdot (-2\,m^3) = -600000\,J$$

Il lavoro fatto dal ciclo vale quindi

$$\delta L = 1000000\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0006$

Testo *[T0006]* [1 3 3a]
Un ciclo termodinamico assorbe calore δQ_{ass} ad alta temperatura, cede calore δQ_{ced} a bassa temperatura, e cede lavoro δL. Il tutto è fatto con un certo rendimento η. Esegui i seguenti esercizi:

1. Sapendo che $\delta Q_{ass} = 5000\,J$ e che $\delta Q_{ced} = 3500\,J$, quanto valgono δL ed η?
2. Sapendo che $\delta Q_{ass} = 5000\,J$ e che $\delta L = 2000\,J$, quanto valgono δQ_{ced} ed η?
3. Sapendo che $\delta L = 5000\,J$ e che $\eta = 0,4$, quanto valgono δQ_{ass} e δQ_{ced}?

Spiegazione Un ciclo termodinamico serve a trasformare del calore in lavoro. soltanto due formule descrivono questo processo:

$$\delta Q_{ass} = \delta Q_{ced} + \delta L \qquad \eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}}$$

In tutte le domande del testo vengono forniti due dati; di conseguenza con le due equazioni a disposizione possiamo trovare gli altri due.

Svolgimento

1. $\delta L = \delta Q_{ass} - \delta Q_{ced} = 1500\,J$ $\qquad \eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = \frac{1500\,J}{5000\,J} = 0,3 = 30\%$
2. $\delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L = 3000\,J$ $\qquad \eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = \frac{2000\,J}{5000\,J} = 0,4 = 40\%$
3. $\delta Q_{ass} = \frac{\delta L}{\eta} = 12500\,J$ $\qquad \Delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L = 7500\,J$

Problema di: Termodinamica - $T0006a$

Testo *[T0006a]* [1 3 3a]
Un ciclo termodinamico assorbe calore δQ_{ass} ad alta temperatura, cede calore δQ_{ced} a bassa temperatura, e cede lavoro δL. Il tutto è fatto con un certo rendimento η. Esegui i seguenti esercizi:

1. Sapendo che $\delta Q_{ass} = 5000\,J$ e che $\eta = 0,2$, quanto valgono δL e δQ_{ced}?
2. Sapendo che $\delta L = 4000\,J$ e che $\delta Q_{ced} = 6000\,J$, quanto valgono δQ_{ass} ed η?
3. Sapendo che $\delta Q_{ced} = 8000\,J$ e che $\eta = 0,2$, quanto valgono δQ_{ass} e δL?

Spiegazione Un ciclo termodinamico serve a trasformare del calore in lavoro. soltanto due formule descrivono questo processo:

$$\delta Q_{ass} = \delta Q_{ced} + \delta L \qquad \eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}}$$

In tutte le domande del testo vengono forniti due dati; di conseguenza con le due equazioni a disposizione possiamo trovare gli altri due.

Svolgimento

1. $\delta L = \eta \delta Q_{ass} = 0,2 \cdot 5000\,J = 1000\,J$ $\qquad \delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L = 4000\,J$
2. $\delta Q_{ass} = \delta Q_{ced} + \delta L = 10000\,J$ $\qquad \eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 0,4 = 40\%$
3. $\delta Q_{ass} = \frac{\delta Q_{ced}}{1-\eta} = 10000\,J$ $\qquad \delta L = \eta \delta Q_{ass} = 2000\,J$

Problema di: Termodinamica - $T0009ban$ - Autore: Andrea de Capoa

Testo *[T0009ban]* [1 5 3a]
Esercizi *banali*:

1. Quanto lavoro fa un gas a pressione $P = 5000\,Pa$ in una espansione isobara da un volume $V_i = 50\,m^3$ ad un volume $V_f = 66\,m^3$? *[$L = 80\,kJ$]*
2. Calcola il rendimento di una macchina termica che funziona seguendo un ciclo di Carnot tra una temperatura $T_1 = 500°K$ ed una inferiore $T_2 = 300°K$. *[$\eta = 20\%$]*
3. Un gas produce un lavoro $\delta L = 500\,J$ assorbendo una quantità di calore $\delta Q = 300\,J$. Di quanto è variata la sua energia interna? *[$\Delta U = -200\,J$]*

Spiegazione In questo esercizio ho raccolto tutte quelle domande *banali* che possono essere fatte su questo argomento. Per *banale* si intende un problema nel quale la domanda consiste semplicemente nel fornire dei dati da inserire in una formula. Non è quindi richiesta alcuna particolare capacità di ragionamento, ne particolari doti matematiche. Questo esercizio serve unicamente ad aquisire dimestichezza con l'esecuzione dei conti numerici con le unità di misura.

Svolgimento

1. La formula per il lavoro di una trasformazione isobara è
$$\delta L = P \cdot \Delta V = 5000\,Pa \cdot 16\,m^3 = 80000\,J$$
2. La formula del rendimento del ciclo di Carnot è
$$\eta = 1 - \frac{T_{bassa}}{T_{alta}} = 1 - \frac{300\,K}{500\,K} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$
3. in una trasformazione termodinamica, la variazione di energia interna dipende dal calore che entra e dal lavoro che esce.
$$\Delta U = \delta Q - \delta L = -200\,J$$
La temperatura del gas è quindi diminuita.

Problema di: Termodinamica - $T0010$

Testo *[T0010]* [1 1 3a]
Un ciclo di Carnot assorbe $\delta Q_{ass} = 1000\,J$ alla temperatura $T_1 = 1000\,K$ e cede calore alla temperatura $T_2 = 400\,K$. Quanto lavoro viene prodotto?

Spiegazione Un ciclo termodinamico assorbe calore per trasformarne una parte in lavoro. In un ciclo di Carnot il rendimento del ciclo, cioè la percentuale di calore trasformata in lavoro, dipende unicamente dalle temperature a cui viene scambiato il calore.

Svolgimento Il rendimento del ciclo di Carnot è:

$$\eta = 1 - \frac{T_{bassa}}{T_{alta}} = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$$

Il lavoro prodotto sarà quindi

$$\delta L = \eta \delta Q_{ass} = 0,6 \cdot 1000\,J = 600\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0011$

Testo *[T0011]* [1 4 3a]
In una trasformazione termodinamica le variabili coinvolte sono sei: la variazione di pressione, la variazione di volume, la variazione di temperatura, la variazione di energia interna, il lavoro scambiato, il calore scambiato. Determina, motivando la risposta, il loro segno nei tre casi seguenti:

1. Riscaldamento isobaro
2. Riscaldamento isocoro
3. Riscaldamento adiabatico

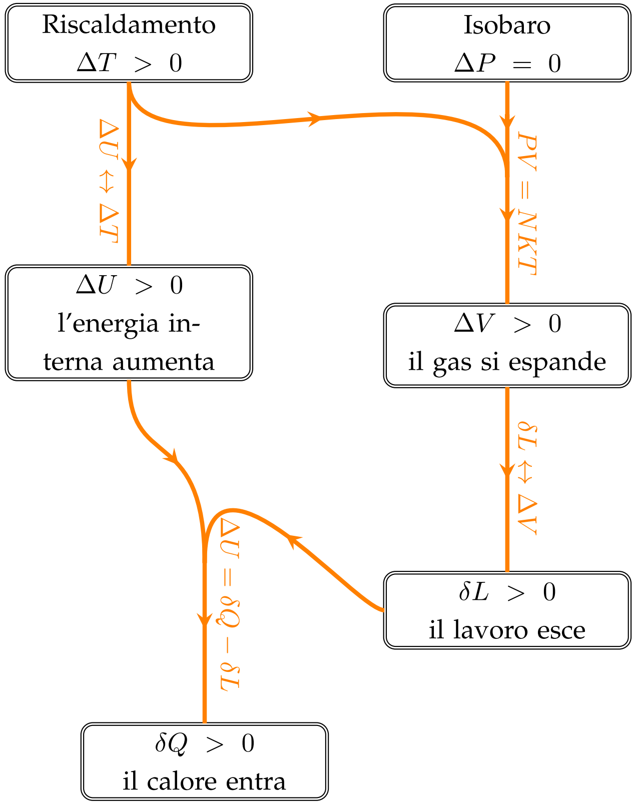
Spiegazione In questo esercizio ci vengono fornite due informazioni sull'andamento di due variabili del gas durante una trasformazione; dobbiamo dedurre l'andamento di tutte le altre variabili. Per fare questo utilizziamo soltanto quattro informazioni:

1. La legge dei gas perfetti: $PV = NKT$
2. Il primo principio della termodinamica $\Delta U = \delta Q - \delta L$
3. La legge che lega energia interna e temperatura: esse sono infatti direttamente proporzionale $\Delta U \leftrightarrow \Delta T$
4. Il concetto per cui un gas si espande se e solo se compie lavoro verso l'esterno $\delta L \leftrightarrow \Delta V$

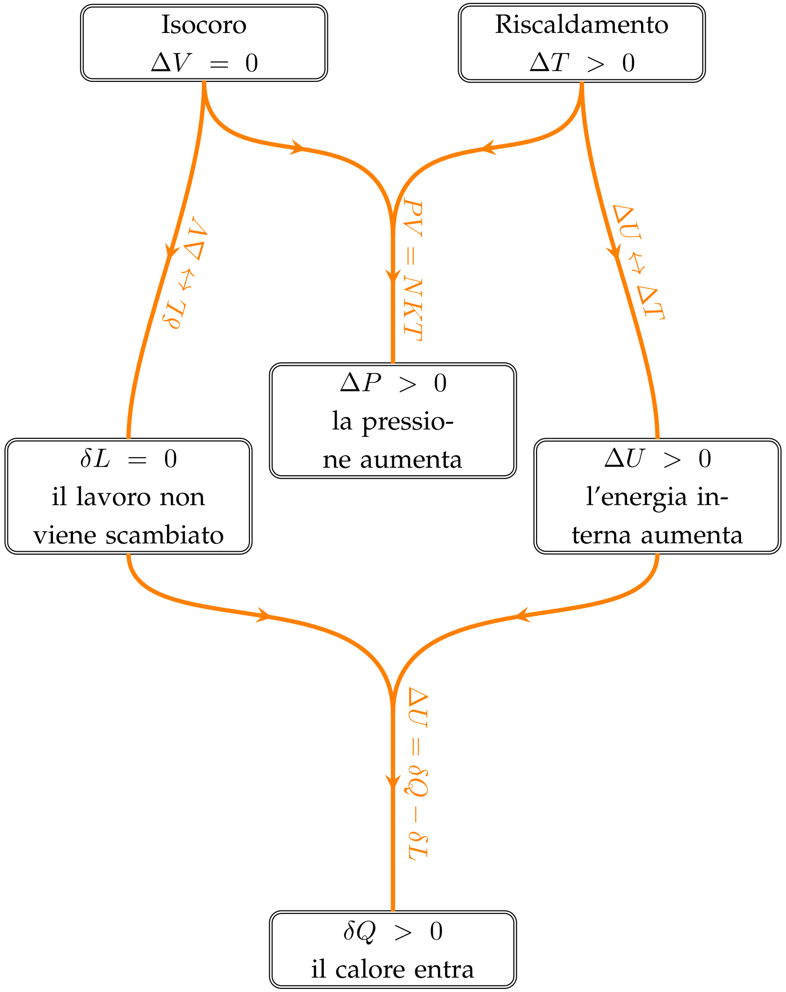
La soluzione dell'esercizio la presentiamo sotto forma di schema.

Svolgimento

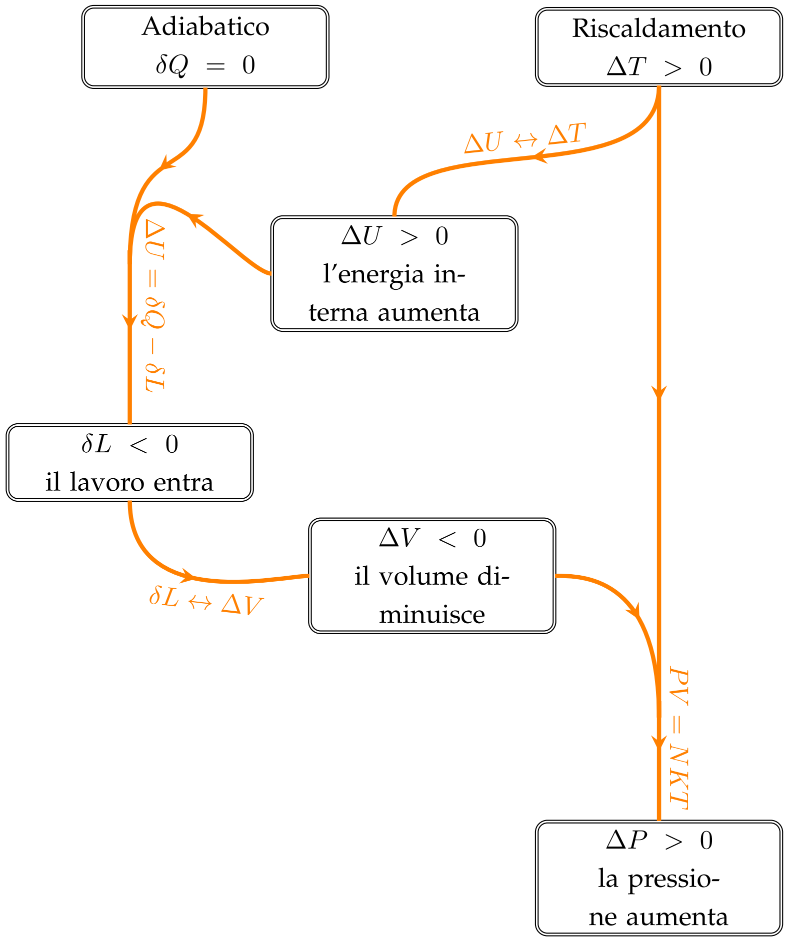
Riscaldamento isobaro



Riscaldamento isocoro



Riscaldamento adiabatico



Problema di: Termodinamica - $T0011a$

Testo *[T0011a]* [1 4 2a]
In una trasformazione termodinamica le variabili coinvolte sono sei: la variazione di pressione, la variazione di volume, la variazione di temperatura, la variazione di energia interna, il lavoro scambiato, il calore scambiato. Determina, motivando la risposta, il loro segno nei tre casi seguenti:

1. Espansione isobara
2. Espansione isoterma
3. Espansione adiabatica

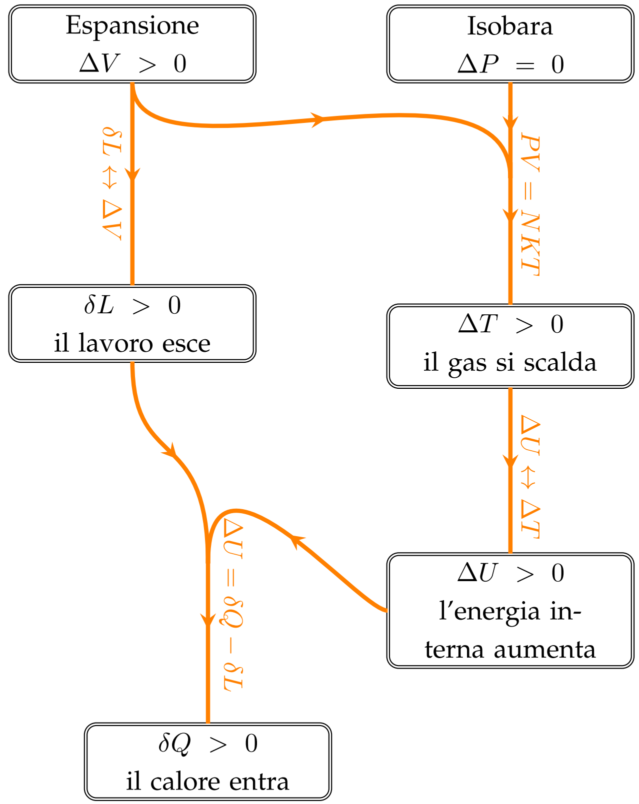
Spiegazione In questo esercizio ci vengono fornite due informazioni sull'andamento di due variabili del gas durante una trasformazione; dobbiamo dedurre l'andamento di tutte le altre variabili. Per fare questo utilizziamo soltanto quattro informazioni:

1. La legge dei gas perfetti: $PV = NKT$
2. Il primo principio della termodinamica $\Delta U = \delta Q - \delta L$
3. La legge che lega energia interna e temperatura: esse sono infatti direttamente proporzionale $\Delta U \leftrightarrow \Delta T$
4. Il concetto per cui un gas si espande se e solo se compie lavoro verso l'esterno $\delta L \leftrightarrow \Delta V$

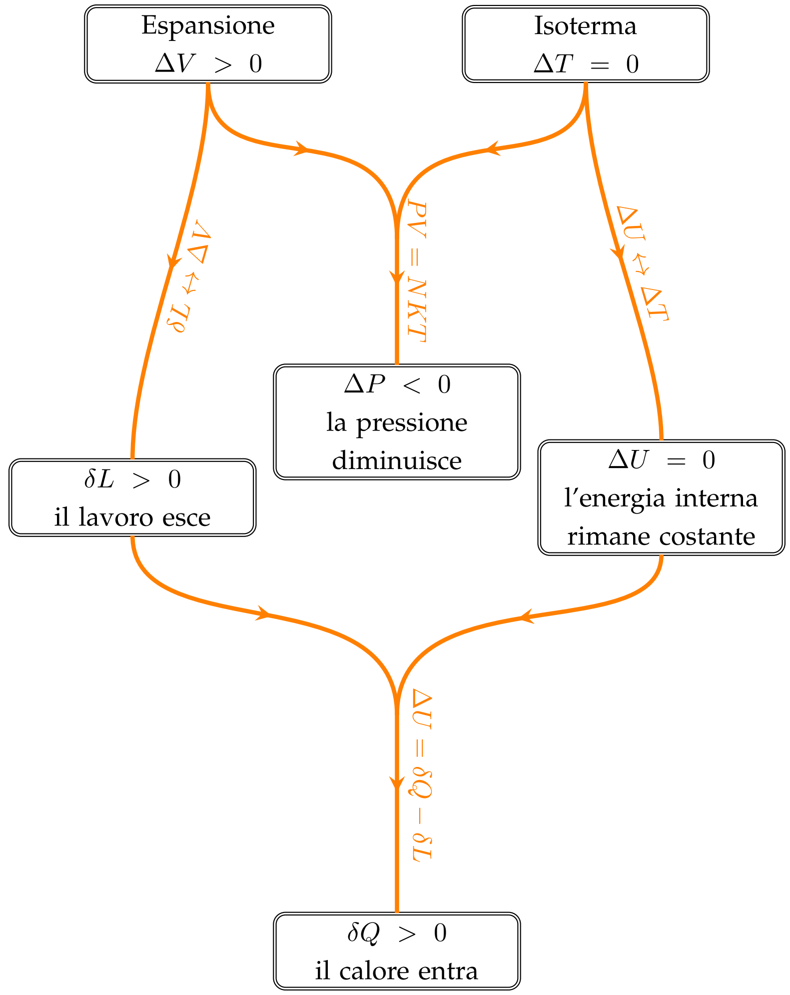
La soluzione dell'esercizio la presentiamo sotto forma di schema.

Svolgimento

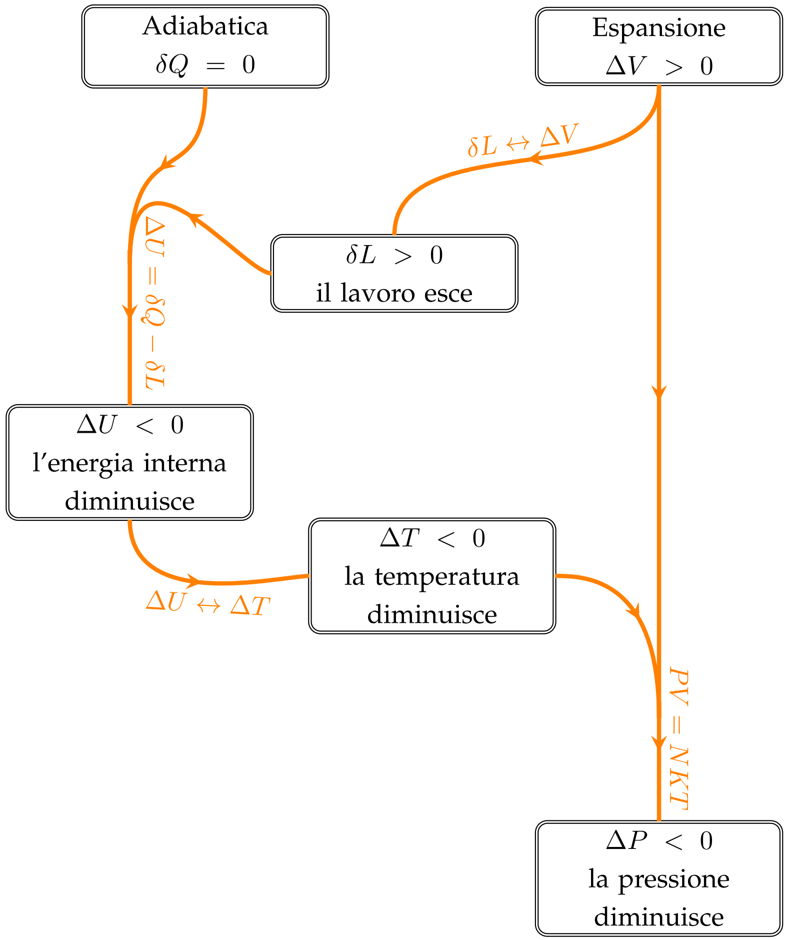
Espansione isobara



Espansione isoterma



Espansione adiabatica



Problema di: Termodinamica - $T0011b$

Testo *[T0011]* [1 4 3a]
In una trasformazione termodinamica le variabili coinvolte sono sei: la variazione di pressione, la variazione di volume, la variazione di temperatura, la variazione di energia interna, il lavoro scambiato, il calore scambiato. Determina, motivando la risposta, il loro segno nei tre casi seguenti:

1. Raffreddamento isobaro
2. Raffreddamento isocoro
3. Raffreddamento adiabatico

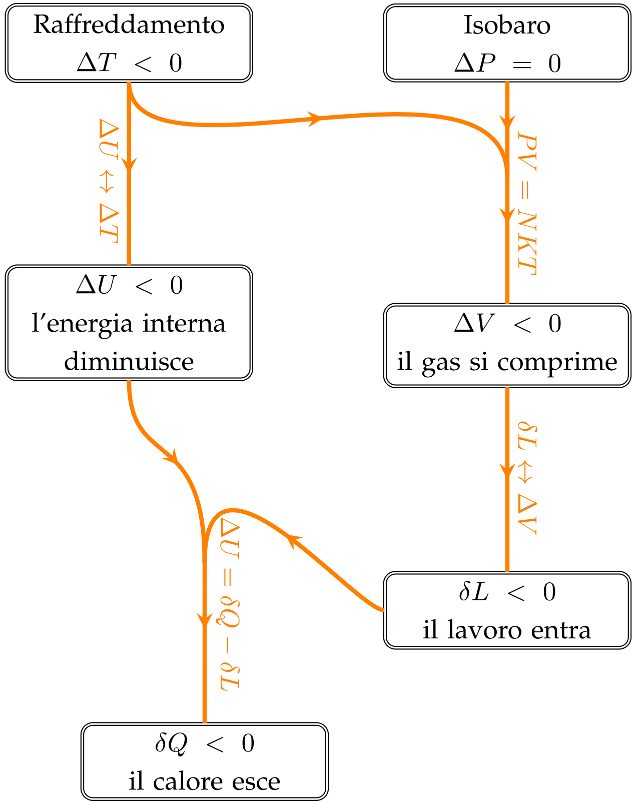
Spiegazione In questo esercizio ci vengono fornite due informazioni sull'andamento di due variabili del gas durante una trasformazione; dobbiamo dedurre l'andamento di tutte le altre variabili. Per fare questo utilizziamo soltanto quattro informazioni:

1. La legge dei gas perfetti: $PV = NKT$
2. Il primo principio della termodinamica $\Delta U = \delta Q - \delta L$
3. La legge che lega energia interna e temperatura: esse sono infatti direttamente proporzionale $\Delta U \leftrightarrow \Delta T$
4. Il concetto per cui un gas si espande se e solo se compie lavoro verso l'esterno $\delta L \leftrightarrow \Delta V$

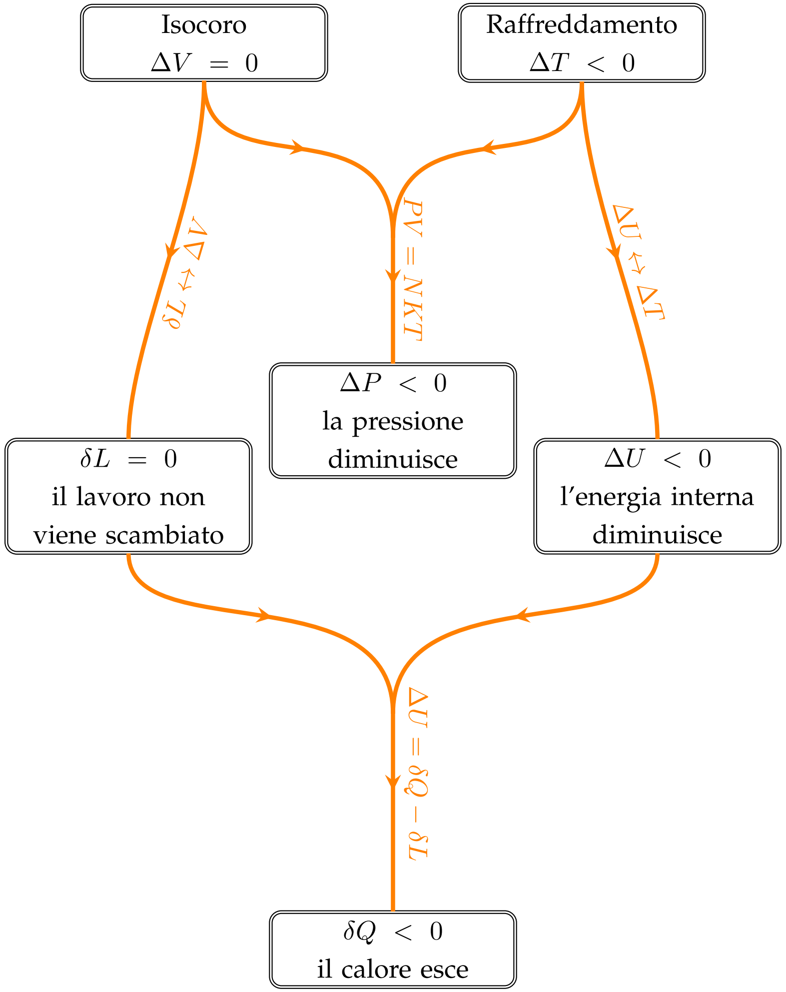
La soluzione dell'esercizio la presentiamo sotto forma di schema.

Svolgimento

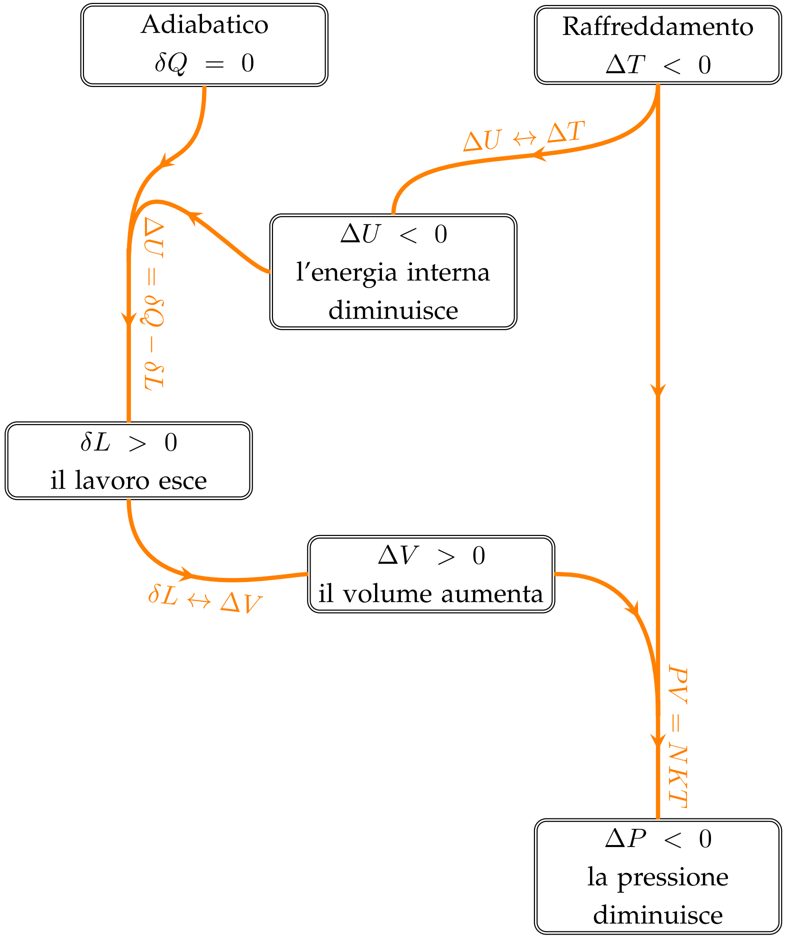
Raffreddamento isobaro



Raffreddamento isocoro



Raffreddamento adiabatico



Problema di: Termodinamica - $T0011c$

Testo *[T0011c]* [1 4 2a]
In una trasformazione termodinamica le variabili coinvolte sono sei: la variazione di pressione, la variazione di volume, la variazione di temperatura, la variazione di energia interna, il lavoro scambiato, il calore scambiato. Determina, motivando la risposta, il loro segno nei tre casi seguenti:

1. Compressione isobara
2. Compressione isoterma
3. Compressione adiabatica

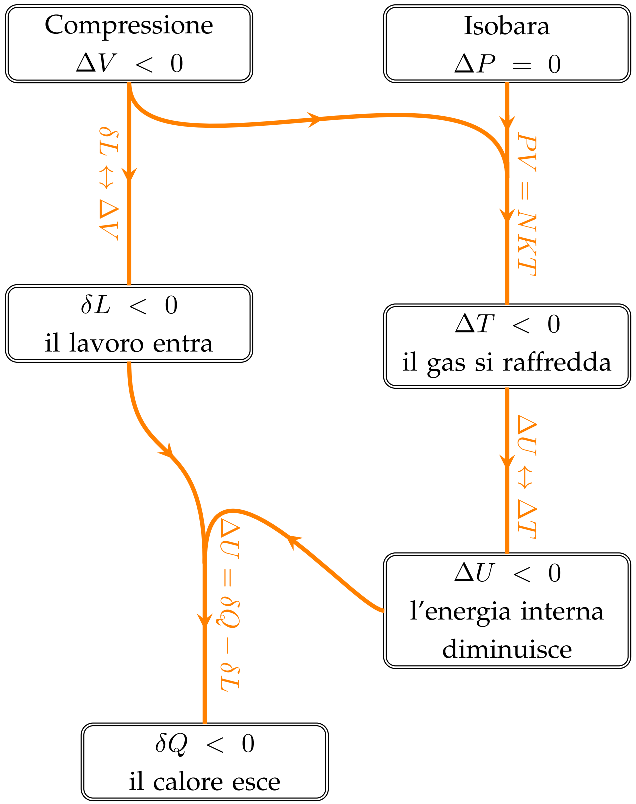
Spiegazione In questo esercizio ci vengono fornite due informazioni sull'andamento di due variabili del gas durante una trasformazione; dobbiamo dedurre l'andamento di tutte le altre variabili. Per fare questo utilizziamo soltanto quattro informazioni:

1. La legge dei gas perfetti: $PV = NKT$
2. Il primo principio della termodinamica $\Delta U = \delta Q - \delta L$
3. La legge che lega energia interna e temperatura: esse sono infatti direttamente proporzionale $\Delta U \leftrightarrow \Delta T$
4. Il concetto per cui un gas si espande se e solo se compie lavoro verso l'esterno $\delta L \leftrightarrow \Delta V$

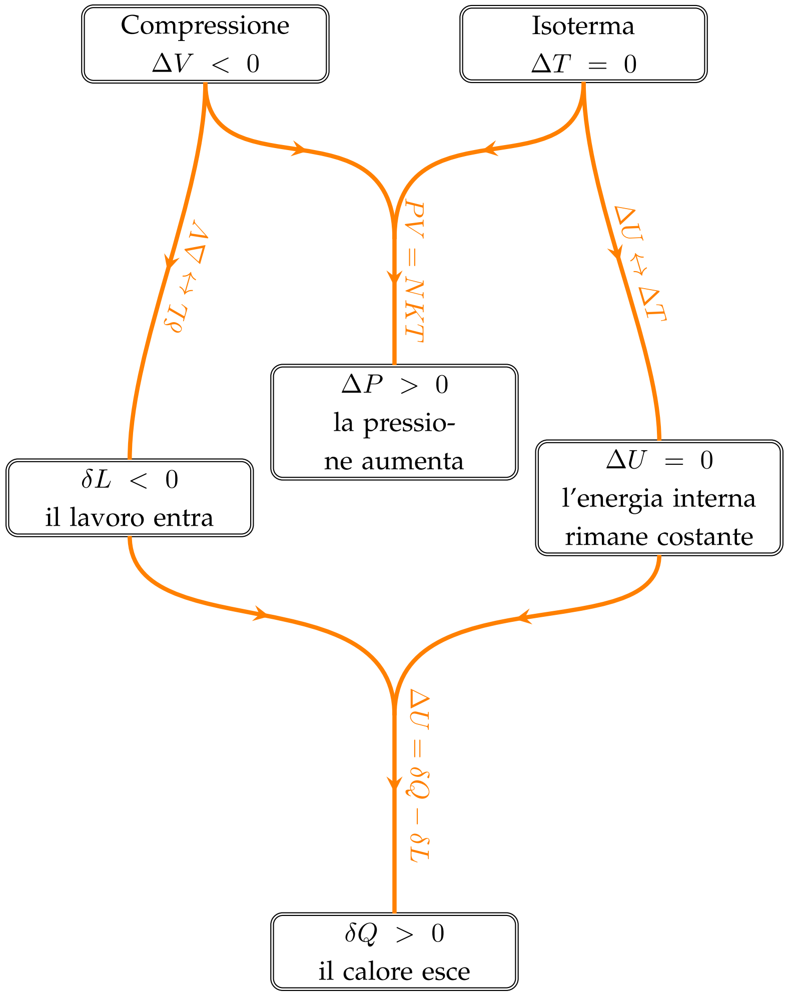
La soluzione dell'esercizio la presentiamo sotto forma di schema.

Svolgimento

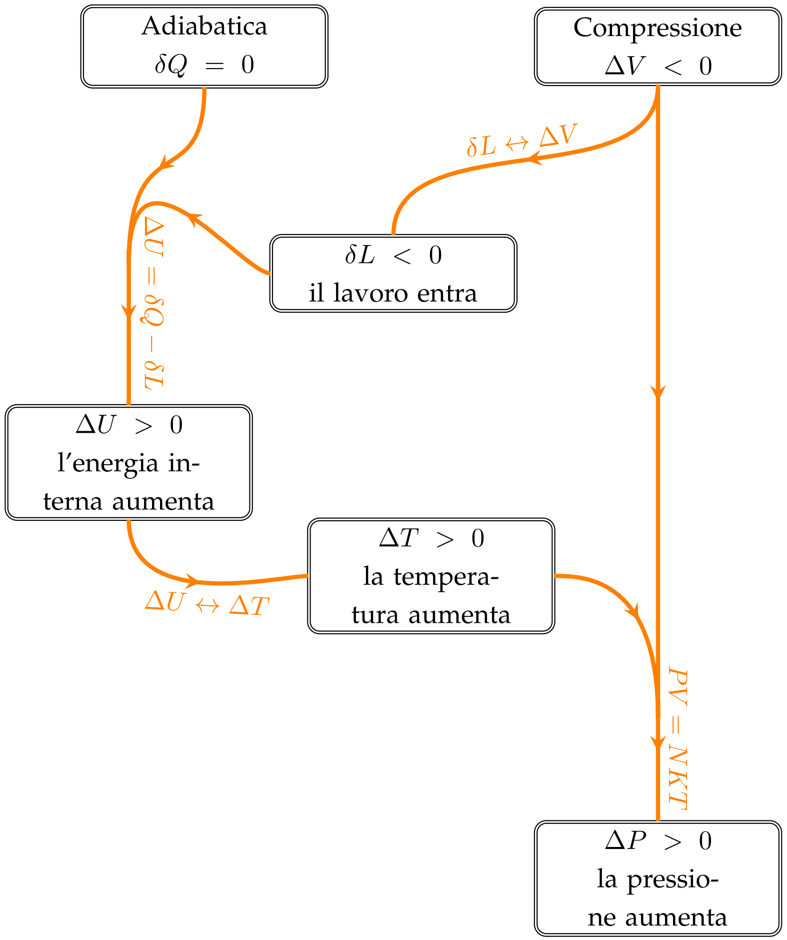
Compressione isobara



Compressione isoterma



Compressione adiabatica



Problema di: Termodinamica - $T0013$

Testo *[T0013]* [1 5 3a]

1. In quanti e quali modi un gas può scambiare energia con il mondo esterno?
2. Cos'è una trasformazione ciclica?
3. Cosa succede, dal punto di vista energetico, in una trasformazione ciclica?
4. Perché la società umana ha bisogno delle trasformazioni cicliche?
5. Cosa posso dire sul valore del rendimento di una trasformazione ciclica?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare

Svolgimento

1. Un gas può scambiare energia in due modi: tramite il calore e il lavoro.
2. Una trasformazione ciclica è una trasformazione in cui il gas parte da un certo stato iniziale per ritornare alla fine nello stesso stato iniziale.
3. Durante una trasformazione ciclica il gas assorbe calore da un luogo ad alta temperatura; una parte la trasforma in lavoro ed il restante lo cede in un luogo a bassa temperatura.
4. La società umana ha bisogno di energia sotto forma di lavoro; purtroppo le fonti energetiche disponibili ci forniscono calore, e quindi serve qualcosa che trasformi parte di quel calore in lavoro.
5. Il rendimento di un ciclo termodinamico è sempre $\eta < 1$

Problema di: Termodinamica - $T0014$

Testo *[T0014]* [1 ⭐ 5 ⌛ 3a 📖]
Domande di teoria

1. In quanti e quali modi un gas può scambiare energia con l'esterno?
2. A cosa serve una trasformazione ciclica?
3. Perché la società umana ne ha bisogno?
4. Elenca le strategie utili a risolvere i problemi energetici dell'umanità.
5. Quali variabili descrivono lo stato fisico di un gas? Quale formula le lega tra loro?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare.

Svolgimento

1. Un gas può scambiare energia in due modi: tramite il calore e il lavoro.
2. Una trasformazione ciclica è una trasformazione in cui il gas parte da un certo stato iniziale per ritornare alla fine nello stesso stato iniziale. Serve per trasformare una parte del calore assorbito in lavoro.
3. La società umana funziona consumando energia di tipo *lavoro*, mentre le principali fonti energetiche forniscono invece energia di tipo *calore*. Abbiamo bisogno dei cicli termodinamici per convertire iol calore in lavoro.
4. I problemi energetici dell'umanità sono legati al consumo di energia prodotta tramite l'utilizzo di combustibili fossili e uranio. Quello che possiamo fare è: non consumare energia inutilmente; produrre energia utilizzando fonti rinnovabili; utilizzare tecnologie con rendimenti energetici maggiori.
5. Le variabili sono: Pressione, Volume, Temperatura, Numero di molecole, Energia interna. La legge dei gas perfetti

$$P \cdot V = N \cdot K \cdot T$$

lega tra loro tali variabili. K è la costante di Boltzmann. La temperatura, che indica l'energia cinetica media delle molecole, è poi direttamente lagata all'energia interna del gas che è l'energia cinetica totale delle molecole del gas.

Problema di: Termodinamica - $T0015$

Testo *[T0015]* [1 ⭐ 3 ⌛ 3a 📖]
Domande di teoria

1. Se scaldo una pentola chiusa con un coperchio, che tipo di trasformazione sta facendo il gas all'interno? Perchè?
2. Un subacqueo si immerge in apnea scendendo di $\Delta h = -30\,m$. Che tipo di trasformazione fa l'aria nei suoi polmoni? Percè?
3. Un ciclo termodinamico assorbe una quantità di calore $\Delta Q_{ass} = 500\,J$ ad alta temperatura, e produce lavoro con un rendimento $\eta = 20\,\%$. Quanto lavoro ha prodotto? Quanto calore cede a bassa temperatura?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare.

Svolgimento

1. In gas fa una trasformazione isocora perché il volume del contenitore non cambia.
2. Il gas fa una trasformazione isoterma perché il gas nei polmoni dell'apneista, essendo sempre a contatto con il suo corpo, è sempre alla temperatura di circa 37 °C.
3. Il lavoro prodotto è
$$\delta L = \eta \cdot \delta Q_{ass} = 100\,J$$
Il calore ceduto a bassa temperatura è
$$\delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L_{fatto} = 400\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0016$

Testo *[T0016]* [1 ⭐ 3 ⌛ 3a 📖]
Domande di teoria

1. Una nebulosa nello spazio si comprime a causa della forza di gravità. Che tipo di trasformazione termodinamica fa? Perché?
2. Un frigorifero raffredda l'aria al suo interno. Che tipo di trasformazione termodinamica subisce tale aria? Perché?
3. Un ciclo termodinamico assorbe una quantità di calore $\Delta Q_{ass} = 500\,J$ ad alta temperatura, e produce $\Delta L = 200\,J$ di lavoro. Quanto vale il rendimento del ciclo? Quanto calore viene ceduto a bassa temperatura?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare.

Svolgimento

1. In gas fa una trasformazione adiabatica perchè il gas non ha nessuno intorno con cui possa scambiare calore.
2. Il gas fa una trasformazione isocora perchè il frigorifero non cambia il suo volume.
3. Il rendimento del ciclo è
$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 0,4 = 40\%$$
Il calore ceduto a bassa temperatura è
$$\delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L_{fatto} = 300\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0017$

Testo *[T0017]* [1 ⭐ 3 ⏳ 3a 📖]
Domande di teoria

1. Del gas compresso esce *molto velocemente* da una bomboletta e si espande. Che tipo di trasformazione termodinamica subisce tale gas? Perché?
2. Del gas viene compresso *molto lentamente* dentro una bomboletta. Che tipo di trasformazione termodinamica subisce tale gas? Perché?
3. Un ciclo termodinamico cede una quantità di calore $\Delta Q_{ced} = 500\,J$ a bassa temperatura, e produce $\Delta L = 200\,J$ di lavoro. Quanto vale il rendimento del ciclo? Quanto calore viene assorbito ad alta temperatura?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare.

Svolgimento

1. In gas fa una trasformazione adiabatica perchè la trasformazione è tanto rapida da non dare tempo al gas di scambiare calore con l'esterno.
2. Il gas fa una trasformazione isoterma perchè la trasformazione è tanto lenta da permettere al gas di mantenere l'equilibrio termico con l'esterno.
3. Il calore assorbito ad alta temperatura è

$$\delta Q_{ass} = \delta Q_{ced} + \delta L_{fatto} = 700\,J$$

Il rendimento del ciclo è

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = \frac{2}{7} = 28,6\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0019$

Testo *[T0019]* [2 ⭐ 3 ⏳ 3a 📖]
Quant'è la minima quantità di lavoro che bisogna utilizzare, con un ciclo di Carnot, per sottrarre $\delta Q = 180\,J$ da un gas alla temperatura $T_b = -3\,°\mathrm{C}$ e spostarlo in un ambiente alla temperatura $T_a = 27\,°\mathrm{C}$.

Spiegazione Per sottrarre calore da un gas e portarlo in un luogo a temperatura superiore, bisogna utilizzare un ciclo frigorifero. Il testo del problema suggerisce di utilizzare un ciclo frigorifero di Carnot. Un ciclo di Carnot assorbe una quantità di calore δQ_{Ta} da una sorgente a temperatura alta e cede una quantità di calore δQ_{Tb} ad un pozzo a temperatura bassa. Il lavoro prodotto $\delta L = \delta Q_{Ta} - \delta Q_{Tb}$. Per un ciclo frigorifero si invertono le frecce degli scambi di energia, ma non cambiano i valori numerici delle grandezze. Quindi il problema chiede di calcolare δL conoscendo T_a, T_b e δQ_{Tb}

Svolgimento Il rendimento del Ciclo di Carnot è

$$\eta_c = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{270}{300} = 0,1$$

Dalla definizione di ciclo termodinamico abbiamo

$$\begin{cases} \delta L = \delta Q_{Ta} \cdot \eta_c \\ \delta Q_{Tb} = \delta Q_{Ta} - \delta L \end{cases}$$

Svolgendo i conti abbiamo:

$$\begin{cases} \delta Q_{Ta} = \dfrac{\delta L}{\eta_c} \\ \delta Q_{Tb} = \dfrac{\delta L}{\eta_c} - \delta L \end{cases}$$

e quindi

$$\delta Q_{Tb} = \delta L \cdot \left(\frac{1}{\eta_c} - 1 \right)$$

$$\delta L = \delta Q_{Tb} \cdot \frac{\eta_c}{1 - \eta_c} = 180\,J \cdot \frac{0,1}{0,9} = 20\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0020$

Testo *[T0020]* [2 3 3a]
Una massa $m = 560\,g$ di azoto gassoso ($PM = 28\,\frac{g}{mole}$) si trova alla temperatura iniziale $T_i = 270\,K$. Essa è contenuta in un cilindro metallico di sezione $S = 1000\,cm^2$ e di altezza $h = 1\,m$. A quale pressione si trova il gas? Se la temperatura aumenta di $\Delta T = 30\,°\mathrm{C}$, a quale pressione arriva il gas?

Spiegazione Con i dati a disposizione è possibile calcolarsi quante molecole ci sono nel gas e di conseguenza il valore di pressione a cui si trova. Visto che il contenitore è di metallo, e che l'aumento di temperatura del contenitore lo fa dilatare in modo trascurabile ai fini dello stato del gas, possiamo affermare che il gas compie una trasformazione isocora.

Svolgimento Cominciamo a calcolarci quante molecole di azoto ci sono nel gas.

$$N = \frac{m}{PM} \cdot N_A = \frac{560\,g}{28\,\frac{g}{mole}} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} mole^{-1} = 1,2044 \cdot 10^{25}$$

La superficie di base del cilindro è

$$S = 1000\,cm^2 = 0,1\,m^2$$

La pressione a cui si trova il gas è quindi

$$P = \frac{NKT}{V} = \frac{NKT}{V} = \frac{NKT}{Sh}$$

$$P = \frac{1,2044 \cdot 10^{25} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 270\,K}{0,1\,m^2 \cdot 1\,m} = 4491\,hPa$$

Vediamo adesso di quanto aumenta la pressione durante la trasformazione isocora. Noi sappiamo che la legge dei gas vale sia nell'istante iniziale che nell'istante finale della trasformazione, quindi

$$\begin{cases} P_i \cdot V = N \cdot K \cdot T_i \\ P_f \cdot V = N \cdot K \cdot T_f \end{cases}$$

nel quale ho indicato con V il volume sempre uguale in tutti gli istanti della trasformazione. Ricavando V nella prima equazione e sostituendolo nella seconda avremo

$$\begin{cases} V = \frac{N \cdot K \cdot T_i}{P_i} \\ P_f \cdot \frac{N \cdot K \cdot T_i}{P_i} = N \cdot K \cdot T_f \end{cases}$$

Da cui si ricava, semplificando $N \cdot K$

$$P_f = \frac{P_i \cdot T_f}{T_i}$$

$$P_f = \frac{4491\, hPa \cdot 300\, K}{270\, K} = 4990\, hPa$$

Problema di: Termodinamica - $T0021$

Testo *[T0021]* [3 3 3a]
Un contenitore è separato da una sottile paratia in due volumi uguali nei quali sono contenuti due gas, rispettivamente alla pressione $P_{i_A} = 1,5 \cdot 10^5\, Pa$ e $P_{i_B} = 3,3 \cdot 10^5\, Pa$. Il contenitore è mantenuto a temperatura costante, e i due gas sono in equilibrio termico con il contenitore. Quale pressione si avrà all'interno del contenitore dopo la rimozione della paratia di separazione?

Spiegazione Nell'esercizio in questione abbiamo due gas inizialmente separati che successivamente si mescolano tra loro. Rimossa la paratia di separazione, ognuno dei due gas occuperà tutto lo spazio a disposizione. Essendo il contenitore a temperatura costante, la trasformazione termodinamica che avviene è un'isoterma. Per la legge di Dalton, la pressione complessiva sul contenitore è la somma delle pressioni parziali dei due gas.

Svolgimento Per una trasformazione isoterma noi possiamo scrivere

$$\begin{cases} P_f V_f = NKT \\ P_i V_i = NKT \end{cases}$$

Per trasformazioni quasistatiche come quelle ideali che consideriamo, la legge dei gas perfetti vale infatti in ogni istante della trasformazione, e quindi vale sia nell'istante iniziale che nell'istante finale della trasformazione. Trattandosi di una trasformazione isoterma non si è fatta distinzione tra la temperatura iniziale e quella finale, per cui $T_i = T_f = T$

Dal sistema si ricava

$$P_f V_f = P_i V_i$$

$$P_f = \frac{P_i V_i}{V_f}$$

Tale formula è applicabile ad entrambi i gas dell'esercizio, che per comodità indicheremo con A e B.

Per la legge di Dalton

$$P_f = P_{f_A} + P_{f_B} = \frac{P_{i_A} V_{i_A}}{V_{f_A}} + \frac{P_{i_B} V_{i_B}}{V_{f_B}}$$

Dai dati dell'esercizio sappiamo che il contenitore era inizialmente diviso a metà, per cui

$$\frac{V_{i_A}}{V_{f_A}} = \frac{V_{i_B}}{V_{f_B}} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$P_f = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 10^5\, Pa + \frac{1}{2} \cdot 3,3 \cdot 10^5\, Pa = 2,4 \cdot 10^5\, Pa$$

Problema di: Termodinamica - $T0022$

Testo *[T0022]* [4 8 3a]
Un contenitore è separato da una sottile paratia in due volumi uguali nei quali sono contenuti due gas, rispettivamente ossigeno O_2 alla pressione $P_{i_A} = 1,4 \cdot 10^5\, Pa$ e idrogeno H_2 alla pressione $P_{i_B} = 2,8 \cdot 10^5\, Pa$. Assumendo che il contenitore sia mantenuto alla temperatura costante $T = 200\,°\mathrm{C}$ e che i due gas siano in equilibrio termico con il contenitore, quale pressione si avrà all'interno del contenitore dopo la rimozione della paratia di separazione? Quale pressione si avrà poi dopo che un dispositivo elettrico fa scoccare una scintilla attraverso la miscela di idrogeno e ossigeno?

Spiegazione Nella prima parte dell'esercizio in questione abbiamo due gas inizialmente separati che successivamente si mescolano tra loro. Rimossa la paratia di separazione, ognuno dei due gas occuperà tutto lo spazio a disposizione. Essendo il contenitore a temperatura costante, la trasformazione termodinamica che avviene è un'isoterma. Per la legge di Dalton, la pressione complessiva sul contenitore è la somma delle pressioni parziali dei due gas.

Nella seconda parte dell'esercizio, la scintilla farà reagire insieme l'idrogeno e l'ossigeno cambiano il numero di molecole presenti nel contenitore, mantenendo costanti il volume del contenitore e la sua temperatura. Il testo dell'esercizio afferma infatti che il contenitore è mantenuto a temperatura costante, quindi il calore prodotto dalla reazione viene assorbito dal contenitore e poi disperso verso l'esterno dalla macchina che mantiene costante la temperatura del contenitore.

Svolgimento Per una trasformazione isoterma di un generico gas composto da un numero N di molecola alla temperatura costante T, possiamo scrivere

$$\begin{cases} P_f V_f = NKT \\ P_i V_i = NKT \end{cases}$$

Per trasformazioni quasistatiche come quelle ideali che consideriamo, la legge dei gas perfetti vale infatti in ogni istante della trasformazione, e quindi vale sia nell'istante iniziale che nell'istante finale della trasformazione. Trattandosi di una trasformazione isoterma non si è fatta distinzione tra la temperatura iniziale e quella finale, per cui $T_i = T_f = T$

Dal sistema si ricava

$$P_f V_f = P_i V_i$$

$$P_f = \frac{P_i V_i}{V_f}$$

Tale formula è applicabile ad entrambi i gas dell'esercizio, che per comodità indicheremo con A e B.

Per la legge di Dalton

$$P_f = P_{f_{O_2}} + P_{f_{H_2}} = \frac{P_{i_{O_2}} V_{i_{O_2}}}{V_{f_{O_2}}} + \frac{P_{i_{H_2}} V_{i_{H_2}}}{V_{f_{H_2}}}$$

Dai dati dell'esercizio sappiamo che il contenitore era inizialmente diviso a metà, per cui

$$\frac{V_{i_{O_2}}}{V_{f_{O_2}}} = \frac{V_{i_{H_2}}}{V_{f_{H_2}}} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$P_f = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^5\ Pa + \frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 10^5\ Pa = 2,1 \cdot 10^5\ Pa$$

Se osserviamo asesso i valori iniziali di volume, pressione, temperatura e numero di molecole dei due gas, avremo che $V_{i_{O_2}} = V_{i_{H_2}} = V_i$, $T_{i_{O_2}} = T_{i_{H_2}} = T$

$$\begin{cases} P_{i_{O_2}} V_i = N_{i_{O_2}} KT \\ P_{i_{H_2}} V_i = N_{i_{H_2}} KT \end{cases}$$

da cui

$$P_{i_{O_2}} V_{i_{O_2}} = P_{i_{H_2}} V_{i_{H_2}}$$

$$\frac{N_{i_{O_2}}}{N_{i_{H_2}}} = \frac{P_{i_{O_2}}}{P_{i_{H_2}}} = \frac{1}{2}$$

Questo significa che idrogeno ed ossigeno sono nelle esatte proporzioni per reagire in modo tale che utte le molecole di idrogeno si combinano con tutte le molecole di ossigeno a formare molecole di acqua. Essendo il contenitore alla temperature $T = 200\,^\circ\mathrm{C}$, l'acqua prodotta dalla reazione rimane allo stato gassoso. Il numero di molecole presente nel contenitore cambia, in quanto ogni tre molecole di reagenti se ne producono due di prodotti della reazione. Questo ci permette di scrivere

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{H_2+O_2}} = \frac{2}{3}$$

Indichiamo con $P_{i2} = P_f$ il valore di pressione che ha il gas prima della reazione chimica, e P_{f2} il valore di pressione dopo che è avvenuta la reazione chimica.

Dopo la reazione chimica, raggiunto l'equilibrio termico con il contenitore, potremo scrivere

$$\begin{cases} P_{f2} V = N_{f2} KT \\ P_{i2} V = N_{i2} KT \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\frac{P_{f2}}{P_{i2}} = \frac{N_{H_2O}}{N_{H_2+O_2}}$$

$$P_{f2} = P_{i2} \frac{N_{H_2O}}{N_{H_2+O_2}} = 2,1 \cdot 10^5\ Pa \cdot \frac{2}{3} = 1,4 \cdot 10^5\ Pa$$

Problema di: Termodinamica - $T0023$

Testo *[T0023]* [5 ⭐ 5 ⏳ 4a 📖]
Un gas monoatomico ($\gamma = \frac{5}{3}$) fa una trasformazione dallo stato

$$\{T_A = 300\,K;\ P_A = 100000\,Pa;\ V_A = 3\,m^3\}$$

allo stato

$$\{T_B = 400\,K;\ P_B = 200000\,Pa;\ V_B = 2\,m^3\}$$

Calcolate la variazione di entropia.

Spiegazione Il problema chiede la variazione di entropia del gas tra due stati. Dal momento che l'entropia è una variabile di stato, la sua variazione dipende unicamente dagli stati finale ed iniziale e non dalle trasformazioni avvenute. Possiamo quindi sceglierci le trasformazioni che con maggiore facilità ci permettono di calcolare la variazione di entropia.

Svolgimento Consideriamo una trasformazione adiabatica che porti il gas da uno stato A ad uno stato C ed in particolare dalla temperatura T_A alla temperatura $T_C = T_B$. Per tale trasformazione la variazione di entropia è nulla in quanto non avviene scambio di calore. Consideriamo poi una trasformazione isoterma che porti dallo stato C allo stato B. La corrispondente variazione di entropia è

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T} = NK\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

Per la serie delle due trasformazioni vale:

$$\begin{cases} \dfrac{P_A}{P_C} = \left(\dfrac{V_C}{V_A}\right)^\gamma \\ \dfrac{P_C}{P_B} = \dfrac{V_B}{V_C} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{P_A \cdot V_C}{V_B \cdot P_B} = \dfrac{V_C^\gamma}{V_A^\gamma} \\ P_C = \dfrac{V_B \cdot P_B}{V_C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_A \cdot V_A^\gamma}{V_B \cdot P_B} = V_C^{\gamma-1} \\ P_C = \dfrac{V_B \cdot P_B}{V_C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{P_A \cdot V_A^\gamma}{V_B \cdot P_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_C \\ P_C = \dfrac{V_B \cdot P_B}{V_C} \end{cases}$$

Il numero di molecole presenti nel gas è

$$N = \frac{P_A \cdot V_A}{K \cdot T_A}$$

$$\Delta S = \frac{P_A \cdot V_A}{T_A}\ln\left(\frac{\left(\dfrac{P_A \cdot V_A^\gamma}{V_B \cdot P_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{V_B}\right)$$

$$\Delta S = \frac{P_A \cdot V_A}{T_A}\ln\left(\frac{P_A \cdot V_A^\gamma}{P_B \cdot V_B^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\Delta S = \frac{100000\,Pa \cdot 3\,m^3}{300\,K}\ln\left(\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot 2^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Delta S = \frac{2500\,Pa \cdot m^3}{K}\ln\left(\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}\right)$$

$$\Delta S = -43,43\frac{J}{K}$$

Problema di: Termodinamica - $T0025$

Testo *[T0025]* [1 4 3a]
Rispondi alle seguenti domande:

1. In quale direzione si muove naturalmente il calore? In che modo possiamo invertire tale direzione?

2. Indica quali relazioni valgono, tra le variabili energetiche dei gas, durante le trasformazioni: espansione adiabatica, riscaldamento isocoro e compressione isoterma. Scrivile ed enunciane il significato.

3. Perchè un gas ideale esercita sempre una certa pressione sulle pareti del contenitore che lo racchiude?

4. Lo pneumatico di un'automobile, una volta gonfiato fino ad un certo livello, non aumenta più il suo volume. Perchè immettendo altra aria al suo interno aumenta la pressione?

Spiegazione Queste sono domande di teoria sul fenomeno della riflessione. Vanno semplicemente studiate!

Svolgimento

1. Il calore in natura si muove spontaneamente dai corpi più caldi verso quelli più freddi. Il processo può avvenire al contrario con un ciclo frigorifero grazie al fatto che introduciamo nel sistema una certa quantità di lavoro.

2. (a) Espansioe adiabatica: $\Delta U = -\delta L$; il lavoro fatto viene preso dall'energia interna dal gas

   (b) Riscaldamento isocoro: $\Delta U = \delta Q$; il calore fornito al gas viene utilizzato per aumentare l'energia interna del gas

   (c) Compressione isoterma: $\delta Q = \delta L$; il lavoro ricevuto dal gas viene immediatamente ridato al mondo esterno sotto forma di calore

3. Le molecole del gas, urtando contro le pareti del contenitore, esercitano su di esso una forza proporzionale al numero di urti che avvengono contro tali pareti ogni secondo.

4. Nella situazione indicata abbiamo una trasformazione a volume e temperatura costanti. Data la legge dei gas perfetti

$$P \cdot V = N \cdot K \cdot T$$

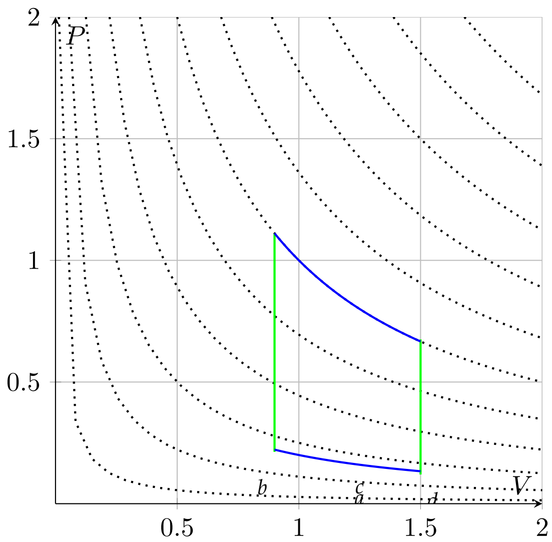
   le uniche variabili che possono cambiare valore sono P e N. La pressione dello pneumatico aumenta in quanto il numero di molecole presenti all'interno aumenta.

Problema di: Termodinamica - $T0026$

Testo *[T0026]* [2 3 3a]
Disegna un ciclo termodinamico formato da due isoterme e due isocore. Indica, motivando la risposta, per ogni trasformazione il segno degli scambi di calore e di lavoro e della variazione di energia interna.

Spiegazione Per questo problema è necessario aver compreso il primo principio della termodinamica ed i significati di trasformazione *isocora* e *isoterma*. L'equazione da utilizzare sarà sempre $\Delta U = \delta Q - \delta L$ Bisogna poi ricordare che le variazioni di temperatura sono direttamente proporzionali alle variazioni di energia interna, e che un gas compie lavoro verso l'esterno quando si espande.

Svolgimento Il ciclo termodinamico in questione è formato dalle seguenti quattro trasformazioni: un riscaldamento isocoro, un'espansione isoterma, un raffreddamento isocoro ed una compressione isoterma. Il grafico del ciclo è il seguente:



Per le quattro trasformazioni avremo:

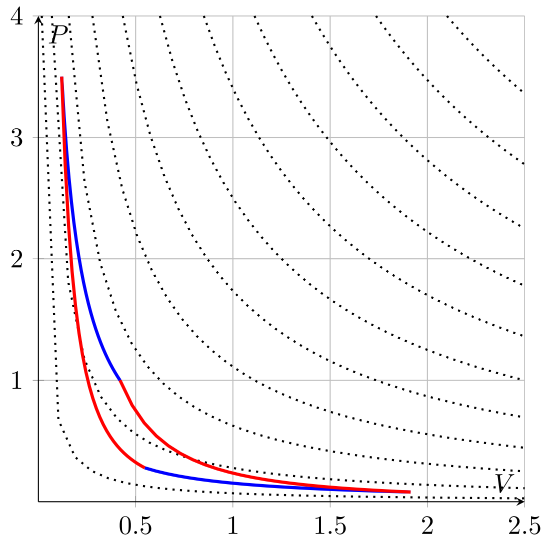
1. Riscaldamento isocoro.
   - Il volume non cambia, quindi il lavoro scambiato è nullo: $\delta L = 0$.
   - Il gas si riscalda, quindi l'energia interna aumenta: $\Delta U > 0$
   - Ne segue che $\delta Q > 0$ e quindi il calore entra e va ad aumentare l'energia interna del gas.
2. Espansione isoterma.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo (esce): $\delta L > 0$.
   - Il gas mantiene costante la temperatura, quindi l'energia interna non varia: $\Delta U = 0$
   - Ne segue che $\delta Q > 0$ e quindi il calore entra e viene trasformato in lavoro verso l'esterno.
3. Raffreddamento isocoro.
   - Il volume non cambia, quindi il lavoro scambiato è nullo: $\delta L = 0$.
   - Il gas si raffredda, quindi l'energia interna diminuisce: $\Delta U < 0$
   - Ne segue che $\delta Q < 0$ e quindi il calore esce facendo diminuire l'energia interna del gas.
4. Compressione isoterma.
   - Il volume diminuisce, quindi il lavoro è negativo (entra): $\delta L < 0$.
   - La temperatura è costante, quindi l'energia interna non varia: $\Delta U = 0$
   - Ne segue che $\delta Q < 0$ e quindi il calore esce provenendo dal lavoro in ingresso nel gas.

Problema di: Termodinamica - $T0026a$

Testo *[T0026a]* [2 3 3a]
Un ciclo termodinamico è formato da due isoterme e due adiabatiche. Indica, motivando la risposta, per ogni trasformazione il segno degli scambi di calore e di lavoro e della variazione di energia interna.

Spiegazione Per questo problema è necessario aver compreso il primo principio della termodinamica ed i significati di trasformazione *adiabatica* e *isoterma*. L'equazione da utilizzare sarà sempre $\Delta U = \delta Q - \delta L$ Bisogna poi ricordare che le variazioni di temperatura sono direttamente proporzionali alle variazioni di energia interna, e che un gas compie lavoro verso l'esterno quando si espande.

Svolgimento Il ciclo termodinamico in questione è formato dalle seguenti quattro trasformazioni: una compressione isoterma, una compressione adiabatica, un'espansione isoterma, una espansione adiabatica. Il grafico del ciclo è il seguente:



Per le quattro trasformazioni avremo:

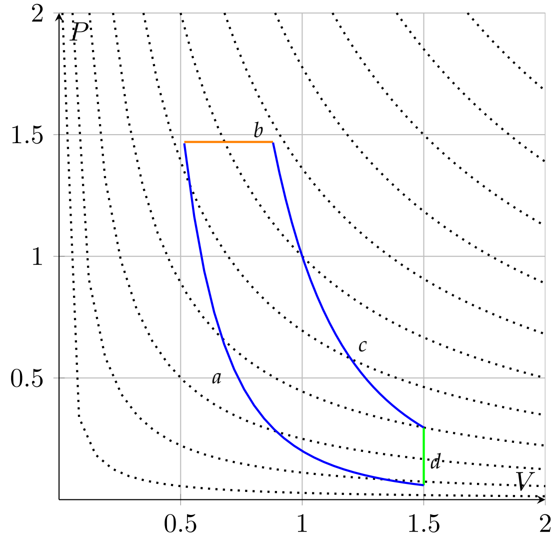
1. Compressione isoterma.
   - Il volume diminuisce, quindi il lavoro scambiato è negativo: $\delta L < 0$.
   - la temperatura non varia, quindi l'energia interna non varia: $\Delta U = 0$
   - Ne segue che $\delta Q < 0$ e quindi il calore esce dal gas.
2. Compressione abiabatica.
   - Il volume diminuisce, quindi il lavoro scambiato è negativo: $\delta L < 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\Delta U > 0$: energia interna e temperatura del gas aumentano.
3. Espansione isoterma.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo: $\delta L > 0$.
   - Il gas compie una trasformazione isoterma e quindi non cambia la temperatura; quindi l'energia interna rimane invariata: $\Delta U = 0$
   - Ne segue che $\delta Q > 0$ e quindi il calore entra nel gas.
4. Espansione adiabatica.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo: $\delta L > 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\Delta U < 0$: energia interna e temperatura diminuiscono.

Problema di: Termodinamica - $T0026b$

Testo *[T0026b]* [2 3 3a]
Disegna un ciclo termodinamico formato da due adiabatiche, una isobara ed un'isocora. Indica, motivando la risposta, per ogni trasformazione il segno degli scambi di calore e di lavoro e della variazione di energia interna.

Spiegazione Per questo problema è necessario aver compreso il primo principio della termodinamica ed i significati di trasformazione *adiabatica* e *isocora* e *isobara*. L'equazione da utilizzare sarà sempre $\Delta U = \delta Q - \delta L$ Bisogna poi ricordare che le variazioni di temperatura sono direttamente proporzionali alle variazioni di energia interna, e che un gas compie lavoro verso l'esterno quando si espande.

Svolgimento Il ciclo termodinamico in questione è formato dalle seguenti quattro trasformazioni: una compressione adiabatica, una espansione isobara, una espansione adiabatica, un raffreddamento isocoro. Il grafico del ciclo è il seguente:



Per le quattro trasformazioni avremo:

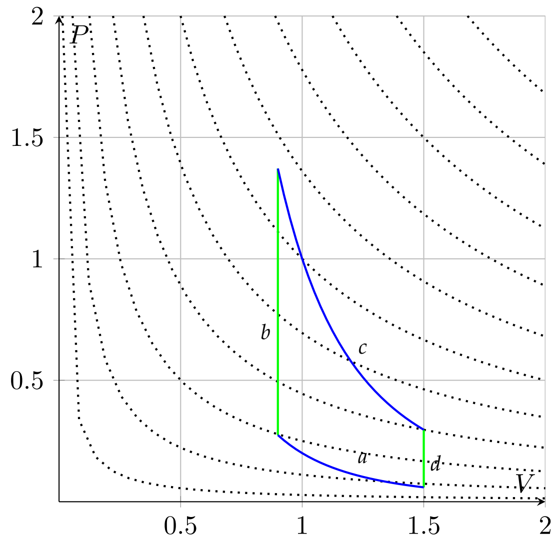
1. Compressione abiabatica.
   - Il volume diminuisce, quindi il lavoro scambiato è negativo: $\delta L < 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\delta U > 0$: energia interna e la temperatura del gas aumentano.
2. Espansione isobara.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo (esce): $\delta L > 0$.
   - La temperatura aumenta, quindi $\Delta U > 0$. Lo si vede bene dal diagramma in quanto ci si sposta da isoterme inferiori ad isoterme superiori.
   - Ne segue che $\delta Q > 0$ e quindi il calore entra nel gas.
3. Espansione adiabatica.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo: $\delta L > 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\Delta U < 0$: energia interna e temperatura diminuiscono.
4. Raffreddamento isocoro.
   - Il volume non cambia, quindi il lavoro scambiato è nullo: $\delta L = 0$.
   - Il gas si raffredda, quindi l'energia interna diminuisce: $\Delta U < 0$
   - Ne segue che $\delta Q < 0$ e quindi il calore esce facendo diminuire l'energia interna del gas.

Problema di: Termodinamica - $T0026c$

Testo *[T0026c]* [2 3 3a]
Disegna un ciclo termodinamico formato da due adiabatiche e due isocore. Indica, motivando la risposta, per ogni trasformazione il segno degli scambi di calore e di lavoro e della variazione di energia interna.

Spiegazione Per questo problema è necessario aver compreso il primo principio della termodinamica ed i significati di trasformazione *adiabatica* e *isocora*. L'equazione da utilizzare sarà sempre $\Delta U = \delta Q - \delta L$ Bisogna poi ricordare che le variazioni di temperatura sono direttamente proporzionali alle variazioni di energia interna, e che un gas compie lavoro verso l'esterno quando si espande.

Svolgimento Il ciclo termodinamico in questione è formato dalle seguenti quattro trasformazioni: una compressione adiabatica, un riscaldamento isocoro, una espansione adiabatica, un raffreddamento isocoro. Il grafico del ciclo è il seguente:



Per le quattro trasformazioni avremo:

1. Compressione adiabatica.
   - Il volume diminuisce, quindi il lavoro scambiato è negativo: $\delta L < 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\delta U > 0$: energia interna e la temperatura del gas aumentano.
2. Riscaldamento isocoro.
   - Il volume non cambia, quindi il lavoro scambiato è nullo: $\delta L = 0$.
   - Il gas si riscalda, quindi l'energia interna aumenta: $\Delta U > 0$
   - Ne segue che $\delta Q > 0$ e quindi il calore entra facendo aumentare l'energia interna del gas.
3. Espansione adiabatica.
   - Il volume aumenta, quindi il lavoro scambiato è positivo: $\delta L > 0$.
   - La trasformazione è adiabatica, quindi il calore scambiato è nullo $\delta Q = 0$
   - Ne segue che $\Delta U < 0$: energia interna e temperatura diminuiscono.
4. Raffreddamento isocoro.
   - Il volume non cambia, quindi il lavoro scambiato è nullo: $\delta L = 0$.
   - Il gas si raffredda, quindi l'energia interna diminuisce: $\Delta U < 0$
   - Ne segue che $\delta Q < 0$ e quindi il calore esce facendo diminuire l'energia interna del gas.

Problema di: Termodinamica - $T0028$

Testo *[T0028]* [2 3 3a]
Un frigorifero ha una porta di superficie $S = 1,5\,m^2$. Inizialmente spento e aperto, l'aria al suo interno ha una temperatura $T_i = 22°$. Una volta in funzione l'aria al suo interno raggiunge la temperatura $T_f = 4°$. Con quale forza la porta viene schiacciata conto il frigorifero e tenuta chiusa?

Spiegazione Abbiamo un gas che compie un raffreddamento isocoro, in quanto il volume del frigorifero non cambia. Sia per lo stato iniziale del gas che per quello finale vale la legge dei gas perfetti. Impostando il sistema risolviamo l'esercizio. La porta è tenuta chiusa dalla differenza di pressione che si genera tra l'aria all'interno e l'aria all'esterno.

Svolgimento La legge dei gas perfetti mi descrive lo stato del gas in un certo istante, per cui la posso applicare sia nel momento iniziale della trasformazione che in quello finale. Se lo faccio ottengo il seguente sistema, nel quale, essendo una trasformazione isocora, non facciamo differenza tra volume iniziale e finale:

$$\begin{cases} P_f V = NKT_f \\ P_i V = NKT_i \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema il modo più comodo è sicuramente quello di scrivere una terza equazione dividendo le due equazioni del sistema:

$$\frac{P_f V}{P_i V} = \frac{NKT_f}{NKT_i}$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$\frac{P_f}{P_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

La pressione dell'aria all'interno del frigo inizialmente è pari a quella atmosferica che assumiamo essere $P_{atm} = 1\,atm$

$$P_f = \frac{P_{atm}T_f}{T_i} = \frac{1\,atm \cdot (273,15+4)\,K}{(273,15+22)\,K} = 0,94\,atm$$

La forza esercitata sulla porta del frigo è quindi

$$F = \Delta P \cdot S = 0,06\,atm \cdot 1,5\,m^2 = 9\,kN$$

Problema di: Termodinamica - $T0029$

Testo *[T0029]* [4 6 3a]
Un contenitore cilindrico di superficie di base $S = 10\,cm^2$ contiene una mole di gas alla pressione $P_i = 2 \cdot 10^5\,Pa$ ed alla temperatura $T_i = 300\,K$. Il cilindro è chiuso da un pistone tenuto in posizione da una molla di costante elastica $k = 100\,\frac{N}{mm}$. Di quanto si solleva il pistone se scaldiamo il gas fino alla temperatura $T_f = 400\,K$?

Spiegazione In questo problema abbiamo una trasformazione termodinamica differente dalle quattro standard di cui di solito si tratta. Non è ovviamente isoterma in quanto è scritto nel testo che la temperatura aumenta; non è isobara ne isocora in quanto l'aumento di temperatura implica un aumento del prodotto $P \cdot V$ nella legge dei gas. Un aumento di V però implica lo schiacciamento della molla che tiene il cilindro, e quindi un aumento della pressione esercitata. P e V, visto il sistema fisico che è stato costruito, sono tra loro legati.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la relazione che intercorre tra il volume e la pressione del gas. Un aumento del volume del gas implica un aumento dell'altezza del cilindro che corrisponde alla compressione della molla e quindi ad un aumento della pressione.

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S}$$
$$\Delta P = \frac{k \cdot \Delta h}{S} = \frac{k \cdot \Delta V}{S^2}$$

Utilizzando la legge dei gas avremo

$$\begin{cases} P_i V_i = NKT_i \\ P_f V_f = NKT_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_i V_i = NKT_i \\ \left(P_i + \frac{k \cdot \Delta h}{S}\right) \cdot (V_i + S \cdot \Delta h) = NKT_f \end{cases}$$

Ricaviamo V_i dalla prima equazione sostituendo poi nella seconda, ed avremo

$$\begin{cases} V_i = \frac{NKT_i}{P_i} \\ \left(P_i + \frac{k \cdot \Delta h}{S}\right) \cdot \left(\frac{NKT_i}{P_i} + S \cdot \Delta h\right) = NKT_f \end{cases}$$

Consideriamo adesso la seconda equazione

$$NKT_i + P_i \cdot S \cdot \Delta h + \Delta h \cdot \frac{k \cdot NKT_i}{P_i \cdot S} + k\Delta h^2 = NKT_f$$

Per comodità indichiamo con $X = \Delta h$ l'incognita da trovare

$$k \cdot X^2 + \left(P_i \cdot S + \frac{k \cdot NKT_i}{P_i \cdot S}\right) \cdot X - NK\Delta T = 0$$

mettendo tutto in unità standard e trascurando di scriverle[1], avremo

$$10^5 X^2 + \left(2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} + \frac{10^5 \cdot 8,314 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot X - 8,314 \cdot 100 = 0$$

$$10^5 X^2 + \left(200 + 12,471 \cdot 10^5\right) X - 831,4 = 0$$

Il valore di X è la soluzione del problema.

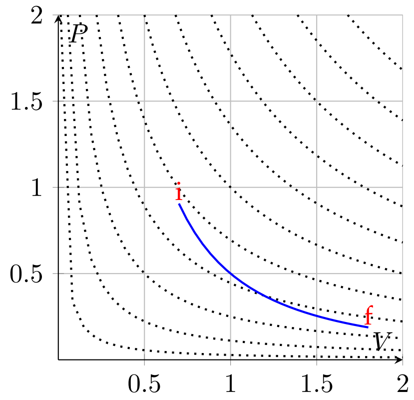
[1]Questo ovviamente non è corretto da un punto di vista matematico; lo faccio solo per non rendere troppo pesante la scrittura e facilitare la comprensione.

Problema di: Termodinamica - $T0030$

Testo *[T0030]* [3 3 4a]
Un cilindro adiabatico, riempito di elio gassoso alla temperatura $T_i = 47°C$, è chiuso da un pistone mobile all'altezza $h_i = 30\,cm$. Di quanto si deve abbassare il pistone per portare il gas alla temperatura $T_f = 77°C$?

Spiegazione Il contenitore in questione è adiabatico, quindi non scambia calore con l'esterno. Abbassando il pistone si diminuisce il volume del gas e quindi, essendo la trasformazione adiabatica, il gas si scalda.

Svolgimento In questo esercizio il volume del gas diminuisce e quindi aumenta pressione e temperatura. La diminuzione del volume è legata alla diminuzione dell'altezza del cilindro.



L'equazione delle trasformazioni adiabatiche

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

Essendo l'elio un gas monoatomico avremo che $\gamma = \frac{5}{3}$

Il volume finale del gas è quindi

$$V_f = V_i \left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Il volume del gas ha la forma di un cilindro, quindi

$$Sh_f = Sh_i \left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$h_f = 30\,cm \cdot \left(\frac{320\,K}{350\,K}\right)^{\frac{3}{2}} = 26,2\,cm$$

Problema di: Termodinamica - $T0031$

Testo *[T0031]* [4 4 4a]
Una mole di gas monoatomico compie una trasformazione isobara da uno stato iniziale A ad uno stato B e successivamente compie una trasformazione adiabatica verso uno stato C. Sappiamo che $T_A = T_C = 20°C$, $P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa$ e $V_B = 2V_A$. Determinare i valori delle variabili termodinamiche (P,V,T) nei tre stati A, B, e C.

Spiegazione Le informazioni fornite sono sufficienti per determinare i valori di tutte le variabili degli stati A, B e C utilizzando la legge dei gas e le proprietà delle trasformazioni.

Svolgimento Per quanto riguarda lo stato A avremo

$$\begin{cases} T_A = 20°C = 293\,K \\ P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa \\ V_A = \dfrac{nRT_A}{P_A} = \dfrac{1mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 293\,K}{2 \cdot 10^5\,Pa} = 0,0113\,m^3 \end{cases}$$

Per quanto riguarda lo stato B avremo che essendo la trasformazione $A \to B$ un'isobara la pressione sarà la stessa dello stato A.

$$\begin{cases} P_B = P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa \\ V_B = 2V_A = 0,0227\,m^3 \\ T_B = \dfrac{P_B V_B}{nR} = 2T_A = 586\,K \end{cases}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'adiabatica con $\gamma = \frac{5}{3}$, quindi

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\begin{cases} T_C = T_A = 293\,K \\ V_C = V_B \cdot \left(\dfrac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2 \cdot 0,0227\,m^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 0,1284\,m^3 \\ P_C = \dfrac{nRT_C}{V_C} = 18963\,Pa \end{cases}$$

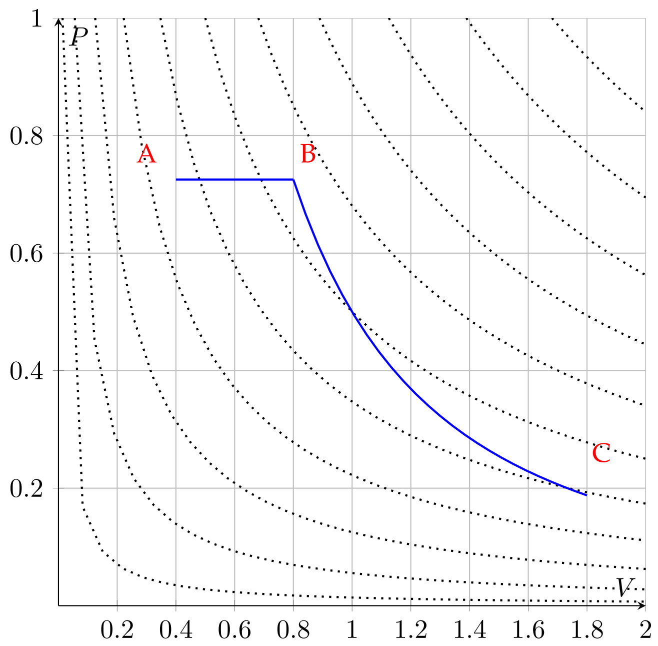


Fig. 4.1: *Una trasformazione isobara seguita da una adiabatica.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

Problema di: Termodinamica - $T0032$

Testo *[T0032]* [5 12 4a]
Due moli di gas biatomico compiono una trasformazione isobara a pressione $P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa$ da uno stato iniziale A ad uno stato B con $V_B = 2V_A$; successivamente una trasformazione adiabatica verso uno stato C ed infine un'isoterma a temperatura $T_C = 293\,K$ che riporta il gas allo stato A. Calcola il rendimento del ciclo.

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste.

Svolgimento Per quanto riguarda lo stato A avremo

$$\begin{cases} T_A = 20\,^\circ\mathrm{C} = 293\,K \\ P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa \\ V_A = \dfrac{nRT_A}{P_A} = \dfrac{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol\cdot K} \cdot 293\,K}{2 \cdot 10^5\,Pa} = 0,0243\,m^3 \end{cases}$$

Per quanto riguarda lo stato B avremo che essendo la trasformazione $A \to B$ un'isobara la pressione sarà la stessa dello stato A.

$$\begin{cases} P_B = P_A = 2 \cdot 10^5\,Pa \\ V_B = 2V_A = 0,0487\,m^3 \\ T_B = \dfrac{P_B V_B}{nR} = 2T_A = 586\,K \end{cases}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'adiabatica con $\gamma = \frac{5}{3}$, quindi

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\begin{cases} T_C = T_A = 293\,K \\ V_C = V_B \cdot \left(\dfrac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2 \cdot 0,0227\,m^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 0,2754\,m^3 \\ P_C = \dfrac{nRT_C}{V_C} = 17682\,Pa \end{cases}$$

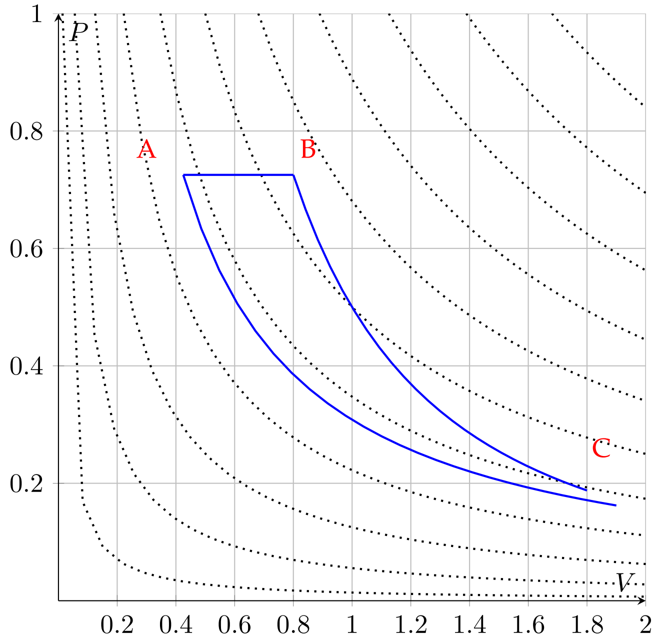


Fig. 4.2: *Una trasformazione isobara seguita da una adiabatica e poi da una isoterma.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

Per calcolare adesso il rendimento del ciclo dobbiamo calcolare tutti gli scambi di energia che avvengono. Il ciclo assorbe energia sotto forma di calore nell'espansione isobara e cede energia nella compressione isoterma

$$\Delta Q_{ass} = nc_p\Delta T = n \cdot \frac{7}{2}R \cdot \Delta T = 2\,mol \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31\frac{J}{molK} \cdot 293\,K = 17044\,J$$

$$\Delta Q_{ced} = nRT\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 4870\,J \cdot (-2.43) = -11835\,J$$

Il segno meno indica che il calore è in ingresso.

Il rendimento del ciclo risulta quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = \frac{\delta Q_{ass} - \delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}} = 0,306$$

Problema di: Termodinamica - $T0033$

Testo *[T0033]* [2 7 4a]
Un gas perfetto monoatomico compie una trasformazione isoterma a temperatura $T_A = 300\,K$ dallo stato A a pressione $P_A = 3\,atm$, allo stato B a pressione $P_B = 1\,atm$. Successivamente subisce una compressione isobara fino allo stato C a volume $V_C = 4\,dm^3$, ed infine una trasformazione isocora per ritornare nello stato A. Dopo aver disegnato il grafico della trasformazione calcola il numero di moli del gas, e le coordinate termodinamiche (P,V,T) dei tre stati A, B, C.

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste.

Svolgimento Il volume nello stato A è uguale al volume dello stato C visto che la trasformazione tra A e C è un'isocora

$$V_A = V_C = 0,004\,m^3$$

Il numero di moli del gas è dato da

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{3 \cdot 10^5\,Pa \cdot 0,004\,m^3}{8,31\frac{J}{mol\,K} \cdot 300\,K} = 4\,mol$$

La prima trasformazione è un'isoterma, quindi

$$T_B = T_A = 300\,K$$

Dalla legge dei gas sappiamo che per un'isoterma

$$P_A V_A = P_B V_B$$

e quindi

$$V_B = V_A \cdot \frac{P_A}{P_B} = 0,012\,m^3$$

Sappiamo poi che

$$P_C = P_B = 1\,atm$$

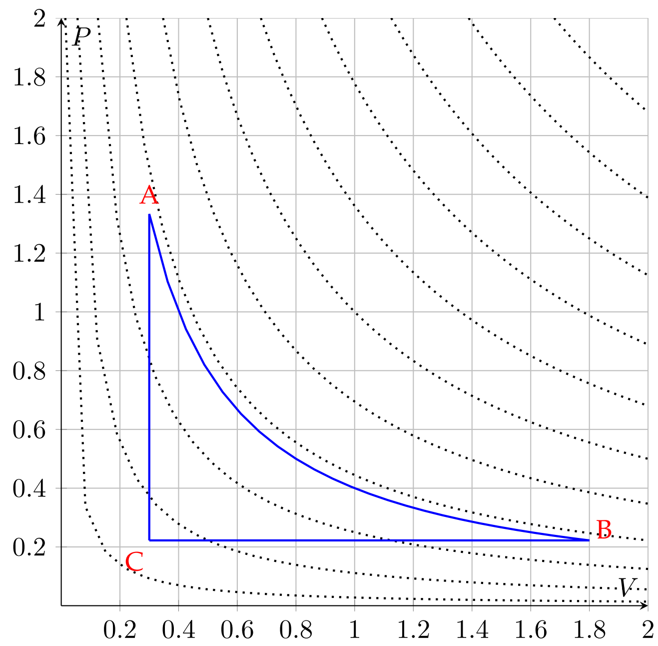


Fig. 4.3: *Una trasformazione isobara seguita da una adiabatica e poi da una isoterma.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

perché la trasformazione $B \to C$ è isobara.

Per trovare la temperatura in C possiamo utilizzare la trasformazione isobara

$$V_B T_C = V_C T_B$$

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = 100\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0034$

Testo *[T0034]* [4 12 4a]

Un gas perfetto monoatomico compie una trasformazione isoterma a temperatura $T_A = 400\,K$ dallo stato A a pressione $P_A = 2\,atm$, allo stato B a pressione $P_B = 1\,atm$. Successivamente subisce una compressione isobara fino allo stato C a volume $V_C = 5\,dm^3$, ed infine una trasformazione isocora per ritornare nello stato A. Dopo aver disegnato il grafico della trasformazione calcola il numero di moli del gas, e le coordinate termodinamiche (P,V,T) dei tre stati A, B, C. Calcola gli scambi di energia nei tre tratti del ciclo ed il rendimento del ciclo.

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.4.

Svolgimento Il volume nello stato A è lo stesso dello stato C perché la trasformazione $C \to A$ è isocora, quindi

$$V_A = V_C = 5\,dm^3$$

Il numero di moli del gas è dato da

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{2 \cdot 10^5\,Pa \cdot 0,005\,m^3}{8,31\frac{J}{mol K} \cdot 400\,K} = 20,775\,mol$$

La prima trasformazione è un'isoterma, quindi

$$T_B = T_A = 400\,K$$

Dalla legge dei gas sappiamo che per un'isoterma

$$P_A V_A = P_B V_B$$

e quindi

$$V_B = V_A \cdot \frac{P_A}{P_B} = 0,005\,m^3 \cdot 2 = 0,01\,m^3$$

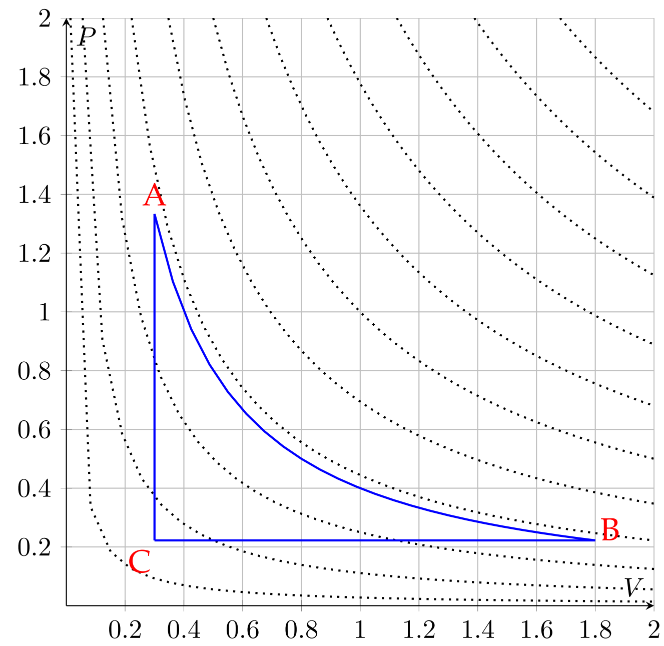


Fig. 4.4: *Una trasformazione isobara seguita da una adiabatica e poi da una isoterma.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

Sappiamo poi che

$$P_C = P_B = 1\,atm$$

perché la trasformazione $B \to C$ è isobara.

La temperatura nel punto C la troviamo con l'equazione dell'isobara

$$T_C V_B = T_B V_C$$

$$T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B} = 400\,K \cdot \frac{0,005\,m^3}{0,01\,m^3} = 200\,K$$

Il ciclo termodinamico compie lavoro nel tratto isoterma

$$\delta L = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\delta L = 20,775\,mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol K} \cdot 400\,K \cdot \ln\left(\frac{0,01}{0,005}\right)$$
$$\delta L = 47866\,J$$

Il calore è assorbito durante l'isoterma e durante l'isocora.

$$\delta Q = nc_v \Delta T + nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\delta Q = 51792\,J + 47866\,J = 99658,J$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 0,48$$

Problema di: Termodinamica - $T0035$

Testo *[T0035]* [3 9 4a]
$n = 2$ moli di gas monoatomico compiono un ciclo reversibile tra gli stati A, B, C, D indicato di seguito. Disegnare il ciclo termodinamico e calcolare le coordinate termodinamiche (P,V,T) nei quattro stati indicati.

$A \rightarrow B$: espansione isoterma da $P_A = 2\,atm$, $V_A = 1\,dm^3$ a $V_B = 2\,dm^3$;

$B \rightarrow C$: espansione adiabatica fino a $P_C = \frac{1}{4}P_A$;

$C \rightarrow D$: compressione isobara fino al volume $V_D = V_A$;

$D \rightarrow A$: trasformazione isocora fino allo stato A.

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.5.

Svolgimento La temperatura nello stato A è calcolabile dalla legge dei gas

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 12\,K$$

La pressione P_B la troviamo con la legge delle isoterme

$$T_B = T_A = 12\,K$$

$$P_B V_B = P_A V_A$$
$$P_B = P_A \cdot \frac{V_A}{V_B} = 1\,atm$$

Dai dati del problema avremo

$$P_C = 0,5\,atm$$

La legge delle adiabatiche mi permette di trovare il volume del gas nello stato C

$$P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

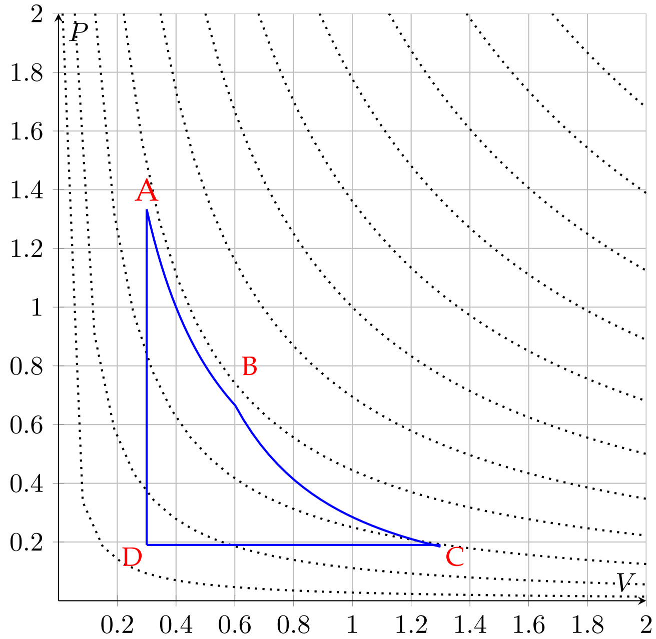


Fig. 4.5: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$V_C = V_B \cdot \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$V_C = 2\, dm^3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 3,03\, dm^3$$

per la temperatura nello stato C avremo

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 9,1\, K$$

Per lo stato D avremo

$$V_D = V_A = 1\, dm^3$$

$$P_D = P_C = 0,5\, atm$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 3\, K$$

Problema di: Termodinamica - $T0036$

Testo *[T0036]* [2 7 4a]
Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C.

$A \rightarrow B$: trasformazione isobara con $P_A = 1\,atm$, $V_A = 2\,litri$ e $V_B = 6\,litri$;

$B \rightarrow C$: trasformazione isocora

$C \rightarrow A$: trasformazione isoterma

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.6.

Svolgimento Per lo stato A avremo

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 24\,K$$

Per lo stato B raggiunto con una isobara avremo

$$P_B = P_A = 1\,atm$$

$$T_B V_A = T_A V_B$$

$$T_B = T_A \cdot \frac{V_B}{V_A} = 72\,K$$

Per lo stato C, raggiunto con una isocora da B e connesso con un'isoterma ad A, avremo

$$V_C = V_B = 6\,litri$$

$$T_C = T_A = 24\,K$$

ed infine

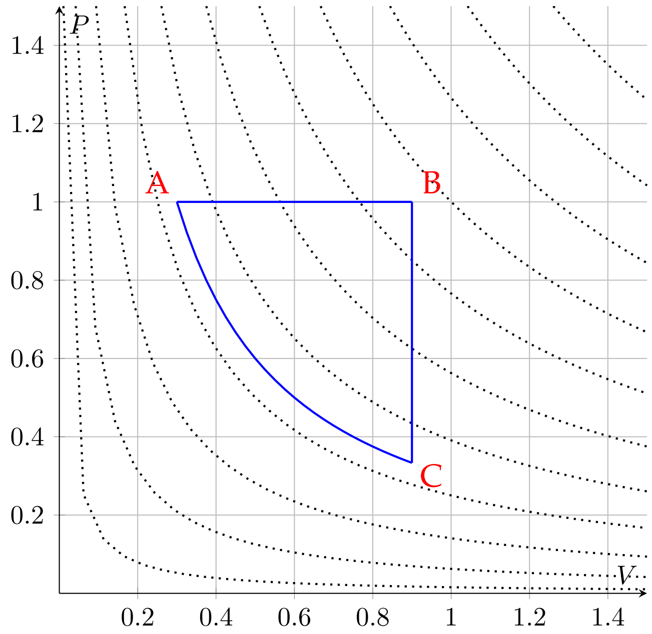


Fig. 4.6: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$P_C T_B = P_B T_C$$

$$P_C = P_B \cdot \frac{T_C}{T_B} = \frac{1}{3}\,atm$$

Problema di: Termodinamica - $T0037$

Testo *[T0037]* [4 12 4a]

$n = 0,1\, mol$ di gas perfetto biatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche (P,V,T) dei tre stati A, B, C. Calcola poi gli scambi di energia durante il ciclo ed il rendimento del ciclo.

$A \rightarrow B$: trasformazione isobara con $P_A = 1\, atm$, $V_A = 2\, litri$ e $V_B = 6\, litri$;

$B \rightarrow C$: trasformazione isocora

$C \rightarrow A$: trasformazione isoterma

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.7.

Svolgimento Per lo stato A avremo

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{10^5\, Pa \cdot 0,002\, m^3}{0,1\, mol \cdot 8,31 \frac{J}{mol K}} = 240,7\, K$$

Per lo stato B raggiunto con una isobara avremo

$$P_B = P_A = 1\, atm$$

$$T_B V_A = T_A V_B$$

$$T_B = T_A \cdot \frac{V_B}{V_A} = 722,0\, K$$

Per lo stato C, raggiunto con una isocora da B e connesso con un'isoterma ad A, avremo

$$V_C = V_B = 6\, litri$$

$$T_C = T_A = 240,7\, K$$

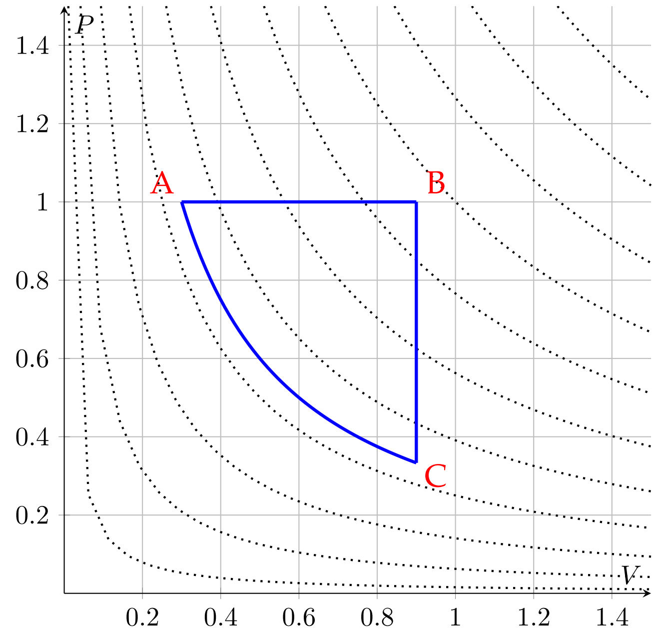


Fig. 4.7: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

ed infine

$$P_C T_B = P_B T_C$$

$$P_C = P_B \cdot \frac{T_C}{T_B} P_B \cdot \frac{T_A}{T_A \cdot \frac{V_B}{V_A}} = \frac{1}{3}\, atm$$

Per calcolare il rendimento del ciclo dobbiamo calcolarci gli scambi di calore durante il ciclo.

Il gas assorbe calore durante la trasformazione $A \rightarrow B$

$$\delta Q_{ass} = n c_p \Delta T_{A \rightarrow B} = 0,1\, mol \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31 \frac{J}{mol K} \cdot 481,3\, K = 1400\, J$$

Nelle altre du trasformazioni il gas cede calore

$$\delta Q_{ced} = nc_v \Delta T_{B\to C} + nRT \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

$$\delta Q_{ced} = -0,1\,mol \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 481,3\,K + 0,1 \cdot 8,31\,\frac{J}{K} \cdot 240,7\,K \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\delta Q_{ced} = -999,9\,J - 219,7\,J = -780\,J$$

Il rendimento risulta quindi

$$\eta = \frac{\delta Q_{ass} - \delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}} = 0,443$$

Problema di: Termodinamica - $T0038$

Testo *[T0038]* [3 3 4a]
Una mole di gas compie una trasformazione adiabatica passando dalla temperatura $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alla temperatura $T_f = 40\,°\mathrm{C}$ e da un volume $V_i = 1\,m^3$ ad un volume $V_f = 0,848\,m^3$. Che tipo di gas si sta analizzando?

Spiegazione La trasformazione adiabatica fornisce i dati necessari per determinare il fattore γ, con in quale si può determinare se il gas è monoatomico, biatomico o poliatomico.

Svolgimento Per la legge delle trasformazioni adiabatiche avremo

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{293}{313} = (0,848)^{\gamma-1}$$

$$\gamma - 1 = \frac{\ln 0,936}{\ln 0,848} = 0,4$$

$$\gamma = 1,4 = \frac{7}{5}$$

Il gas è quindi biatomico. Per un gas biatomico, infatti, $c_v = \frac{5}{2}$ e $c_p = \frac{7}{2}$, per cui

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Problema di: Termodinamica - $T0038a$

Testo *[T0038a]* [3 3 4a]
Una mole di gas compie una trasformazione adiabatica passando dalla temperatura $T_i = 20\,^\circ\mathrm{C}$ alla temperatura $T_f = 40\,^\circ\mathrm{C}$ e da un volume $V_i = 1\,m^3$ ad un volume $V_f = 0,906\,m^3$. Che tipo di gas si sta analizzando?

Spiegazione La trasformazione adiabatica fornisce i dati necessari per determinare il fattore γ, con in quale si può determinare se il gas è monoatomico, biatomico o poliatomico.

Svolgimento Per la legge delle trasformazioni adiabatiche avremo

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{293}{313} = (0,906)^{\gamma-1}$$

$$\gamma - 1 = \frac{\ln 0,936}{\ln 0,906} = 0,67$$

$$\gamma = 1,67 \sim \frac{5}{3}$$

Il gas è quindi monoatomico. Per un gas monoatomico, infatti, $c_v = \frac{3}{2}$ e $c_p = \frac{5}{2}$, per cui

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \sim 1,67$$

La non perfetta corrispondenza è solo dovuta alle approssimazioni nell'indicare i dati nel testo.

Problema di: Termodinamica - $T0038b$

Testo *[T0038b]* [3 3 4a]
Una mole di gas compie una trasformazione adiabatica passando dalla temperatura $T_i = 20\,^\circ\mathrm{C}$ alla temperatura $T_f = 40\,^\circ\mathrm{C}$ e da un volume $V_i = 1\,m^3$ ad un volume $V_f = 0,794\,m^3$. Che tipo di gas si sta analizzando?

Spiegazione La trasformazione adiabatica fornisce i dati necessari per determinare il fattore γ, con in quale si può determinare se il gas è monoatomico, biatomico o poliatomico.

Svolgimento Per la legge delle trasformazioni adiabatiche avremo

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{293}{313} = (0,794)^{\gamma-1}$$

$$\gamma - 1 = \frac{\ln 0,936}{\ln 0,794} = 0,2867$$

$$\gamma = 1,2867 \sim \frac{9}{7}$$

Il gas è quindi poliatomico. Per un gas poliatomico, infatti, $c_v = \frac{7}{2}$ e $c_p = \frac{9}{2}$, per cui

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{9}{7} = 1,2857$$

La non perfetta corrispondenza è solo dovuta alle approssimazioni nell'indicare i dati nel testo.

Problema di: Termodinamica - $T0039$

Testo *[T0039]* [2⭐ 3⏳ 4a📖]
Una macchina di Carnot è costituita da $n = 2\,moli$ di un gas perfetto che compiono un ciclo tra le temperature $T_a = 227°\text{C}$ e $T_b = 127\,°\text{C}$. Alla temperatura più alta il gas assorbe una quantità di calore $\Delta Q = 13000\,J$. Calcolare il rendimento del ciclo, il lavoro fatto dal ciclo, ed il rapporto $\frac{V_f}{V_i}$ tra il volume finale e quello iniziale nell'isoterma a temperatura maggiore.

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare il rendimento del ciclo

$$\eta = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{400\,K}{500\,K} = 0,2$$

Il lavoro prodotto dal ciclo è

$$\delta L = \eta \cdot \delta Q_{ass} = 2600\,J$$

Durante la trasformazione isoterma superiore, il gas produce un lavoro

$$\delta L_1 = \delta Q_{ass} = nRT_a \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\frac{\delta Q_{ass}}{nRT_a} = \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\frac{V_f}{V_i} = e^{\frac{\delta Q_{ass}}{nRT_a}} = e^{1,564} = 4,78$$

Problema di: Termodinamica - $T0040$

Testo *[T0040]* [5⭐ 10⏳ 4a📖]
Venti moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \to B$: espansione adiabatica con $T_A = 400\,K$, $V_B = 2\,m^3$;

$B \to C$: compressione isoterma a temperatura $T_B = 300\,K$

$C \to A$: riscaldamento isocoro

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.8.

Svolgimento Il gas è monoatomico, quindi $\gamma = \frac{5}{3}$
Cominciamo con il calcolare la pressione in B

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 24930\,Pa$$

Considerando la trasformazione adiabatica avremo

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$V_A = V_B \cdot \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2\,m^3 \cdot 0,65 = 1,3\,m^3$$

La pressione in A è quindi

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 51138\,Pa$$

I valori delle variabili in C sono

$$T_C = T_B = 300\,K$$

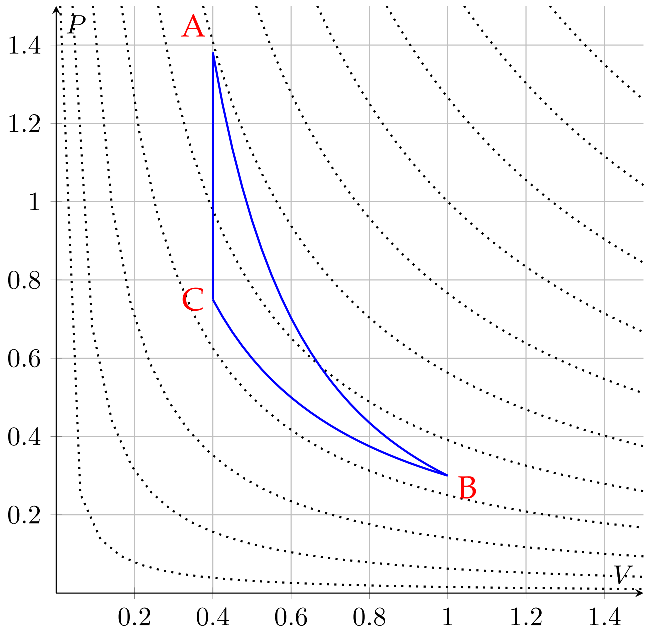


Fig. 4.8: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$V_C = V_A = 1,3\,m^3$$

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 38354\,Pa$$

Gli scambi di calore con il mondo esterno avvengono in ingresso nel riscaldamento isocoro ed in uscita nella compressione isoterma. Per cui

$$\delta Q_{ass} = nc_v \Delta T_{C\to A} = 20mol \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 100\,K = 24930\,J$$

$$\delta Q_{ced} = nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$\delta Q_{ced} = 20mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 300\,K\,\ln\left(0,65\right) = -21479\,J$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\eta = \frac{\delta Q_{ass} - \delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}} = 0,138$$

Problema di: Termodinamica - $T0041$

Testo *[T0041]* [3 4 4a]
In un recipiente di volume $V_r = 2\,m^3$ ci sono $m = 100\,kg$ di acqua, in equilibrio con il suo vapore. Il recipiente e mantenuto a temperatura costante $T = 60\,°C$. A quella temperatura la tensione di vapore dell'acqua è $P = 20\,kPa$. Quanto deve diventare il volume del recipiente per far condensare $m = 9\,g$ di acqua?

Spiegazione La compressione del gas, visto che è in equilibrio con il suo liquido, avviene a pressione costante e, in base alle informazioni del problema, anche a temperatura costante. La diminuzione del volume implica quindi la diminuzione del numero di molecole di gas.

Svolgimento Cominciamo con il considerare che $m_l = 100\,kg$ occupano un volume

$$V_l = \frac{m_l}{\rho_{H_2O}} = 100\,dm^3 = 0,1\,m^3$$

Per far condensare $m = 9\,g$ di acqua, devono condensare $n = 0,5\,moli$ di acqua, visto che il peso molecolare dell'acqua è 18. Abbiamo quindi che i valori iniziali delle variabili del gas sono $V_i = 2\,m^3 - 0,1\,m^3 = 1,9\,m^3$; $P_i = P = 20\,kPa$; $T_i = 60\,°C$;

$$n_i = \frac{P_iV_i}{RT_i} = \frac{20\,kPa \cdot 1,9\,m^3}{8,31\,\frac{J}{molK}333\,K} = 368\,mol$$

Il tipo di trasformazione considerata permette di scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} PV_i = n_iRT \\ PV_f = n_fRT \end{cases} \Rightarrow \qquad V_f = V_i\frac{n_f}{n_i} = 1,9\,m^3 \cdot \frac{367,5}{368} = 1,897\,m^3$$

Il volume complessivo del recipiente dovrà quindi diventare

$$V_{rf} = V_f + V_l = 1,997\,m^3$$

cioè dovrà comprimersi di

$$\Delta V = 3\,dm^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0042$

Testo *[T0042]* [4 3 4a]
In un contenitore rigido, $n_H = 2\,mol$ di idrogeno sono mescolate a $n_O = 1\,mol$ di ossigeno entrambi gassosi. La reazione chimica che produce acqua, libera anche un certo quantitativo di energia $Q_r = 451,2\,\frac{kJ}{mol_{H_2O}}$. Sapendo che il contenitore è tenuto alla temperatura costante $T = 200\,°C$, quanto calore è stato ceduto dal gas verso il mondo esterno?

Spiegazione La reazione chimica in questione libera dell'energia. Il gas che si viene a formare avrà nuove coordinate termodinamiche all'interno del contenitore. La differenza tra l'energia interna del gas prima della reazione e dopo la reazione, corrisponde all'energia prodotta dalla reazione ma rimasta all'interno del gas. La restante parte dell'energia viene ceduta al mondo esterno. La trasformazione in questione avviene a volume e temperatura costanti. La variazione del numero di molecole determina una variazione della pressione. La variazione del numero di molecole e del tipo di molecole determina una variazione dell'energia interna del gas.

Svolgimento L'energia interna del gas biatomico che abbiamo inizialmente è

$$U_i = \frac{5}{2}n_iRT = \frac{15}{2}RT$$

L'energia interna del vapore acqueo che abbiamo alla fine è

$$U_f = \frac{7}{2}n_fRT = \frac{14}{2}RT$$

Il calore ceduto al mondo esterno è dato quindi dalla somma del calore prodotto nella reazione chimica e di quello ceduto affinché il gas mantenga volume e temperatura.

$$\delta Q_{ced} = Q_r + \frac{15}{2}RT - \frac{14}{2}RT = Q_r + \frac{1}{2}RT = (451,2 \cdot 1000 + 8,31 \cdot 473)\ J = 455131\,J$$

Problema di: Termodinamica - $T0043$

Testo [T0043] [2 3 4a]
Due moli di gas ideale monoatomico si espandono assorbendo $\delta Q = 12\,kJ$ di calore. Sapendo che il lavoro compiuto dal gas è pari al doppio della sua variazione di energia interna, calcola la variazione di temperatura del gas.

Spiegazione In questa generica trasformazione utilizzeremo il primo principio della termodinamica. Con esso ricaveremo la variazione di energia interna del gas e di conseguenza la variazione di temperatura.

Svolgimento Sappiamo che

$$\Delta U = \delta Q - \delta L = \delta Q - 2\Delta U$$

$$\Delta U = \frac{1}{3}\delta Q$$

La variazione di energia interna di un gas monoatomico è legata alla temperatura attraverso la relazione

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

e quindi avremo

$$\Delta T = \frac{2}{9nR}\Delta Q = 160\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0044$

Testo [T0044] [2 7 4a]
Tre moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei quattro stati A, B, C, D.

$A \rightarrow B$: riscaldamento isocoro con $P_a = 10^5\,Pa$, $P_b = 4P_a$ e $T_a = 300\,K$

$B \rightarrow C$: espansione isobara con $V_c = 2V_b$

$C \rightarrow D$: espansione isoterma con $P_d = P_a$

$D \rightarrow A$: compressione isobara

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste.

Svolgimento Le coordinate termodinamiche che dobbiamo determinare sono

$$\begin{cases} P_a = ? \\ T_a = ? \\ V_a = ? \end{cases} \quad \begin{cases} P_b = ? \\ T_b = ? \\ V_b = ? \end{cases} \quad \begin{cases} P_c = ? \\ T_c = ? \\ V_c = ? \end{cases} \quad \begin{cases} P_d = ? \\ T_d = ? \\ V_d = ? \end{cases}$$

Utilizzando le informazioni del testo sui valori delle variabili e sul tipo di trasformazioni, avremo

$$\begin{cases} P_a = 10^5\,Pa \\ T_a = 300\,K \\ V_a = ? \end{cases} \quad \begin{cases} P_b = 4P_a \\ T_b = ? \\ V_b = V_a \end{cases} \quad \begin{cases} P_c = P_b = 4P_a \\ T_c = T_b \\ V_c = 2V_b = 2V_a \end{cases} \quad \begin{cases} P_d = P_a \\ T_d = T_c \\ V_d = ? \end{cases}$$

Utilizziamo adesso la legge dei gas per trovare nell'ordine V_a, V_b, T_b, T_c, T_d, V_d

$$\begin{cases} P_a = 10^5\,Pa \\ T_a = 300\,K \\ V_a = \dfrac{nRT_a}{P_a} = 0,07479\,m^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_b = 4P_a = 4\cdot 10^5\,Pa \\ T_b = \dfrac{4nRT_a}{nR} = 4T_a = 1200\,K \\ V_b = V_a = 0,07479\,m^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_c = 4\cdot 10^5\,Pa \\ T_c = T_b = 2400\,K \\ V_c = 0,14958\,m^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_d = 10^5\,Pa \\ T_d = T_c = 2400\,K \\ V_d = \dfrac{nRT_d}{P_d} = 0,59832\,m^3 \end{cases}$$

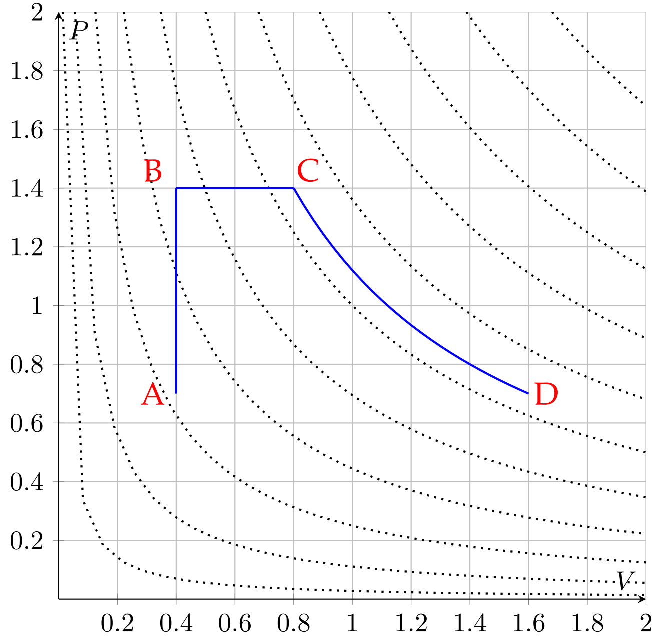


Fig. 4.9: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

Problema di: Termodinamica - $T0045$

Testo *[T0045]* [3 9 4a]
Tre moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione indicata di seguito. Calcola il lavoro fatto dalla trasformazione.

$A \rightarrow B$: riscaldamento isocoro con $P_b = 4P_a$ e $T_a = 300\,K$

$B \rightarrow C$: espansione isobara con $V_c = 2V_d$

$C \rightarrow D$: espansione isoterma con $P_d = P_a$

Spiegazione Per calcolare il lavoro della trasformazione dobbiamo calcolare e poi sommare l lavori nelle singole trasformazioni.

Svolgimento

$$\delta L_{A\rightarrow D} = \delta L_{A\rightarrow B} + \delta L_{B\rightarrow C} + \delta L_{C\rightarrow D}$$

Il lavoro della trasformazione isocora è nullo.

Per le altre due trasformazioni avremo

$$\delta L_{A\rightarrow D} = 0 + P_b\cdot(V_c - V_b) + nRT_c \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)$$

Utilizzando le informazioni del testo sui valori delle variabili e sul tipo di trasformazioni, ed utilizzando la legge dei gas, avremo

$$\begin{cases} T_a = 300\,K \\ V_a = \dfrac{nRT_a}{P_a} \end{cases} \qquad \begin{cases} P_b = 4P_a \\ V_b = V_a \\ T_b = \dfrac{P_bV_b}{nR} = 4T_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_c = P_b = 4P_a \\ V_c = 2V_b = 2V_a \\ T_c = \dfrac{P_cV_c}{nR} = 8T_a \end{cases} \qquad \begin{cases} P_d = P_a \\ T_d = T_c \\ V_d = \dfrac{nRT_d}{P_d} = \dfrac{8nRT_a}{P_a} = 8V_a \end{cases}$$

Il calcolo del lavoro risulta quindi

$$\delta L_{A\rightarrow D} = 2P_bV_b + nRT_c\ln 4 = 8nRT_a + 8nRT_a\ln 4 = 8\,(1+\ln 4)\,nRT_a = 142,8\,kJ$$

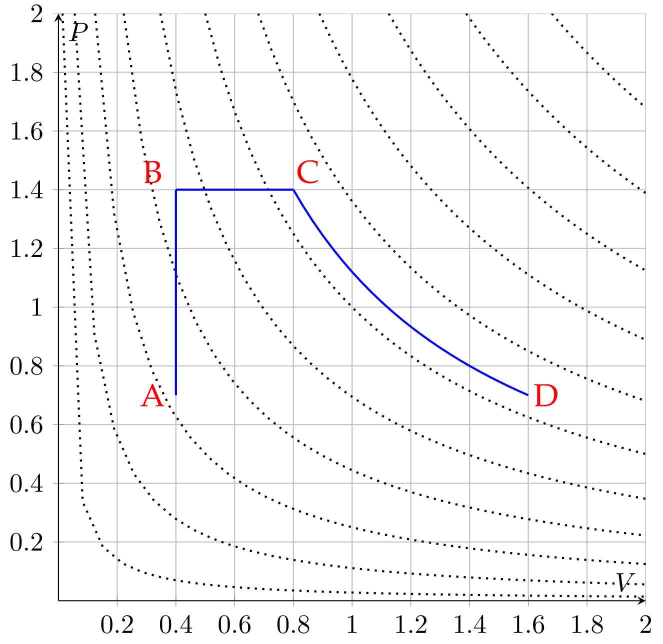


Fig. 4.10: *Tre trasformazioni in sequenza.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

Problema di: Termodinamica - $T0046$

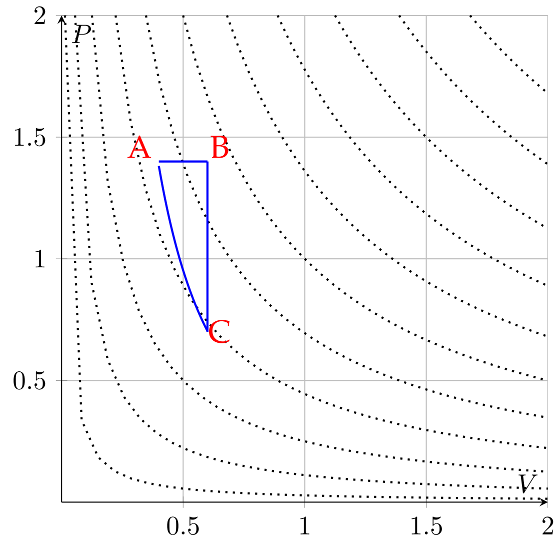
Testo *[T0046]* [4 10 4a]
Due moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \to B$: espansione isobara con $T_A = 400\,K$, $V_A = 2\,m^3$, $V_B = 6\,m^3$;

$B \to C$: raffreddamento isocoro

$C \to A$: compressione adiabatica

Spiegazione Per calcolare le varie coordinate termodinamiche occorre utilizzare la legge dei gas e le informazioni sulle singole trasformazioni. IL calcolo del rendimento avverrà calcolando gli scambi di calore durante tutte le trasformazioni del ciclo.



Svolgimento

Le trasformazioni di questo esercizio sono mostrate in figura. I valori sugli assi sono arbitrari e non in relazione con l'esercizio. Cominciamo con il considerare lo stato A

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 3324\,Pa$$

Considerando la trasformazione isobara $A \to B$ avremo

$$P_B = P_A = 3324\,Pa$$

Considerando lo stato B avremo

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 1200\,K$$

Lo stato C ha un volume $V_C = V_B = 6\,m^3$ in quanto raggiunto da B con una trasformazione isocora. Quello stato è raggiunto da A con una trasformazione adiabatica, quindi

$$P_C V_C^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

$$P_C = P_A \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{5}{3}} = 533\,Pa$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 192,3\,K$$

Calcoliamo adesso il rendimento del ciclo Il ciclo assorbe calore durante la trasformazione isobara e cede calore durante il raffreddamento isocoro. Calcoliamo i calori scambiati in valore assoluto

$$\delta Q_{ass} = nc_p\,|\Delta T_{A\to B}|$$

$$\delta Q_{ced} = nc_v\,|\Delta T_{B\to C}|$$

$$\eta = 1 - \frac{\delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}}$$

$$\eta = 1 - \frac{c_v \Delta T_{B\to C}}{c_p \Delta T_{C\to B}}$$

$$\eta = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1008\,K}{800\,K} = 24,4\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0047$

Testo *[T0047]* [2 3 4a]

Due moli di gas ideale monoatomico si espandono assorbendo $\delta Q = 12\,kJ$ di calore. Sapendo che il lavoro compiuto dal gas è pari a metà del calore assorbito, calcola la variazione di temperatura del gas. *[per il calcolo di ΔU cercate una opportuna trasformazione]*

Spiegazione Questa trasformazione è un'espansione di cui non conosciamo nulla sul percorso fatto. L'unica cosa che possiamo utilizzare è il primo principio della termodinamica. A questo punto il calcolo della variazione di energia interna, che non dipende dal percorso fatto, è fattibile considerando una trasformazione isocora seguita da una trasformazione isoterma.

Svolgimento Definiamo A e B gli stati iniziale e finale della trasformazione. Per il primo principio della termodinamica possiamo scrivere

$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$

$$\Delta U = \delta Q - \frac{1}{2}\delta Q$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\delta Q$$

Se consideriamo una trasformazione isocora che dallo stato A conduce il gas a temperatura T_B e successivamente una trasformazione isoterma che porta nello stato B, allora

$$\Delta U = \Delta U_{isocora} + \Delta U_{isoterma} = nc_v \Delta T + 0$$

quindi

$$nc_v \Delta T = \frac{1}{2}\delta Q$$

$$\Delta T = \frac{1}{2nc_v}\delta Q = \frac{12\,kJ}{3mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK}} = 481,3\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0048$

Testo *[T0048]* [2 3 4a]
Due moli di gas ideale monoatomico si espandono assorbendo $\delta Q = 12\,kJ$ di calore. Sapendo che la variazione di energia interna è pari a metà del calore assorbito, calcola la variazione di temperatura del gas.

Spiegazione In questa generica trasformazione utilizzeremo il primo principio della termodinamica. Con esso ricaveremo la variazione di energia interna del gas e di conseguenza la variazione di temperatura.

Svolgimento Sappiamo che

$$\Delta U = \frac{1}{2}\delta Q$$

Questo significa che metà del calore assorbito è uscito sotto forma di lavoro, infatti

$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$

$$\delta L = \frac{1}{2}\delta Q$$

La variazione di energia interna di un gas monoatomico è legata alla temperatura attraverso la relazione

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

e quindi avremo

$$\Delta T = \frac{1}{3nR}\Delta Q = 241\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0049$

Testo *[T0049]* [4 10 4a]

Due moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \to B$: compressione isobara con $T_A = 400\,K$, $V_A = 6\,m^3$, $V_B = 2\,m^3$;

$B \to C$: riscaldamento isocoro

$C \to A$: espansione adiabatica

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.11. Il rendimento del ciclo lo si trova poi analizzando gli scambi di calore durante la trasformazione.

Svolgimento Il gas è monoatomico, quindi $\gamma = \frac{5}{3}$
Cominciamo con il calcolare la pressione nello stato A

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \frac{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol K} \cdot 400\,K}{6\,m^3} = 1108\,Pa$$

da cui, tenendo conto che $B \to C$ è un'isobara, avremo

$$P_B = P_A = 1108\,Pa\,K$$

Calcoliamo ora la temperatura in B

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{1108\,Pa \cdot 2\,m^3}{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol K}} = 133\,K$$

Considerando la trasformazione isocora avremo

$$V_C = V_B = 2\,m^3$$

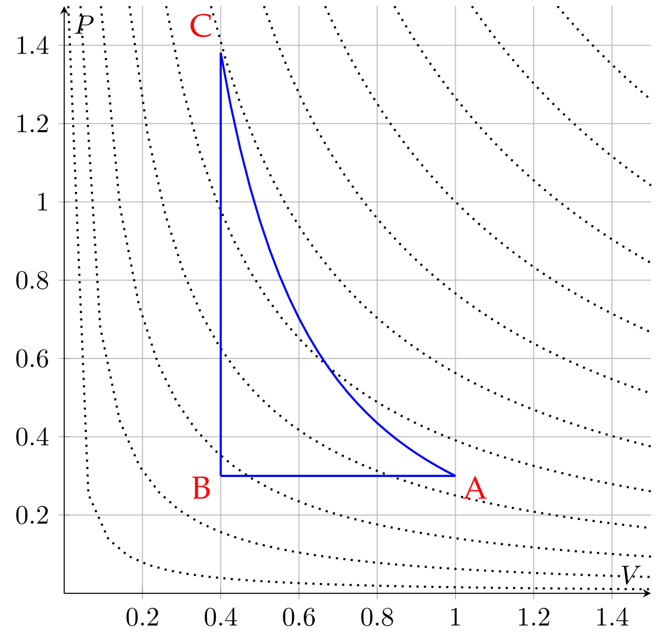


Fig. 4.11: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

$$T_C = T_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 400\,K \cdot 0,48 = 832\,K$$

La pressione in C è quindi

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 6914\,Pa$$

I valori delle variabili in C sono

$$T_C = 832\,K$$

$$V_C = 2\,m^3$$

$$P_C = 6914\,Pa$$

Gli scambi di calore con il mondo esterno avvengono in ingresso nel riscaldamento isocoro ed in uscita nella compressione isobara. Per cui

$$\delta Q_{ass} = nc_v \Delta T_{B\to C} = 2\,mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot (699\,K) = 17426\,J$$

$$\delta Q_{ced} = nc_p \Delta T_{A\to B} = -11094\,J$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\eta = \frac{\delta Q_{ass} - |\delta Q_{ced}|}{\delta Q_{ass}} = 36,3\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0050$

Testo *[T0050]* [4 10 4a]
Due moli di gas perfetto biatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \to B$: espansione adiabatica con $T_A = 500\,K$, $V_B = 2\,m^3$;

$B \to C$: compressione isoterma

$C \to A$: riscaldamento isocoro con assorbimento di $\delta Q_{ass} = 2\,kJ$

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.12. Il rendimento del ciclo lo si trova poi analizzando gli scambi di calore durante la trasformazione.

Svolgimento Il gas è biatomico, quindi $\gamma = \frac{7}{5}$
Cominciamo con il calcolare la variazione di temperatura durante la trasformazione $C \to A$

$$\Delta T_{C\to A} = \frac{\delta Q}{nc_v} = 48\,K$$

da cui, tenendo conto che $B \to C$ è un'isoterma, avremo

$$T_B = T_C = T_A - \Delta T_{C\to A} = 452\,K$$

Calcoliamo ora la pressione in B

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 452\,K}{2\,m^3} = 3756\,Pa$$

Considerando la trasformazione adiabatica avremo

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

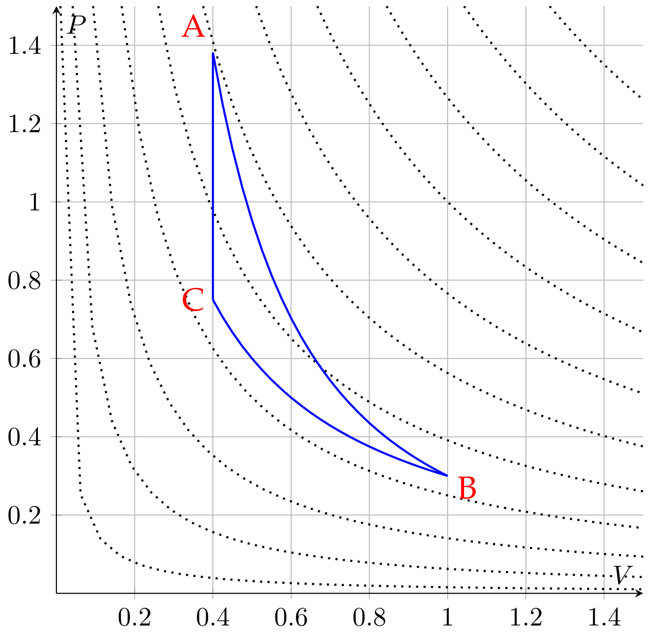


Fig. 4.12: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$V_A = V_B \cdot \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2\,m^3 \cdot 0,96 = 1,92\,m^3$$

Considerando la trasformazione isocora $C \rightarrow A$ avremo

$$V_C = V_A = 1,92\,m^3$$

La pressione in A è quindi

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 4155\,Pa$$

I valori delle variabili in C sono

$$T_C = T_B = 452\,K$$

$$V_C = V_A = 1,92\,m^3$$

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 3913\,Pa$$

Gli scambi di calore con il mondo esterno avvengono in ingresso nel riscaldamento isocoro ed in uscita nella compressione isoterma. Per cui

$$\delta Q_{ced} = nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$\delta Q_{ced} = 2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 452\,K \ln(0,96) = -307\,J$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\eta = \frac{\delta Q_{ass} - \delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}} = 0,8465 = 84,65\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0050a$

Testo *[T0050a]* [4 10 4a]
Due moli di gas perfetto biatomico compiono la trasformazione ciclica indicata di seguito. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei tre stati A, B, C. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \to B$: espansione adiabatica con $T_B = 500\,K$, $V_A = 2\,m^3$;

$B \to C$: compressione isoterma con calore ceduto di $\delta Q_{ced} = -1\,kJ$

$C \to A$: riscaldamento isocoro

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il diagramma delle trasformazioni è rappresentato in figura 4.13. Il rendimento del ciclo lo si trova poi analizzando gli scambi di calore durante la trasformazione.

Svolgimento Il gas è biatomico, quindi $\gamma = \frac{7}{5}$
La trasformazione $C \to A$ è un'isocora, quindi

$$V_C = V_A = 2\,m^3$$

Cominciamo con il calcolare il volume della stato B grazie alla trasformazione $B \to C$

$$\delta Q_{ced} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$e^{\frac{\delta Q_{ced}}{nRT_B}} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$V_B = V_C \cdot e^{-\frac{\delta Q_{ced}}{nRT_B}}$$

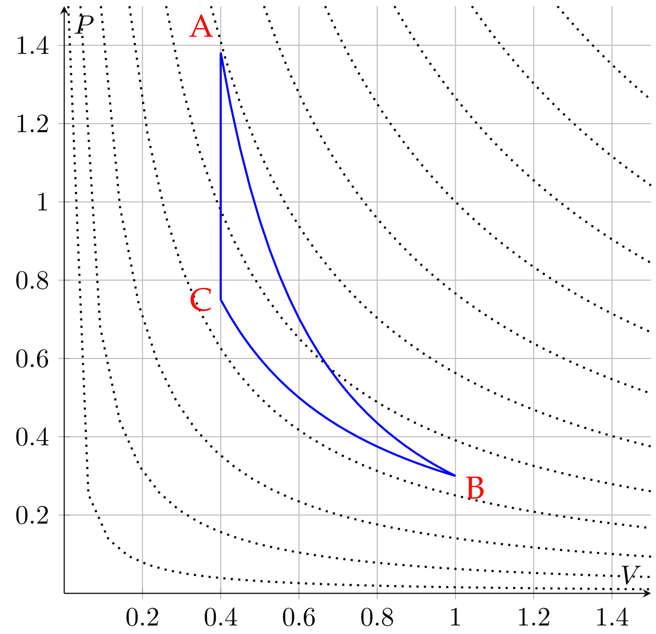


Fig. 4.13: *Un ciclo termodinamico.* [Nel grafico le unità numeriche sono arbitrarie e non in relazione con l'esercizio.]

$$V_B = 2\,m^3 e^{\frac{1000\,J}{2\cdot 8,31\,\frac{J}{molK}\,500\,K}} = 2,256\,m^3$$

La pressione in B è quindi

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 500\,K}{2,256\,m^3} = 3684\,Pa$$

La pressione in C è quindi

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{2mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 500\,K}{2\,m^3} = 4155\,Pa$$

Considerando la trasformazione adiabatica $A \to B$ avremo

$$P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}$$

$$P_A = P_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = 3684\,Pa \cdot 1,18 = 4361\,Pa$$

Infine

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 525\,K$$

Gli scambi di calore con il mondo esterno avvengono in ingresso nel riscaldamento isocoro ed in uscita nella compressione isoterma. Per cui

$$\delta Q_{ass} = n c_v \Delta T_{C\to A}$$

$$\delta Q_{ass} = 2mol \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31\,\frac{J}{mol K} \cdot 25\,K = 1039\,J$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\eta = \frac{\delta Q_{ass} - \delta Q_{ced}}{\delta Q_{ass}} = 0,037 = 3,7\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0051$

Testo *[T0051]* [2 3 4a]
Due moli di gas ideale monoatomico si espandono compiendo un lavoro $\delta L = 5\,kJ$. Sapendo che il lavoro compiuto dal gas è pari al doppio del calore assorbito, calcola la variazione di temperatura del gas.

Spiegazione In questa generica trasformazione utilizzeremo il primo principio della termodinamica. Con esso ricaveremo la variazione di energia interna del gas e di conseguenza la variazione di temperatura.

Svolgimento Sappiamo che

$$\Delta U = \delta Q - \delta L = \frac{1}{2}\delta L - \delta L$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\delta L$$

La variazione di energia interna di un gas monoatomico è legata alla temperatura attraverso la relazione

$$\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T$$

e quindi avremo

$$\Delta T = -\frac{1}{3nR}\Delta L = -100,3\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0052$

Testo *[T0052]* [5 5 4a]

Un frigorifero lavora tra una temperatura ambiente $T_a = 28\,°\mathrm{C}$ ed una temperatura interna $T_b = 5\,°\mathrm{C}$. Calcola il coefficiente di prestazione del frigorifero. Sapendo che per raffreddare $m = 500\,g$ di broccoli (calore specifico $c_s = 3850\,\frac{J}{kgK}$) vengono consumati $\delta L = 9000\,J$, indica se si tratta di una macchina termica reversibile. Calcola le variazioni di entropia dei broccoli e dell'ambiente.

Spiegazione I calcoli delle grandezze avvengono semplicemente applicando i concetti di base al problema ed utilizzando i dati forniti. Per affermare se una macchina termica è reversibile o meno, è possibile paragonare il rendimento teorico ed effettivo della macchina stessa.

Svolgimento Le temperature della macchina termica sono $T_a = 28\,°\mathrm{C} = 301\,K$ e $T_a = 5\,\mathrm{celsius} = 278\,K$

La macchina ha sottratto ai broccoli

$$\delta Q_b = c_s m \Delta T = 3850\,\frac{J}{kgK} \cdot 0,5\,kg \cdot 23\,K = 44275\,J$$

Il rendimento teorico della macchina è quindi

$$\eta_t = 1 - \frac{T_b}{T_a} = \frac{23}{301} = 7,64\%$$

Nella realtà la macchina ha avuto un rendimento

$$\eta_r = 1 - \frac{\delta Q_b}{\delta Q_a} = 1 - \frac{\delta Q_b}{\delta Q_b + \delta L} = 1 - \frac{44275}{44275 + 9000} = 16,9\%$$

La macchina ha un rendimento reale differente a quello teorico, quindi è irreversibile.

La variazione di entropia dei broccoli è calcolabile con la formula

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} c_s m \frac{dT}{T} = c_s m \ln\frac{T_f}{T_i} = 3850\,\frac{J}{kgK} \cdot 0,5\,kg \cdot \ln\frac{278}{301} = -153,0\,\frac{J}{K}$$

La variazione di entropia dell'ambiente avviene durante una trasformazione a temperatura costante, ma per il calcolo è necessario considerare una trasformazione reversibile. Nel ciclo reversibile, la macchina frigorifera avrebbe assorbito un lavoro differente e quindi ceduto alla sorgente calda un calore differente, pari a

$$\delta Q_{at} = \frac{\delta Q_b}{1 - \eta_t} == \frac{44275\,J}{1 - 0,0764} = 47937,4\,J$$

Quindi, scegliendo una trasformazione reversibile che permetta alla macchina termica di funzionare in modo reversibile e quindi farci calcolare in modo corretto le variazioni di entropia, avremo

$$\Delta S = \frac{\delta Q_{at}}{T} = \frac{47937,4\,J}{301\,K} = 159,3\,\frac{J}{K}$$

L'entropia totale del sistema fisico è quindi aumentata essendo

$$\Delta S_{tot} = +6,3\,\frac{J}{K}$$

Problema di: Termodinamica - $T0054$

Testo [T0054] [5 12 4a]

Cinquanta moli di gas biatomico compiono un ciclo Diesel formato da due adiabatiche, un'isobara ed un'isocora. Disegna la trasformazione nel piano (P,V) e determina le coordinate termodinamiche dei quattro stati A, B, C, D vertici della trasformazione. Calcola poi il rendimento del ciclo.

$A \rightarrow B$: riscaldamento isobaro con $P_A = 10^6\,Pa$, $V_A = 0,1\,m^3$, $T_B = 800\,K$

$B \rightarrow C$: espansione adiabatica con $V_C = 2V_B$

$C \rightarrow D$: raffreddamento isocoro

$D \rightarrow A$: compressione adiabatica

Spiegazione Le informazioni date dal testo del problema sono sufficienti, semplicemente utilizzando le leggi della termodinamica, per determinare tutte le grandezze richieste. Il rendimento del ciclo lo si trova poi analizzando gli scambi di calore durante la trasformazione.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la temperatura dello stato A:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{10^6\,Pa \cdot 0,1\,m^3}{50\,mol \cdot 8,31\,\frac{J}{mol\,K}} = 241\,K$$

Possiamo adesso conoscere lo stato B:

$$P_B = P_A = 10^6\,Pa$$

$$V_B = \frac{V_A T_B}{T_A} = 0,33\,m^3$$

L'espansione adiabatica, con $\gamma = \frac{7}{5}$ in quanto gas biatomico, ci permette di avere informazioni sullo stato C:

$$V_C = 2V_B = 0,66\,m^3$$

$$P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

$$P_C = P_B \frac{V_B}{V_C}^\gamma = 10^6\,Pa \cdot 2^{-\frac{7}{5}} = 3,8 \cdot 10^5\,Pa$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 602\,K$$

Per quanto riguarda lo stato D dovremo intersecare la trasformazione isobara con la compressione adiabatica

$$V_D = V_C = 0,66\,m^3$$

$$P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$$

$$P_D = P_A \frac{V_A}{V_D}^\gamma = 10^6\,Pa \cdot 6,6^{-\frac{7}{5}} = 7 \cdot 10^4\,Pa$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 111\,K$$

Calcoliamo adesso il rendimento del ciclo. Il gas scambia lavoro durante l'espansione isobara, l'espansione adiabatica e la compressione adiabatica. Il gas assorbe calore durante l'espansione isobara. Quindi:

$$\delta L_{A\rightarrow B} = P \cdot \Delta V_{A\rightarrow B} = 10^6\,Pa \cdot 0,23\,m^3 = 2,3 \cdot 10^5\,J$$

$$\delta L_{B\rightarrow C} = -nc_v \Delta T_{B\rightarrow C} = -50\,mol \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31\,\frac{J}{mol\,K} \cdot (-198\,K) = 2,1 \cdot 10^5\,J$$

$$\delta L_{D\rightarrow A} = -nc_v \Delta T_{D\rightarrow A} = -50\,mol \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31\,\frac{J}{mol\,K} \cdot (130\,K) = -1,4 \cdot 10^5\,J$$

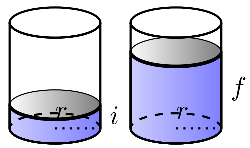
$$\delta Q_{A\rightarrow B} = nc_p \Delta T = 8,1 \cdot 10^5\,J$$

Il rendimento è quindi

$$\eta = \frac{\delta L_{tot}}{\delta Q_{ass}} = \frac{3}{8,1} = 37\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0055$

Testo *[T0055]* [3 4 4a]
Due moli di ossigeno gassoso sono contenute in un cilindro a pressione costante chiuso da un pistone mobile. Il gas si trova alla temperatura iniziale $T_i = 300\,K$ ed al volume iniziale $V_i = 5\,dm^3$. Il gas viene scaldato in modo da triplicarne il volume. Quanto lavoro e quanto calore sono scambiati dal gas?



Spiegazione Il cilindro ha un pistone mobile che mantiene il gas a pressione costante.

Svolgimento Essendo la trasformazione a pressione costante avremo che

$$\frac{T_i}{V_i} = \frac{T_f}{V_f}$$

da cui

$$T_f = T_i \frac{V_f}{V_i} = 900\,K$$

Per determinare la pressione a cui si trova il gas possiamo nuovamente utilizzare la legge dei gas

$$P = \frac{nRT_i}{V_i} = \frac{2 \cdot 8,314\,\frac{J}{mol\,K} \cdot 300\,K}{0,005\,m^3} = 10\,atm$$

Il lavoro fatto dal gas è

$$\delta L = P \cdot \Delta V = 10^6\,Pa \cdot 10^{-2}\,m^3 = 10^4\,J$$

La variazione di energia interna interna sarà

$$\Delta U = nc_v\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = 5\,mol \cdot 8,31\,\frac{J}{molK} \cdot 600\,K = 24930\,J$$

Quindi il calore scambiato sarà

$$\delta Q = \Delta U + \delta L = 34930\,J$$

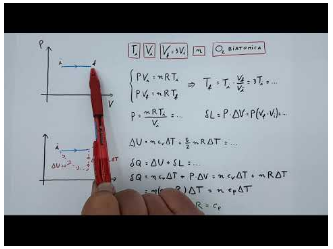


Fig. 4.14: *Guarda il video youtu.be/x8xyQGsoaf0*

Problema di: Termodinamica - $T0056$

Testo *[T0056]* [4 5 4a]
Un gas biatomico compie una trasformazione isoterma dallo stato $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ raddoppiando il suo volume. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A \to B$ utilizzando un riscaldamento isocoro ed una espansione adiabatica, quale pressione massima verrebbe raggiunta?

Spiegazione Identificate lo stato B; successivamente trovate lo stato X che rappresenta l'intersezione tra l'isocora che passa da A e l'adiabatica che passa da B. Il percorso $A \to C \to B$ è il percorso indicato dal testo dell'esercizio. La pressione dello stato X è la risposta al problema.

Svolgimento Lo stato B è identificabile tramite la legge dei gas.

$$\begin{cases} P_a V_a = nRT \\ P_b V_b = nRT \end{cases} \Rightarrow P_b = \frac{P_a V_a}{V_b} = \frac{P_a}{2} = 5 \cdot 10^4\,Pa$$

L'adiabatica che passa da B è identificata dall'equazione

$$P_b V_b^\gamma = P_x V_x^\gamma$$

Il fattore $\gamma = \frac{7}{5}$ è determinato sapendo che il gas è un gas biatomico. Considerando che la trasformazione $A \to X$ è isocora abbiamo

$$P_b V_b^\gamma = P_x V_a^\gamma$$

$$P_b \cdot 2^\gamma = P_x$$

$$P_x = 2^{\frac{7}{5}} \cdot 5 \cdot 10^4\,Pa = 1,3 \cdot 10^5\,Pa$$

Problema di: Termodinamica - $T0057$

Testo *[T0057]* [3 3 4a]
Un ciclo di Carnot (due isoterme e due adiabatiche) di rendimento $\eta = 25\%$ parte dallo stato $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ con un'espansione isoterma. Esso produce un lavoro $\delta L = 1000\,J$. Determina la temperatura alla quale cede calore, il calore assorbito, il volume finale della trasformazione isoterma.

Spiegazione Sapendo che il ciclo termodinamico in questione è quello di Carnot, è sufficiente applicare le leggi a riguardo.

Svolgimento Il rendimento di un ciclo termodinamico di Carnot è

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 1 - \frac{T_b}{T_a}$$

Avremo quindi che il calore assorbito è

$$\delta Q = \frac{\delta L}{\eta} = 4000\,J$$

Allo stesso modo possiamo calcolare la temperatura dell'isoterma fredda

$$T_b = T_a\,(1-\eta) = 225\,K$$

Il numero di moli del gas è ricavabile con la legge dei gas

$$n = \frac{P_A V_A}{RT} = 80\,mol$$

Sappiamo che il calore è assorbito durante l'espansione adiabatica

$$\delta Q_{ass} = nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$e^{\frac{\delta Q_{ass}}{nR}} = \frac{V_B}{V_A}$$

$$V_B = V_A e^{\frac{\delta Q_{ass}}{nR}} = 6\,m^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0058$

Testo *[T0058]* [4 5 4a]
Un gas monoatomico compie una trasformazione isoterma dallo stato termodinamico $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ raddoppiando il suo volume. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A \to B$ utilizzando nell'ordine un riscaldamento isobaro ed una espansione adiabatica, quale temperatura massima verrebbe raggiunta?

Spiegazione Per questa trasformazione è necessario applicare le leggi relative alle trasformazioni indicate. Disegnate il percorso delle trasformazioni sul piano di Clapeyron per orientarvi nella comprensione della soluzione.

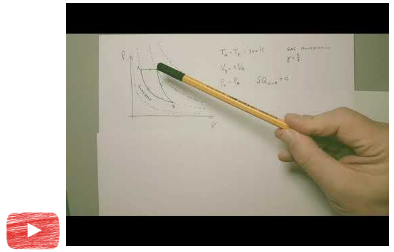


Fig. 4.15: *Guarda il video youtu.be/E1hO044Cau0*

Svolgimento Lo stato finale B, utilizzando la legge dei gas

$$P_A V_A = P_B V_B$$

è dato da $B\left(5\cdot 10^4\,Pa; 4\,m^3; 300\,K\right)$
La massima temperatura raggiunta è quella dello stato intermedio C dato da

$$\begin{cases} T_A V_C = T_C V_A \\ T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_A V_C = T_C V_A \\ T_C V_C^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1} T_A V_A^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_A V_C}{V_A} = T_C \\ \frac{T_A V_C^\gamma}{V_A} = 2^{\gamma-1} T_A V_A^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_A V_C}{V_A} = T_C \\ V_C^\gamma = 2^{\gamma-1} V_A^\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_A V_C}{V_A} = T_C \\ V_C = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} V_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_C = T_A 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ V_C = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} V_A \end{cases}$$

Per cui

$$T_C = T_A 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 396\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0058a$

Testo *[T0058a]* [4 5 4a] Un gas monoatomico compie una trasformazione isoterma a partire dallo stato termodinamico $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ raddoppiando il suo volume. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A \to B$ utilizzando nell'ordine un riscaldamento isocoro ed una espansione adiabatica, quale temperatura massima verrebbe raggiunta?

Spiegazione Identificate lo stato B; successivamente trovate lo stato X che rappresenta l'intersezione tra l'isocora che passa da A e l'adiabatica che passa da B. Il percorso $A \to C \to B$ è il percorso indicato dal testo dell'esercizio. La pressione dello stato X è la risposta al problema.

Svolgimento Lo stato B è identificabile tramite la legge dei gas.

$$\begin{cases} P_a V_a = nRT \\ P_b V_b = nRT \end{cases} \Rightarrow P_b = \frac{P_a V_a}{V_b} = \frac{P_a}{2} = 5 \cdot 10^4\,Pa$$

L'adiabatica che passa da B è identificata dall'equazione

$$T_b V_b^{\gamma-1} = T_x V_x^{\gamma-1}$$

Il fattore $\gamma = \frac{5}{3}$ è determinato sapendo che il gas è un gas monoatomico. Quindi

$$T_b V_b^{\frac{2}{3}} = T_x V_x^{\frac{2}{3}}$$

Considerando che la trasformazione $A \to X$ è isobara abbiamo

$$T_b P_b^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_x P_x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_b P_b^{-\frac{2}{5}} = T_x P_a^{-\frac{2}{5}}$$

$$T_x = T_b \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 396\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0058b$

Testo *[T0058b]* [4 5 4a]
Un gas monoatomico compie una trasformazione isoterma a partire dallo stato termodinamico $A\left(10^5\,Pa;2\,m^3;300\,K\right)$ raddoppiando il suo volume. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A\rightarrow B$ utilizzando nell'ordine una espansione adiabatica ed un riscaldamento isocoro, quale temperatura minima verrebbe raggiunta?

Spiegazione Per questa trasformazione è necessario applicare le leggi relative alle trasformazioni indicate. Disegnate il percorso delle trasformazioni sul piano di Clapeyron per orientarvi nella comprensione della soluzione.

Svolgimento Lo stato finale B, utilizzando la legge dei gas

$$P_A V_A = P_B V_B$$

è dato da $B\left(5\cdot 10^4\,Pa;4\,m^3;300\,K\right)$
La minima temperatura raggiunta è quella dello stato intermedio C dato da

$$\begin{cases} T_B P_C = T_C P_B \\ P_C V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2T_A P_C = T_C P_A \\ P_C V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_C = \dfrac{T_C P_A}{2T_A} \\ \dfrac{T_C P_A}{2T_A} V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_C = \dfrac{T_C P_A}{2T_A} \\ \dfrac{T_C}{2T_A} V_A^{\gamma}\cdot 2^{\gamma} = V_A^{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_C = \frac{T_C P_A}{2T_A} \\ \frac{T_C}{2T_A} = 2^{-\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_C = \frac{T_C P_A}{2T_A} \\ T_C = 2^{1-\gamma} T_A \end{cases}$$

$$T_C = 0,63 * 300\, K = 189\, K$$

Problema di: Termodinamica - $T0058c$

Testo *[T0058c]* [4 5 4a]
Un gas monoatomico compie una trasformazione isoterma a partire dallo stato termodinamico $A\left(10^5\, Pa; 2\, m^3; 300\, K\right)$ raddoppiando il suo volume. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A \to B$ utilizzando nell'ordine una espansione adiabatica ed un riscaldamento isobaro, quale temperatura minima verrebbe raggiunta?

Spiegazione Per questa trasformazione è necessario applicare le leggi relative alle trasformazioni indicate. Disegnate il percorso delle trasformazioni sul piano di Clapeyron per orientarvi nella comprensione della soluzione.

Svolgimento Lo stato finale B, utilizzando la legge dei gas

$$P_A V_A = P_B V_B$$

è dato da $B\left(5 \cdot 10^4\, Pa; 4\, m^3; 300\, K\right)$
La minima temperatura raggiunta è quella dello stato intermedio C dato da

$$\begin{cases} T_B V_C = T_C V_B \\ T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_B V_C = T_C V_B \\ T_C V_C^{\gamma-1} = 2^{1-\gamma} T_B V_B^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_C V_B}{T_B} = V_C \\ T_C \frac{T_C^{\gamma-1} V_B^{\gamma-1}}{T_B^{\gamma-1}} = 2^{1-\gamma} T_B V_B^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_C V_B}{T_B} = V_C \\ T_C^{\gamma} V_B^{\gamma-1} = 2^{1-\gamma} T_B^{\gamma} V_B^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_C V_B}{T_B} = V_C \\ T_C = 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_B \end{cases}$$

da cui, essendo $\gamma = \frac{5}{3}$ in quanto il gas è monoatomico, avremo

$$T_C = 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_B = 227,4\,K$$

Problema di: Termodinamica - $T0059$

Testo *[T0059]* [4 12 4a]
Un gas monoatomico compie un ciclo rettangolare (due isocore e due isobare) che parte dallo stato $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ con un'espansione isobara che ne raddoppia il volume. Il ciclo produce un lavoro $\delta L = 1000\,J$. Calcola le coordinate dei quattro stati della trasformazione ed il rendimento del ciclo.

Spiegazione In questo esercizio applichiamo le leggi dei gas e delle trasformazioni termodinamiche indicate. Calcolando poi il calore scambiato otteniamo il rendimento del ciclo.

Svolgimento Cominciamo con il calcolarci il numero di moli del gas considerando i valori dello stato A

$$n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 80,22\,moli$$

Considerando la trasformazione isobara $A \rightarrow B$ avremo

$$P_B = P_A = 10^5\,Pa$$

$$T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 600\,K$$

Il lavoro compiuto dal gas è

$$\delta L = P_A \Delta V - P_C \Delta V$$

quindi

$$P_C = P_A - \frac{\delta L}{\Delta V} = 99500\,Pa$$

Considerando l'isobara $B \rightarrow C$ avremo

$$V_C = V_B = 4\,m^3$$

$$T_C = T_B \frac{P_B}{P_C} = 597\,K$$

Per quanto riguarda lo stato D avremo

$$V_D = 2\,m^3$$

$$P_D = 99500\,Pa$$

$$T_D = T_A \frac{P_D}{P_A} = 298,5\,K$$

Per il calcolo del rendimento dobbiamo calcolarci il calore assorbito. Il calore è assorbito nelle trasformazioni $D \to A$ e $A \to B$

$$\delta Q_{ass} = nC_v \Delta T_{D\to A} + nC_p \Delta T_{A\to B}$$

$$\delta Q_{ass} = 5 \cdot 10^5\,Pa$$

Il rendimento è quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 0,2\%$$

Problema di: Termodinamica - $T0060$

Testo *[T0060]* [2 ⭐ 2 ⏳ 3a 📖]
Un gas si trova a pressione $P = 2\,atm$ ed occupa un volume $V = 4\,m^3$. Aumentando la sua pressione di $|\Delta P| = 3\,atm$ con una trasformazione isoterma, quale volume occuperà alla fine?

Spiegazione In questo esercizio abbiamo informazioni sullo stato iniziale di un gas ed alcune informazioni sul suo stato finale. La legge dei gas è quindi la soluzione di questo problema.

Svolgimento La pressione finale raggiunta dal gas è $P_f = P_i + \Delta P = 5\,atm$ Quindi

$$\begin{cases} P_i V_i = NKT \\ P_f V_f = NKT \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad V_f = \frac{P_i V_i}{P_f} = \frac{2}{5} \cdot 4\,m^3 = 1,6\,m^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0060a$

Testo [T0060a] [2 2 3a]
Un gas si trova a pressione $P = 6\,atm$ ed occupa un volume $V = 4\,m^3$. Diminuendo il suo volume di $|\Delta V| = 1\,m^3$ con una trasformazione isoterma, quale pressione avrà alla fine?

Spiegazione In questo esercizio abbiamo informazioni sullo stato iniziale di un gas ed alcune informazioni sul suo stato finale. La legge dei gas è quindi la soluzione di questo problema.

Svolgimento La pressione finale raggiunta dal gas è $V_f = V_i + \Delta V = 3\,m^3$ Quindi

$$\begin{cases} P_iV_i = NKT \\ P_fV_f = NKT \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad P_f = \frac{P_iV_i}{V_f} = \frac{4}{3} \cdot 6\,atm = 8\,atm$$

Problema di: Termodinamica - $T0060b$

Testo [T0060b] [2 2 3a]
Un gas si trova a pressione $P = 6\,atm$ ed occupa un volume $V = 8\,m^3$. Aumentando il suo volume di $|\Delta V| = 4\,m^3$ con una trasformazione isoterma, quale pressione avrà alla fine?

Spiegazione In questo esercizio abbiamo informazioni sullo stato iniziale di un gas ed alcune informazioni sul suo stato finale. La legge dei gas è quindi la soluzione di questo problema.

Svolgimento La pressione finale raggiunta dal gas è $V_f = V_i + \Delta V = 12\,m^3$ Quindi

$$\begin{cases} P_iV_i = NKT \\ P_fV_f = NKT \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad P_f = \frac{P_iV_i}{V_f} = \frac{4}{12} \cdot 6\,atm = 2\,atm$$

Problema di: Termodinamica - $T0060c$

Testo *[T0060c]* [2 2 3a]
Un gas si trova a pressione $P = 5\,atm$ ed occupa un volume $V = 9\,m^3$. Diminuendo la sua pressione di $|\Delta P| = 2\,atm$ con una trasformazione isoterma, quale volume occuperà alla fine?

Spiegazione In questo esercizio abbiamo informazioni sullo stato iniziale di un gas ed alcune informazioni sul suo stato finale. La legge dei gas è quindi la soluzione di questo problema.

Svolgimento La pressione finale raggiunta dal gas è $P_f = P_i + \Delta P = 3\,atm$ Quindi

$$\begin{cases} P_i V_i = NKT \\ P_f V_f = NKT \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{P_i V_i}{P_f} = \frac{2}{3} \cdot 9\,m^3 = 6\,m^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0061$

Testo *[T0061]* [1 2 3a]
Una macchina termica di rendimento $\eta = 25\%$ produce $\delta L = 5\,J$ di lavoro ad ogni ciclo termodinamico. Quanto calore assorbe e quanto calore cede se fatta funzionare per $n = 5$ cicli?

Spiegazione Per questo problema è unicamente necessario sapere cosa fa un ciclo termodinamico e conoscere il concetto di rendimento.

Svolgimento Per ogni singolo ciclo

$$\delta Q_{ass} = \frac{\delta L}{\eta} = 20\,J$$

$$\delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L = 15\,J$$

Per $n = 5$ cicli è sufficiente moltiplicare per 5 i valori precedenti.

Problema di: Termodinamica - $T0062$

Testo *[T0062]* [4 5 4a]
Un gas monoatomico compie una trasformazione isocora dallo stato $A\left(10^5\,Pa; 2\,m^3; 300\,K\right)$ raddoppiando la sua pressione. Volendo ottenere la stessa trasformazione $A \rightarrow B$ utilizzando nell'ordine un riscaldamento isobaro ed una compressione adiabatica, quale volume massimo verrebbe raggiunto?

Spiegazione In questo esercizio applichiamo le leggi dei gas e delle trasformazioni termodinamiche indicate. Calcolando poi il calore scambiato otteniamo il rendimento del ciclo.

Svolgimento Lo stato finale B, utilizzando la legge dei gas per ottenere l'equazione della trasformazione isocora

$$P_A T_B = P_B T_A$$

è dato da $B\left(2\cdot 10^5\,Pa; 2\,m^3; 600\,K\right)$
Il massimo volume raggiunto è quella dello stato intermedio C dato da

$$\begin{cases} T_A V_C = T_C V_A \\ T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \end{cases}$$

Sapendo che da A verso B abbiamo una trasformazione isocora, abbiamo

$$\begin{cases} T_A = \dfrac{T_C V_A}{V_C} \\ T_C V_C^{\gamma-1} = 2T_A V_A^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_A = \dfrac{T_C V_A}{V_C} \\ T_C V_C^{\gamma-1} = 2\dfrac{T_C V_A}{V_C} V_A^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_A = \dfrac{T_C V_A}{V_C} \\ V_C^{\gamma} = 2V_A^{\gamma} \end{cases}$$

e quindi

$$V_C = 2^{-\gamma} V_A$$

essendo il gas monoatomico

$$V_C = 2^{-\gamma} V_A = 2^{-\frac{5}{3}} \cdot 2\,m^3 = 0,63\,m^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0062$

Testo *[T0063]* [3 3 4a]
Un contenitore cilindrico è chiuso da un lato da un pistone mobile e sul lato opposto da un tappo di sezione $S = 20\,cm^2$ che copre tutta la superficie inferiore del cilindro. Il contenitore è tenuto a temperatura costante. Il tappo è in grado di resistere ad una forza $F = 5 \cdot 10^7\,N$ prima di rompersi. Inizialmente i pistone è posto ad un'altezza $h_i = 30\,cm$, ed il cilindro è riempito con un gas alla pressione $P_i = 1,5\,atm$. Di quanto è possibile abbassare il pistone e ridurre quindi il volume del gas senza rompere il tappo?

Spiegazione Il pistone scende e diminuisce il volume del contenitore facendo aumentare la pressione interna del gas con una trasformazione isoterma. Per calcolare la forza che agisce sul tappo è importante non dimenticare la presenza dell'atmosfera esterna al cilindro.

Svolgimento La forza che agisce sul tappo del cilindro è data dalla differenza di pressione tra l'interno e l'esterno del tappo sulla superficie dello stesso:

$$F = \frac{P_f - P_{atm}}{S}$$

con P_f la pressione interna del cilindro dopo che il pistone è stato abbassato. Quindi

$$P_f = F \cdot S + P_{atm}$$

Essendo isoterma la trasformazione subita dal gas, ed essendo cilindrico il contenitore, la pressione interna sarà

$$P_f = P_i \frac{V_i}{V_f} = P_i \frac{S \cdot h_i}{S \cdot h_f} = P_i \frac{h_i}{h_f}$$

Riprendendo l'equazione precedente avremo

$$P_i \frac{h_i}{h_f} = F \cdot S + P_{atm}$$

da cui

$$\frac{h_f}{h_i} = \frac{P_i}{F \cdot S + P_{atm}}$$

$$h_f = h_i \cdot \frac{P_i}{F \cdot S + P_{atm}}$$

$$h_f = 30\,cm \cdot \frac{150000\,Pa}{100000\,Pa + 100000\,Pa} = 22,5\,cm$$

Problema di: Termodinamica - $T0064$

Testo *[T0064]* [2 2 3a]
A partire dallo stato $A(0,2\,m^3; 1\,atm)$ di minimo volume, un numero $n = 10\,moli$ di gas compiono un ciclo termodinamico di Carnot con rendimento $\eta = 0,5$. Determina la minima temperatura raggiunta dal gas. Determina poi fino a quale volume deve espandersi il gas durante l'espansione isoterma, sapendo che produrrà in tale trasformazione un lavoro $\delta L = 100\,kJ$.

Spiegazione Sapendo che si tratta di un ciclo di Carnot, possiamo determinare la temperatura minima del ciclo.
Conoscendo il lavoro fatto dall'espansione isoterma posso conoscerne il volume raggiunto.

Svolgimento Lo stato A corrisponde all'inizio dell'isoterma di alta temperatura, in quanto quello è lo stato di minimo volume. La temperatura dello stato A è

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{10^5\,Pa \cdot 2\,m^3}{10\,mol \cdot 8,314\,\frac{J}{mol\,K}} = 2406\,K$$

La temperatura minima del ciclo la ricavo dal suo rendimento

$$T_{bassa} = T_{alta} \cdot (1 - \eta) = 1203\,K$$

Nell'isoterma il lavoro fatto è uguale al calore assorbito.

$$\delta Q = \delta L = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

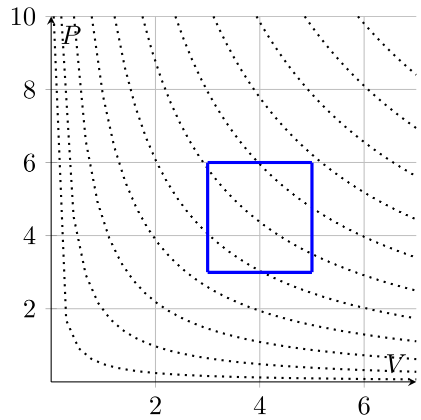
$$e^{\frac{\delta L}{nRT_A}} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$V_B = V_A \cdot e^{\frac{\delta L}{nRT_A}} = 3,3\,m^3$$

Problema di: Termodinamica - $T0065$

Testo *[T0065t]* [3 5 4a]
Una quantità di $1000\,moli$ di un gas biatomico compiono un ciclo termodinamico formato da due isobare e due isocore. Il ciclo comincia con un'espansione isobara che parte dallo stato $A(3\,m^3; 6\,atm)$; successivamente abbiamo un raffreddamento isocoro; la compressione isobara inizia invece dallo stato $C(5\,m^3; 3\,atm)$; infine un riscaldamento isocoro. Quanto lavoro ha fatto il ciclo? Quanto vale il rendimento del ciclo?

Spiegazione Dopo aver disegnato il ciclo termodinamico nel piano PV dobbiamo calcolare il lavoro fatto in ognuna delle quattro trasformazioni del ciclo e calcolare infine il lavoro totale. Lo stesso lo facciamo per il calore scambiato andando a calcolare solo il calore assorbito.



Svolgimento Il grafico del ciclo termodinamico è mostrato in figura. Il lavoro svolto nelle due isocore è nullo. Nell'espansione isobara il lavoro vale

$$\delta L_{AB} = P \cdot \Delta V = 6\,atm \cdot 2\,m^3 = 1200000\,J$$

Nella compressione isobara il lavoro vale

$$\delta L_{BC} = P \cdot \Delta V = 3\,atm \cdot (-2\,m^3) = -600000\,J$$

Il lavoro fatto dal ciclo vale quindi

$$\delta L = 60000\,J$$

Indicando gli stati con le lettere A, B, C, e D, avremo

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{nR} = 217\,K$$

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{nR} = 361\,K$$

$$T_C = \frac{P_C \cdot V_C}{nR} = 181\,K$$

$$T_D = \frac{P_D \cdot V_D}{nR} = 108\,K$$

Il gas assorbe calore solo nel riscaldamento isocoro e nell'espansione isobara, quindi:

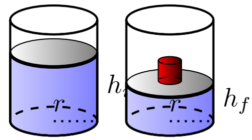
$$\delta Q_{ass} = nc_v \Delta T_{DA} + nc_p \Delta T_{AB} = \frac{5}{2} nR \left(T_A - T_D\right) + \frac{7}{2} nR \left(T_B - T_A\right) = 6453\,kJ$$

Il rendimento del ciclo risulta essere

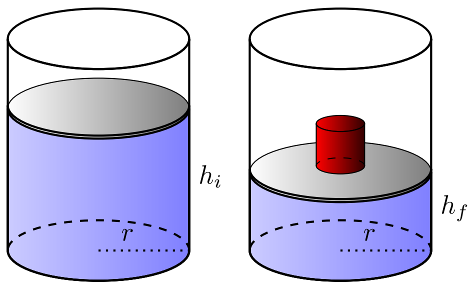
$$\eta = \frac{\delta L}{\delta Q_{ass}} = 0,93\%$$

Problema di: Termodinamica - $DT0001$

Testo *[DT0001]* [2 3 3a]
Un contenitore cilindrico, inizialmente alto $h_i = 3\,dm$, chiuso da un pistone mobile di massa $m = 10\,kg$ e di superficie $S = 1\,dm^2$, è riempito con un gas perfetto alla temperatura $T = 27\,°\mathrm{C}$. Quante molecole ci sono nel gas? Mantenendo costante la temperatura, appoggiamo sul pistone un peso di massa $M = 100\,kg$; quanto risulterà alto il contenitore alla fine?



Spiegazione In questo problema si parla di un gas che effettua una trasformazione **isoterma**. Bisognerà quindi utilizzare la legge dei gas perfetti. Il volume del gas lo si ricava sapendo che il contenitore è cilindrico con area di base S ed altezza h. La pressione del gas la ottengo sapendo che è pari alla pressione atmosferica aumentata della pressione dovuta al peso del pistone e della massa poi aggiunta sul pistone.



Svolgimento Indichiamo il volume del gas, negli istanti finale e iniziale:

$$V_f = S \cdot h_f$$

$$V_i = S \cdot h_i = 1\,dm^3 \cdot 3\,dm = 3\,dm^3$$

Indichiamo anche le pressioni negli istanti iniziali e finali:

$$P_i = P_{atm} + \frac{m \cdot g}{S} = 100000\,Pa + \frac{10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{1\,dm^2} = 109800\,Pa$$

$$P_f = P_{atm} + \frac{(m + M) \cdot g}{S} = 100000\,Pa + \frac{110\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{1\,dm^2} = 207800\,Pa$$

Utilizziamo la legge dei gas per calcolare il numero di molecole del gas

$$n = \frac{P_i \cdot V_i}{KT} = \frac{109800\,Pa \cdot 0,003\,m^3}{1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 300\,K} = 8 \cdot 10^{21}$$

Consideriamo adesso la trasformazione isoterma. Avremo che

$$\begin{cases} P_i V_i = NKT \\ P_f V_f = NKT \end{cases}$$

da cui

$$V_f = \frac{P_i \cdot V_i}{P_f}$$

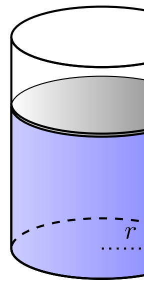
$$S \cdot h_f = \frac{P_i \cdot S \cdot h_i}{P_f}$$

$$h_f = \frac{P_i \cdot h_i}{P_f} = \frac{109800\,Pa \cdot 3\,dm}{207800\,Pa} = 1,6\,dm$$

Problema di: Dinamica - Termodinamica - $DT0002$

Testo *[DT0002]* [1½ 2 3a]
Un contenitore cilindrico è chiuso in verticale da un pistone mobile di massa $m = 10\,kg$ e di superficie $S = 2\,dm^2$. Il contenitore è alto $h = 4\,dm$. Nel contenitore è presente un gas perfetto alla temperatura $T = 27\,°C$. Quante molecole ci sono nel gas?

Spiegazione
In questo problema si parla di un gas che ha un certo volume, una certa pressione ed una certa temperatura. Con la legge dei gas perfetti possiamo calcolare il numero di molecole presenti nel gas.



Svolgimento Indichiamo il volume del gas:

$$V = S \cdot h = 2\,dm^2 \cdot 4\,dm = 8\,dm^3$$

Indichiamo la pressione del gas:

$$P = P_{atm} + \frac{m \cdot g}{S} = 100000\,Pa + \frac{10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{2\,dm^2} = 104900\,Pa$$

Utilizziamo la legge dei gas per calcolare il numero di molecole del gas

$$n = \frac{P \cdot V}{KT} = \frac{149000\,Pa \cdot 0,008\,m^3}{1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 300\,K} = 2 \cdot 10^{23}$$

Problema di: Dinamica - Termodinamica - $DT0003$

Testo *[DT0003]* [4 7 3a]
Un palloncino pieno d'aria, di volume liberamente variabile e di massa complessiva $m = 100\,g$, è tenuto completamente immerso da una molla di costante elastica $k = 10\,\frac{N}{cm}$ legata al fondo di un contenitore. Sappiamo che quando l'acqua è alla temperatura $T_i = 27\,°C$ la molla è allungata di $\Delta l = 5\,cm$. Ammettendo che la pressione a cui si trova il palloncino sia costante, quanto sarà allungata la molla se portiamo l'acqua alla temperatura $T_f = 87\,°C$?

Spiegazione Il palloncino allunga la molla in quanto la forza di Archimede tende a faro salire, mentre la forza di gravità è minore di quella di Archimede. La forza di Archimede dipende dal volume del palloncino che, a sa volta, dipende dalla temperatura a cui si trova.

Svolgimento Cominciamo con lo scrivere l'equazione dell'equilibrio dinamico relativo al palloncino.

$$F_{el} + F_g = F_{Arc}$$

$$k \cdot \Delta l + mg = \rho_{_{H_2O}} V g$$

Inizialmente l'equazione di equilibrio per il palloncino è

$$k \cdot \Delta l_i + mg = \rho_{_{H_2O}} V_i g$$

Se scaldiamo l'acqua, si scalda il gas nel palloncino e quindi aumenta il volume dello stesso cambiando il valore della forza di Archimede. In particolare il testo dell'esercizio ci dica che il gas ha compiuto una trasformazione isobara.

$$\begin{cases} PV_i = NKT_i \\ PV_f = NKT_f \end{cases}$$

$$V_f = \frac{T_f}{T_i} V_i$$

L'equazione dell'equilibrio nello stato finale è

$$k \cdot \Delta l_f + mg = \rho_{_{H_2O}} V_f g$$

quindi

$$\begin{cases} k \cdot \Delta l_i + mg = \rho_{_{H_2O}} V_i g \\ k \cdot \Delta l_f + mg = \rho_{_{H_2O}} V_f g \end{cases}$$

Considerando la trasformazione termodinamica

$$\begin{cases} k \cdot \Delta l_i + mg = \rho_{_{H_2O}} V_i g \\ k \cdot \Delta l_f + mg = \rho_{_{H_2O}} \frac{T_f}{T_i} V_i g \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_i = \frac{k \cdot \Delta l_i + mg}{\rho_{_{H_2O}} g} \\ k \cdot \Delta l_f - k \cdot \Delta l_i = \rho_{_{H_2O}} \frac{T_f}{T_i} V_i g - \rho_{_{H_2O}} V_i g \end{cases}$$

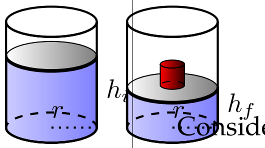
$$\begin{cases} V_i = \frac{k \cdot \Delta l_i + mg}{\rho_{_{H_2O}} g} \\ \Delta l_f - \Delta l_i = \frac{\rho_{_{H_2O}} V_i g}{k} \left(\frac{T_f}{T_i} - 1 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_i = \frac{k \cdot \Delta l_i + mg}{\rho_{_{H_2O}} g} \\ \Delta l_f = \Delta l_i + \frac{\rho_{_{H_2O}} V_i g}{k} \left(\frac{T_f}{T_i} - 1 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_i = \frac{k \cdot \Delta l_i + mg}{\rho_{_{H_2O}} g} \\ \Delta l_f = \Delta l_i + \frac{k \cdot \Delta l_i + mg}{k} \left(\frac{T_f}{T_i} - 1 \right) \end{cases}$$

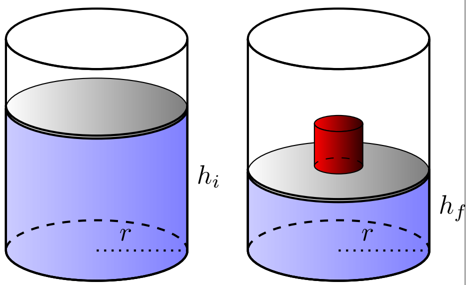
Problema di: Termodinamica - $DT0004$

Testo *[DT0004]* [3 3 3a]



Un contenitore cilindrico adiabatico, inizialmente alto $h_i = 3\,dm$, chiuso da un pistone mobile di massa $m = 10\,kg$ e di superficie $S = 1\,dm^2$, è riempito con un gas perfetto monoatomico alla temperatura $T = 27\,°C$. Quante molecole ci sono nel gas? Appoggiamo sul pistone un peso di massa $M = 100\,kg$; quanto risulterà alto il contenitore alla fine?

Spiegazione In questo problema si parla di un gas che effettua una trasformazione **adiabatica**. Bisognerà quindi utilizzare la legge dei gas perfetti. Il volume del gas lo si ricava sapendo che il contenitore è cilindrico con area di base S ed altezza h.
La pressione del gas la ottengo sapendo che è pari alla pressione atmosferica aumentata della pressione dovuta al peso del pistone e della massa poi aggiunta sul pistone.



Svolgimento Indichiamo il volume del gas, negli istanti finale e iniziale:

$$V_f = S \cdot h_f$$

$$V_i = S \cdot h_i = 1\,dm^3 \cdot 3\,dm = 3\,dm^3$$

Indichiamo anche le pressioni negli istanti iniziali e finali:

$$P_i = P_{atm} + \frac{m \cdot g}{S} = 100000\,Pa + \frac{10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{1\,dm^2} = 109800\,Pa$$

$$P_f = P_{atm} + \frac{(m+M) \cdot g}{S} = 100000\,Pa + \frac{110\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{1\,dm^2} = 207800\,Pa$$

Utilizziamo la legge dei gas per calcolare il numero di molecole del gas

$$n = \frac{P_i \cdot V_i}{KT} = \frac{109800\,Pa \cdot 0,003\,m^3}{1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 300\,K} = 8 \cdot 10^{21}$$

Consideriamo adesso la trasformazione adiabatica. Essendo il gas monoatomico, avremo $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$
Dall'equazione per l'adiabatica

$$V_f^\gamma = \frac{P_i \cdot V_i^\gamma}{P_f}$$

$$S^\gamma \cdot h_f^\gamma = \frac{P_i \cdot S^\gamma \cdot h_i^\gamma}{P_f}$$

$$h_f^\gamma = \frac{P_i \cdot h_i^\gamma}{P_f}$$

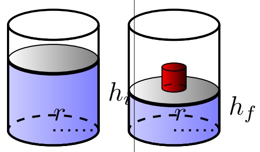
$$h_f = \frac{P_i^{\frac{1}{\gamma}} \cdot h_i}{P_f^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$h_f = \frac{1057,7\,Pa^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 3\,dm}{1550,9\,Pa^{\frac{1}{\gamma}}} = 2,05\,dm$$

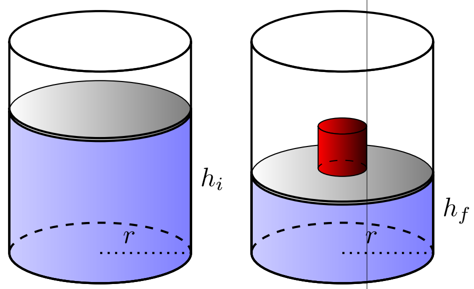
Problema di: Termodinamica - $DT0005$

Testo *[DT0005]* [2 3 3a]

Un contenitore cilindrico mantenuto a temperatura costante è utilizzato come bilancia per misurare la massa M di un pesino posto sul pistone mobile che chiude il cilindro. Ipotizziamo che il pistone abbia massa trascurabile. La base del cilindro è $S = 5\,dm^2$ e l'altezza iniziale senza il pesino è $h_i = 2\,dm$. Avendo osservato che con il pesino il pistone si abbassa di $\Delta h = 5\,cm$, quanto vale la massa M del pesino?



Spiegazione In questo problema si parla di un gas che effettua una trasformazione **isoterma**. Bisognerà quindi utilizzare la legge dei gas perfetti. Il pesino aumenta la pressione sul gas e di conseguenza diminuisce il volume. Calcolando di quanto cambia il volume è possibile risalire alla variazione di pressione e quindi alla massa del pesino.



Svolgimento Dall'equazione dell'isoterma[2]

$$P_i V_i = P_f V_f$$

$$P_i S h_i = \left(P_i + \frac{Mg}{S}\right) S h_f$$

$$P_i h_i = \left(P_i + \frac{Mg}{S}\right) h_f$$

$$P_i h_i = P_i h_f + \frac{Mg}{S} h_f$$

$$P_i \left(h_i - h_f\right) \frac{S}{g h_f} = M$$

$$M = 10^5\,Pa \cdot 0,05\,m \frac{0,05\,m^2}{9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,15\,m} = 170\,kg$$

[2] Scrivo qui direttamente l'equazione dell'isoterma. E' fondamentale che voi sappiate ricavarla a partire dalla legge dei gas.

Problema di: Termodinamica - $DT0006$

Testo *[DT0006]* [4 4 3a]

Un cilindro di sezione S e lunghezza L è diviso in due parti da un pistone mobile di massa trascurabile e libero di muoversi senza attrito. Da un lato sono presenti $n = 10$ moli di un gas monoatomico e dall'altro il vuoto. La pressione del gas è bilanciata da una molla di costante elastica $k = 100 \frac{N}{cm}$ e lunghezza a riposo L come la lunghezza del cilindro. Inizialmente il gas si trova alla temperatura $T_i = 300\,K$ e gli viene fornito una quantità di calore $\delta Q = 1000\,J$ che fa espandere il gas. Determina lo schiacciamento della molla alle temperature T_i e T_f ed il lavoro fatto dal gas durante la trasformazione.

Spiegazione La pressione a cui si trova il gas è determinata da quanto la molla lo sta schiacciando. In questo esercizio il lavoro fatto dal gas è interamente immagazzinato all'interno della molla. Possiamo quindi valutarlo prendendo in considerazione l'energia potenziale elastica della molla. Il cilindro è adiabatico, quindi non assorbe calore dal gas. L'unico calore scambiato è quello fornito da noi.

Svolgimento Cominciamo con il considerare lo stato di equilibrio del gas. La pressione a cui si trova il gas è data dalla forza esercitata dalla molla sulla superficie del pistone

$$P_i = \frac{k\Delta l}{S}$$

Data la geometria del sistema, il volume del gas è quello di un cilindro la cui altezza corrisponde alla variazione di lunghezza della molla. Quindi

$$V = S \cdot \Delta l$$

e di conseguenza
Dalla legge dei gas

$$P_i V_i = nRT_i$$

$$T_i = \frac{k\Delta l_i^2}{nR}$$

da cui con la formula inversa possiamo calcolare lo schiacciamento della molla in funzione della temperatura.

$$\Delta l_i = \sqrt{\frac{nRT_i}{k}}$$

Il lavoro fatto dal gas è stato immagazzinato nella molla

$$\delta L = \frac{1}{2}k\Delta l_f^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_i^2 = \frac{1}{2}nR\Delta T$$

Se adesso troviamo la relazione tra il calore fornito e la variazione di temperatura, possiamo eseguire tutti i calcoli. La trasformazione in questione è adiabatica, quindi

$$\Delta U = \delta Q - \delta L$$

$$nc_v\Delta T + \frac{1}{2}nR\Delta T = \delta Q$$

$$\Delta T\left(nc_v + \frac{1}{2}nR\right) = \delta Q$$

$$\Delta T = \frac{\delta Q}{(nc_v + \frac{1}{2}nR)}$$

essendo il gas monoatomico, allora

$$\Delta T = \frac{\delta Q}{2nR}$$

Conoscendo δQ posso quindi calcolare ΔT, T_f e quindi il lavoro δL

Problema di: Calorimetria - Termodinamica $QT0001$

Testo [QT0001] [3 4 3a]
In un contenitore di ferro chiuso, di massa $m_{Fe} = 1\,kg$, ci sono $m_{aria} = 3\,kg$ di aria. La temperatura iniziale del ferro è $T_{i-Fe} = 10\,°\mathrm{C}$, e quella dell'aria è $T_{i-aria} = 30\,°\mathrm{C}$. Il calore specifico dell'aria a volume costante è $c_{v-aria} = 0,72\,\frac{J}{kgK}$. Calcola il rapporto tra le pressioni finale ed iniziale $x = \frac{P_f}{P_i}$ al raggiungimento dell'equilibrio termico.

Spiegazione I due corpi a contatto raggiungono una temperatura di equilibrio. in questo caso il gas scalda il contenitore, e per questo motivo il gas si raffredda. Calcolando la temperatura di equilibrio, si conoscono le due temperature, iniziale e finale, del gas. Visto che il gas è chiuso in un contenitore di ferro, allora fa una trasformazione isocora; sapendolo posso arrivare a dare la risposta al problema.

Svolgimento La temperatura di equilibrio raggiunta è

$$T_{eq} = \frac{c_{s-aria} m_{aria} T_{i-aria} + c_{s-Fe} m_{Fe} T_{i-Fe}}{m_{aria} + m_{Fe}}$$

$$T_{eq} = \frac{0,72\,\frac{J}{kg°\mathrm{C}} \cdot 3\,kg \cdot 30\,°\mathrm{C} + 440\,\frac{J}{kg°\mathrm{C}} \cdot 1\,kg \cdot 10\,°\mathrm{C}}{0,72\,\frac{J}{kg°\mathrm{C}} \cdot 3\,kg + 440\,\frac{J}{kg°\mathrm{C}} \cdot 1\,kg} = \frac{4464,8\,J}{442,16\,\frac{J}{°\mathrm{C}}} = 10,1\,°C$$

Visto che il gas fa una trasformazione isocora indicheremo con la stessa lettera V sia il volume iniziale che quello finale

$$\begin{cases} P_i V = NKT_i \\ P_f V = NKT_{eq} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{P_f}{P_i} = \frac{T_{eq}}{T_i}$$

Per poter fare questo conto dobbiamo però trasformare le temperature in Kelvin

$$\frac{P_f}{P_i} = \frac{(10,1 + 273,15)\,K}{(30 + 273,15)\,K} = 0,934$$

Problema di: Calorimetria - Termodinamica $QT0002$

Testo [QT0002] [3 4 3a]
Una centrale elettrica di potenza $P = 500\,MW$ funziona con un ciclo termodinamico di rendimento $\eta = 0,35$. Per raffreddarla viene utilizzato un piccolo fiume dal quale si preleva una portata d'acqua $C = 5 \cdot 10^4\,\frac{kg}{s}$. Di quanto si scalda quell'acqua?

Spiegazione La centrale elettrica produce una certa potenza, quindi una certa quantità di energia nel tempo. La centrale elettrica funziona con un ciclo termodinamico che assorbe calore ad alta temperatura, una parte la trasforma in lavoro (energia elettrica) ed il restante lo cede a bassa temperatura. Questo calore ceduto deve essere portato via dalla centrale grazie all'impianto di raffreddamento. Il calore ceduto, viene infatti dato all'acqua presa dal fiume. Tale acqua quindi si scalda.

Svolgimento Il calore che scalda l'acqua è il calore ceduto dalla centrale nel suo ciclo termodinamico

$$\delta Q_{ced} = \delta Q_{ass} - \delta L$$

Sappiamo anche che in un ciclo termodinamico

$$\delta Q_{ass} = \frac{\delta L}{\eta}$$

quindi

$$\delta Q_{ced} = \frac{\delta L}{\eta} - \delta L = \delta L \frac{1-\eta}{\eta}$$

Visto che la centrale ha una potenza $P = \frac{\delta L}{\Delta t}$

$$\delta Q_{ced} = P \Delta t \frac{1-\eta}{\eta}$$

Questo calore serve a scaldare l'acqua dell'impianto di raffreddamento. La portata dell'acqua in ingresso nella centrale è

$$C = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Quindi la massa di acqua che posso scaldare è

$$\Delta m = C\Delta t$$

Il problema chiede di calcolare di quanto di scalda l'acqua del sistema di raffreddamento:

$$\Delta T = \frac{\delta Q_{ced}}{c_s \cdot \Delta m}$$

$$\Delta T = \frac{P\Delta t\frac{1-\eta}{\eta}}{c_s \cdot C\Delta t} = \frac{P\frac{1-\eta}{\eta}}{c_s \cdot C}$$

$$\Delta T = \frac{5 \cdot 10^8\,W \cdot \frac{0{,}65}{0{,}35}}{4186\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 5 \cdot 10^4\,\frac{kg}{s}} = 4,4\,K$$

Problema di: Termodinamica - $QT0003$

Testo *[QT0003]* [3 3 3a]
Una macchina termica di rendimento $\eta = 0,2$ è utilizzata come frigorifero per raffreddare una massa $m = 2\,kg$ di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alla temperatura finale $T_f = 4\,°\mathrm{C}$. Quanto lavoro impiega?

Spiegazione Una macchina frigorifera assorbe calore da un luogo bassa temperatura per portarlo in un luogo ad alta temperatura. Dal momento che in natura questo fenomeno accadrebbe in modo spontaneo solo al contrario, per poterci riuscire la macchina frigorifera deve assorbire una certa quantità di lavoro dall'esterno. In questo caso la macchina frigorifera prende calore dall'acqua, raffreddandola.

Svolgimento Viste le temperature iniziali e finali dell'acqua, l'unico fenomeno calorimetrico che avviene è il raffreddamento, quindi la quantità di calore che bisogna assorbire dall'acqua vale

$$\delta Q = c_s m\Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 2\,kg \cdot (-16\,°\mathrm{C}) = 133952\,J$$

A questa energia di deve sommare il lavoro assorbito dalla macchina termica per sapere quanto calore viene fornito al luogo con temperatura alta. Avremo quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta L + \delta Q}$$

$$\delta L = \eta\delta L + \eta\delta Q$$

$$(1-\eta)\,\delta L = \eta\delta Q$$

$$\delta L = \frac{\eta}{1-\eta}\delta Q$$

$$\delta L = 33488\,J$$

La formula finale per questo esercizio, per non fare calcoli intermedi, risulta essere

$$\delta L = c_s m \Delta T \frac{\eta}{1-\eta}$$

Problema di: Termodinamica - $QT0004$

Testo *[QT0004]* [3 5 3a]
Una macchina termica di rendimento $\eta = 0,2$ viene utilizzata come frigorifero per raffreddare una massa $m = 2\,kg$ di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alla temperatura finale $T_f = -18\,°\mathrm{C}$. Quanto lavoro impiega?

Spiegazione Una macchina frigorifera assorbe calore da un luogo bassa temperatura per portarlo in un luogo ad alta temperatura. Dal momento che in natura questo fenomeno accadrebbe in modo spontaneo solo al contrario, per poterci riuscire la macchina frigorifera deve assorbire una certa quantità di lavoro dall'esterno. In questo caso la macchina frigorifera prende calore dall'acqua, raffreddandola e facendola congelare.

Svolgimento Viste le temperature iniziali e finali dell'acqua, i due fenomeni calorimetrici che avvengono sono il raffreddamento e la solidificazione, quindi la quantità di calore che bisogna assorbire dall'acqua vale

$$\delta Q_{raffr} = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK}\cdot 2\,kg \cdot (38\,°\mathrm{C}) = 318136\,J$$

$$\delta Q_{solid} = Q_{lat-fus}\cdot m = 335\frac{kJ}{kg}\cdot 2\,kg = 670\,kJ$$

Il calore totale da sottrarre all'acqua è quindi

$$\delta Q = \delta Q_{raffr} + \delta Q_{solid} = 988136\,J$$

A questa energia di deve sommare il lavoro assorbito dalla macchina termica per sapere quanto calore viene fornito al luogo con temperatura alta. Avremo quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta L + \delta Q}$$

$$\delta L = \eta \delta L + \eta \delta Q$$

$$(1-\eta)\,\delta L = \eta \delta Q$$

$$\delta L = \frac{\eta}{1-\eta}\delta Q$$

$$\delta L = 247034\,J$$

La formula finale per questo esercizio, per non fare calcoli intermedi, risulta essere

$$\Delta L = m\left(c_s m \Delta T + Q_{lat-fus}\right)\frac{\eta}{1-\eta}$$

Problema di: Termodinamica - $QT0005$

Testo *[QT0005]* [3 3 3a]
Una macchina termica di rendimento $\eta = 0,2$ e potenza $P = 100\,W$ viene utilizzata come frigorifero per raffreddare una massa $m = 2\,kg$ di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ alla temperatura finale $T_f = 4\,^{\circ}\mathrm{C}$. Quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Una macchina frigorifera assorbe calore da un luogo bassa temperatura per portarlo in un luogo ad alta temperatura. Dal momento che in natura questo fenomeno accadrebbe in modo spontaneo solo al contrario, per poterci riuscire la macchina frigorifera deve assorbire una certa quantità di lavoro dall'esterno. In questo caso la macchina frigorifera prende calore dall'acqua, raffreddandola.

Svolgimento Viste le temperature iniziali e finali dell'acqua, l'unico fenomeno calorimetrico che avviene è il raffreddamento, quindi la quantità di calore che bisogna assorbire dall'acqua vale

$$\delta Q = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK}\cdot 2\,kg\cdot(-16\,^{\circ}\mathrm{C}) = 133952\,J$$

A questa energia di deve sommare il lavoro assorbito dalla macchina termica per sapere quanto calore viene fornito al luogo con temperatura alta. Avremo quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta L + \delta Q}$$

$$\delta L = \eta \delta L + \eta \delta Q$$

$$(1-\eta)\,\delta L = \eta \delta Q$$

$$\delta L = \frac{\eta}{1-\eta}\delta Q$$

$$\delta L = 33488\,J$$

Della macchina termica noi conosciamo la potenza, quindi

$$\Delta t = \frac{\delta L}{P} = 334,88\,s$$

La formula finale per questo esercizio, per non fare calcoli intermedi, risulta essere

$$\Delta t = \frac{\eta}{1-\eta}\frac{c_s m \Delta T}{P}$$

Problema di: Termodinamica - $QT0006$

Testo *[QT0006]* [3 5 3a]
Una macchina termica di rendimento $\eta = 0,2$ e potenza $P = 100\,W$ viene utilizzata come frigorifero per raffreddare una massa $m = 2\,kg$ di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alla temperatura finale $T_f = -18\,°\mathrm{C}$. Quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Una macchina frigorifera assorbe calore da un luogo bassa temperatura per portarlo in un luogo ad alta temperatura. Dal momento che in natura questo fenomeno accadrebbe in modo spontaneo solo al contrario, per poterci riuscire la macchina frigorifera deve assorbire una certa quantità di lavoro dall'esterno. In questo caso la macchina frigorifera prende calore dall'acqua, raffreddandola e facendola congelare.

Svolgimento Viste le temperature iniziali e finali dell'acqua, i due fenomeni calorimetrici che avvengono sono il raffreddamento e la solidificazione, quindi la quantità di calore che bisogna assorbire dall'acqua vale

$$\delta Q_{raffr} = c_s m \Delta T = 4186\,\frac{J}{kgK}\cdot 2\,kg\cdot(38\,°\mathrm{C}) = 318136\,J$$

$$\delta Q_{solid} = Q_{lat_{fus}}\cdot m = 335\frac{kJ}{kg}\cdot 2\,kg = 670\,kJ$$

Il calore totale da sottrarre all'acqua è quindi

$$\delta Q = \delta Q_{raffr} + \delta Q_{solid} = 988136\,J$$

A questa energia di deve sommare il lavoro assorbito dalla macchina termica per sapere quanto calore viene fornito al luogo con temperatura alta. Avremo quindi

$$\eta = \frac{\delta L}{\delta L + \delta Q}$$

$$\delta L = \eta \delta L + \eta \delta Q$$

$$(1-\eta)\,\delta L = \eta \delta Q$$

$$\delta L = \frac{\eta}{1-\eta}\delta Q$$

$$\delta L = 247034\,J$$

Della macchina termica noi conosciamo la potenza, quindi

$$\Delta T = \frac{\delta L}{P} = 2470,34\,s$$

La formula finale per questo esercizio, per non fare calcoli intermedi, risulta essere

$$\Delta T = \frac{\eta}{1-\eta}\frac{m\left(c_s m \Delta T + Q_{lat-fus}\right)}{P}$$

Problema di: Calorimetria e Termodinamica - $QT0007$

Testo *[QT0007]* [3 3 3a]
L'interno di un appartamento è raffreddato da una macchina frigorifera a ciclo di Carnot. All'interno dell'appartamento abbiamo una temperatura $T_{int} = 24\,°\mathrm{C}$ mentre all'esterno abbiamo $T_{ext} = 37\,°\mathrm{C}$. Le dispersioni di calore avvengono interamente da una finestra di vetro ($\rho_{vetro} = 0,8\,\frac{W}{mK}$) di spessore $d = 3\,mm$ e superficie $S = 5\,m^2$. Quanta energia consuma la macchina in un tempo $\Delta t = 2\,h$?

Spiegazione Dalla finestra entra del calore; la macchina termica sposta quel calore all'esterno.

Svolgimento La perdita di calore è indicata da

$$\frac{\delta Q}{\Delta t} = \rho\frac{S}{L}\Delta T$$

Contemporaneamente la macchina frigorifera di Carnot, con rendimento

$$\eta = 1 - \frac{T_{int}}{T_{ext}} = 0,042$$

Il lavoro assorbito dalla macchina termica è dato da

$$\delta L = \eta\left(\delta Q + \delta L\right)$$

$$\delta L\left(1+\eta\right) = \eta \delta Q$$

$$\delta L = \frac{\eta}{(1+\eta)}\delta Q$$

Infine abbiamo

$$\delta L = \frac{\eta}{(1+\eta)}\rho\frac{S}{L}\Delta T \Delta t$$

$$\delta L = \frac{0,042}{1,042}\cdot 0,8\,\frac{W}{mK}\,\frac{5\,m^2}{0,003\,m}\cdot 13\,K\cdot 7200\,s = 5\cdot 10^6\,J$$

Problema di: Calorimetria e Termodinamica - $QT0008$

Testo *[QT0008]* [5 4 4a]

In un contenitore adiabatico vengono versati $m_1 = 3\,kg$ di acqua alla temperatura $T_{1i} = 60\,°\mathrm{C}$ e $m_2 = 2\,kg$ di acqua alla temperatura $T_{2i} = 30\,°\mathrm{C}$. Calcola la variazione di entropia del sistema dovuta al mescolamento dei due liquidi.

Spiegazione Questo è un problema standard nel quale semplicemente applichiamo le formule conosciute

Svolgimento La temperatura di equilibrio raggiunta dai due materiali è

$$T_{eq} = \frac{c_{s1} m_1 T_{1i} + c_{s2} m_2 T_{2i}}{c_{s1} m_1 + c_{s2} m_2} = \frac{m_1 T_{1i} + m_2 T_{2i}}{m_1 + m_2} = 48\,°\mathrm{C}$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che i due materiali sono in questo problema lo stesso materiale.

Trattandosi del fenomeno del riscaldamento, la variazione di entropia dei due materiali è calcolabile con la formula

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} c_s m \frac{dT}{T} = c_s m \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Per l'acqua che si riscalda avremo

$$\Delta S_2 = c_{s2} m_2 \ln \frac{T_{eq}}{T_{2i}} = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 2\,kg \cdot \ln\left(\frac{321\,K}{303\,K}\right) = 483\,\frac{J}{K}$$

Per l'acqua che si raffredda avremo

$$\Delta S_1 = c_{s1} m_1 \ln \frac{T_{eq}}{T_{1i}} = 4186\,\frac{J}{kgK} \cdot 3\,kg \cdot \ln\left(\frac{321\,K}{333\,K}\right) = -307\,\frac{J}{K}$$

L'entropia totale del sistema fisico è quindi aumentata essendo

$$\Delta S_{tot} = +176\,\frac{J}{K}$$

Problema di: Dinamica - $LT0001$

Testo *[LT0001]* [2 3 3a]

Una macchina termica funziona con un ciclo di Carnot tra le temperature $T_b = 20\,°\mathrm{C}$ e $T_a = 600\,°\mathrm{C}$. Tale macchina brucia una massa $m = 100\,g$ di benzina dal potere calorifico $C = 43,6 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$, per sollevare un peso $M = 10\,kg$. Di quanto si riesce a sollevare tale peso?

Spiegazione Una macchina termica serve per convertire parte del calore assorbito in lavoro. In questo esercizio il lavoro prodotto viene utilizzato per sollevare un peso di una certa altezza, e viene fornito dalla combustione della benzina.

Svolgimento In questo esercizio calcoleremo nell'ordine:

1. Il calore assorbito che deriva dalla combustione della benzina
2. Il rendimento del ciclo di Carnot
3. Il lavoro prodotto dalla macchina
4. l'altezza di cu si è sollevato il peso

$$\delta Q_{ass} = m \cdot C = 4,36\,J$$
$$\eta = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{293,15\,K}{873,15\,K} = 0,687$$
$$\delta L = \eta \cdot \delta Q_{ass} = 2,996\,J$$

Questo lavoro va ad aumentare l'energia potenziale gravitazionale del peso, quindi scriveremo

$$\delta L = mg\Delta h$$

da cui

$$\Delta h = \frac{\delta L}{mg}$$

$$\Delta h = \frac{2,996\,J}{10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 30,6\,cm$$

Problema di: Fluidodinamica - Termodinamica - $FT0001$

Testo *[FT0001]* [3 4 3a]

Un subacqueo con capacità polmonare $V_i = 5\,dm^3$ sta per andare a $h_f = -30\,m$ di profondità sul livello del mare. Quanti litri d'aria si troverà nei polmoni a quella profondità?

Spiegazione Mentre il subacqueo cala in profondità, per la legge di Stevin la pressione a cui è sottoposto aumenta. L'aria nei suoi polmoni viene quindi compressa, e questo accade a temperatura costante, visto che i corpo di un uomo mantiene sempre la temperatura costante.

Svolgimento Cominciamo con il calcolarci a quale pressione l'uomo viene sottoposto raggiunta la profondità prevista. Per la legge di Stevin

$$P_f = P_i - \rho g\,(h_f - h_i)$$

$$P_f = 100000\,Pa - 1030\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (-30\,m - 0\,m) = 402820\,Pa$$

Teniamo adesso conto che il gas nei polmoni subisce una trasfornazione isoterma, per cui

$$\begin{cases} P_f V_f = NKT \\ P_i V_i = NKT \end{cases}$$

e quindi

$$P_f V_f = P_i V_i$$

$$V_f = \frac{P_i V_i}{P_f}$$

$$V_f = \frac{100000\,Pa \cdot 5\,dm^3}{402820\,Pa} = 1,24\,dm^3$$

Problema di: Fluidodinamica - Termodinamica - $FT0002$

Testo *[FT0002]* [3 3 3a]
Consideriamo un palloncino di volume $V_i = 25\,dm^3$. Esso viene immerso in un contenitore riempito d'acqua e mantenuto a temperatura costante. Rispetto alla superficie, il palloncino viene immerso ad una profondità $h_f = -2\,m$. Qual'è il volume finale del palloncino? Quanto calore ha fornito il palloncino all'acqua circostante?

Spiegazione Il palloncino viene portato ad una pressione maggiore, quindi il suo volume diminuisce. La trasformazione che compie il gas è isoterma, quindi il gas durante la compressione cede calore all'acqua.

Svolgimento Cominciamo con l'analizzare lo stato del gas

$$\begin{cases} P_f V_f = NKT_f \\ P_i V_i = NKT_i \end{cases}$$

Il gas si comprime a temperatura costante, quindi

$$P_i V_i = P_f V_f$$

La pressione finale a cui si trova il gas è ricavabile con l'equazione di Stevin

$$P_f = P_i - \rho g \Delta h = 10^5\,Pa - 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (-2\,m - 0\,m) = 119600\,Pa$$

Il volume finale del gas è quindi

$$V_f = V_i \cdot \frac{P_i}{P_f} = 21\,dm^3$$

Il calore che il gas ha scambiato con l'acqua è dato, considerando che la trasformazione è isoterma, dall'equazione

$$\delta Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Ricordando che

$$nRT = PV$$

otteniamo

$$\delta Q = P_i V_i \ln \frac{V_f}{V_i} = 2500\,J \cdot 0,18 = 447\,J$$

Fenomeni ondulatori: soluzioni — Scheda 5

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0001$

Testo *[O0001]* [1 1 4a]

Calcola l'angolo limite per riflessione totale per un raggio luminoso che passa dall'acqua all'aria. Gli indici di rifrazione di acqua e aria sono rispettivamente $n_{H_2O} = 1.33$ e $n_{aria} \sim 1$

Spiegazione Nel passaggio da un materiale ad un'altro la luce cambia la sua velocità e quindi cambia direzione di propagazione. Nel passaggio dall'acqua all'aria il raggio luminoso cambia direzione di propagazione aumentando l'angolo che forma con la perpendicolare alla superficie di separazione tra aria e acqua. L'angolo di incidenza della luce è quindi, in questo caso, minore dell'angolo di rifrazione. Visto che il massimo valore per l'angolo di rifrazione è $r = 90°$, in corrispondenza di questo valore si trova il valore dell'angolo limite di incidenza oltre il quale non può esistere il raggio rifratto.

Svolgimento A partire dalla legge di Snell, per un raggio luminoso che passa dall'acqua all'aria, impongo che il valore dell'angolo di rifrazione sia $r = 90°$.

$$\frac{sen(i)}{sen(90°)} = \frac{v_{acqua}}{v_{aria}}$$

$$sen(i) = \frac{1}{1,33}$$

$$i = arcsen(0,752) = 48,75°$$

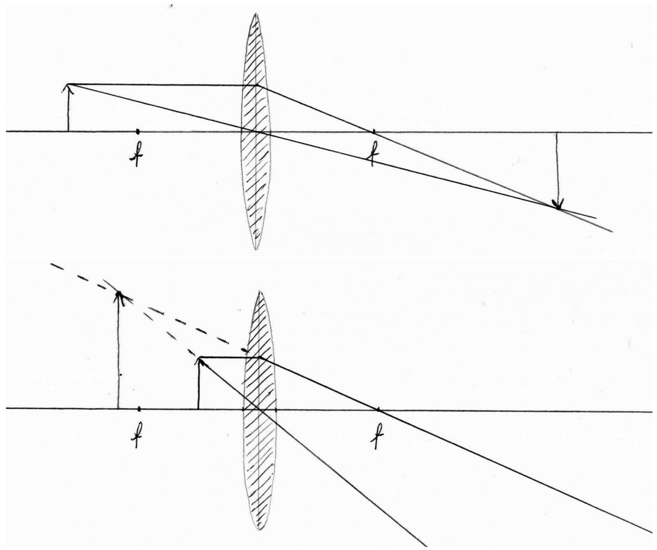
Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0002$

Testo *[O0002]* [1 3 4a]

Costruisci l'immagine di un oggetto generata da una lente sferica convergente, sia nel caso che l'oggetto si trovi tra la lente ed il fuoco, sia nel caso che si trovi oltre il fuoco.

Spiegazione Ogni lente crea un'immagine degli oggetti intorno ad essa. Le leggi dell'ottica geometrica mi permettono di costruire geometricamente tale immagine.

Svolgimento Una volta disegnati la lente, il suo asse ottico, i due fuochi e l'oggetto, dovete seguire il percorso di due raggi luminosi che partono dallo stesso punto dell'oggetto. Il primo, parallelo all'asse ottico, attraversando la lente viene deviato verso il fuoco della lente; il secondo, passando per il centro della lente, prosegue in linea retta. I due raggi luminosi, oppure i loro prolungamenti, si incontrano nel punto in cui si forma l'immagine. Disegnando l'oggetto alla sinistra della lente avremo quindi gli schemi in figura.



Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0003$

Testo *[O0003]* [1 ⭐ 1 ⌛ 4a 📖]

L'eco di un forte urlo viene percepito dalla persona che ha urlato dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 0,2\,s$. Sapendo che il suono in aria viaggia alla velocità $V_s = 344\,\frac{m}{s}$, quanto è distante la parete sulla quale il suono si è riflesso?

Spiegazione L'eco altro non è se non la riflessione di un suono. La persona che sta urlando emette un suono che raggiunge la parete di fronte alla persona e poi torna indietro fino alle orecchie della stessa persona.

Svolgimento Il suono in questo esercizio si sta muovendo sempre nell'aria, e viaggia quindi con velocità costante. Lo spazio percorso dal suono è pari al doppio della distanza della persona dalla parete, quindi, utilizzando l'equazione del moto rettilineo uniforme:

$$2d = U_s \Delta t$$

$$d = \frac{U_s \Delta t}{2} = \frac{344\,\frac{m}{s} \cdot 0,2\,s}{2} = 34,4\,m$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0004$

Testo *[O0004]* [1 1 4a]
Un suono emesso da un altoparlante viene percepito da una persona ad una distanza $r_1 = 20\,m$ con un'intensità $I_1 = 120\,\frac{J}{m^2 s}$. Con quale intensità verrà invece percepito da una persona alla distanza $r_2 = 30\,m$?

Spiegazione Il suono emesso dall'altoparlante si propaga nell'aria con un fronte d'onda sferico. L'intensità dell'onda, durante la sua propagazione, diminuisce in funzione del quadrato della distanza percorsa secondo la legge

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Infatti l'energia complessiva dell'onda, che assumiamo costante, man mano che l'onda si propaga sidistribuisce lungo un fronte d'onda rappresentato da una superficie sferica il cui valore dipende appunto dal quadrato del raggio della sfera.

Svolgimento Utilizzando l'opportuna formula avremo semplicemente:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}$$

$$I_2 = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2} I_1 = \frac{400\,m^2}{900\,m^2} \cdot 120\,\frac{J}{m^2 s} = 53.33\,\frac{J}{m^2 s}$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0005$

Testo *[O0005]* [1 2 4a]
Quanto vale la terza frequenza di risonanza su di una corda, fissata ai due estremi, lunga $l = 6\,m$, sulla quale le onde viaggiano alla velocità $V = 50\,\frac{m}{s}$? Disegna l'onda sulla corda.

Spiegazione Su di una corda fissata ai due estremi solo alcune onde si possono propagare. Visto che i due estremi sono fissi, devono coincidere con i nodi dell'onda stazionaria, per cui la lunghezza della corda deve essere un multiplo intero della semilunghezza d'onda.

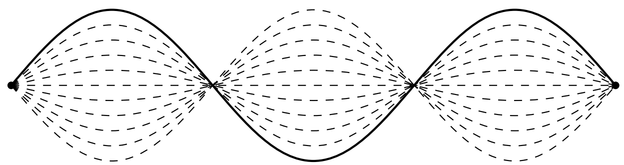
Svolgimento La lunghezza d'onda dell'ennesima onda stazionaria su di una corda fissata agli estremi vale

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} = 4\,m$$

La frequenza dell'ennesima onda stazionaria su di una corda fissata agli estremi vale

$$\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = 12,5\,Hz$$

Il disegno dell'onda sulla corda è



$\lambda = \frac{2l}{3}$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0006$

Testo *[O0006]* [1½ 2 4a]
Un suono emesso da un altoparlante viene percepito da Andrea ad una distanza $r_A = 20\,m$ con un'intensità $I_A = 120\,\frac{J}{m^2 s}$. Marco si trova alla distanza $d = 5\,m$ da Andrea, sul segmento tra Andrea e l'altoparlante. Con quale intensità il suono verrà percepito da Marco?

Spiegazione Il suono emesso dall'altoparlante si propaga nell'aria con un fronte d'onda sferico. L'intensità dell'onda, durante la sua propagazione, diminuisce in funzione del quadrato della distanza percorsa secondo la legge

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Infatti l'energia complessiva dell'onda, che assumiamo costante, man mano che l'onda si propaga si distribuisce lungo un fronte d'onda rappresentato da una superficie sferica il cui valore dipende appunto dal quadrato del raggio della sfera.

Svolgimento Utilizzando l'opportuna formula avremo semplicemente:

$$\frac{I_M}{I_A} = \frac{r_A^2}{r_M^2}$$

$$I_M = \frac{r_A^2}{r_M^2} I_A$$

La distanza a cui Marco si trova dalla sorgente è

$$r_M = r_A - d = 15\,m$$

$$I_M = \frac{400\,m^2}{225\,m^2} \cdot 120\,\frac{J}{m^2 s} = 213.33\,\frac{J}{m^2 s}$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0006a$

Testo *[O0006a]* [1½ 2 4a]
Un suono emesso da un altoparlante viene percepito da Andrea ad una distanza $r_A = 20\,m$ con un'intensità $I_A = 120\,\frac{J}{m^2 s}$. Dietro ad Andrea il suono prosegue ed incontra un muro alla distanza $d = 40\,m$ dalla sorgente, riflettendosi su di esso e raggiungendo nuovamente Andrea. Con quale intensità Andrea sente il suono riflesso?

Spiegazione Il suono emesso dall'altoparlante si propaga nell'aria con un fronte d'onda sferico. L'intensità dell'onda, durante la sua propagazione, diminuisce in funzione del quadrato della distanza percorsa secondo la legge

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Tutto il problema si riduce quindi a capire l'esatta lunghezza del percorso fatto dal suono.

Svolgimento Definiamo I_2 l'intensità del suono riflesso percepito da Andrea; definiamo r_2 la distanza percorsa dal suono, dalla sorgente fino alla parete e poi ancora fino alla posizione di Andrea. Utilizzando l'opportuna formula avremo semplicemente:

$$\frac{I_2}{I_A} = \frac{r_A^2}{r_2^2}$$

La distanza del percorso fatto dal suono riflesso è

$$r_2 = d + (d - r_A) = 60\,m$$

$$I_2 = \frac{r_A^2}{r_2^2} I_A = \frac{400\,m^2}{3600\,m^2} \cdot 120\,\frac{J}{m^2 s} = 13.33\,\frac{J}{m^2 s}$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0006b$

Testo *[O0006b]* [2 1 4a]
Marco si trova in un certo punto di una piazza. Una sirena, posta a distanza $r_1 = 20\,m$ verso est rispetto a Marco, emette un suono che Marco percepisce di intensità $I_m = 120\,\frac{J}{m^2 s}$. Andrea si trova a distanza $r_2 = 21\,m$ a nord rispetto a Marco. Quale intensità sonora percepisce Andrea?

Spiegazione L'intensità di un'onda dipende dalla distanza a cui si trova l'osservatore dalla sorgente.

Svolgimento La distanza tra Andrea e la sorgente è data da

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 29\,m$$

L'intensità percepita è quindi

$$I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{d^2} = 120\,\frac{J}{m^2 s} \cdot \frac{400\,m}{841\,m} = 57,07\,\frac{J}{m^2 s}$$

Problema di: Onde - $O0006c$

Testo *[O0006c]* [1½ 2 4a]
Una sorgente sonora emette un suono percepito da un osservatore a distanza $r_1 = 10\,m$. Tale suono si riflette poi su di una parete dietro all'osservatore che percepisce quindi un eco di intensità 4 volte inferiore. Quanto è distante la parete dall'osservatore?

Spiegazione L'onda prodotta dalla sorgente ed il suo eco arrivano all'osservatore facendo percorsi differenti, quindi arrivano con intensità differente

Svolgimento Chiamiamo d la distanza dell'osservatore dalla sorgente. I percorsi delle due onde, l'onda iniziale ed il suo eco, sono r_1 e

$$r_{eco} = r_1 + 2d$$

Possiamo quindi scrivere

$$I_1 r_1^2 = I_{eco} r_{eco}^2$$

$$\frac{I_1}{I_{eco}} = 4$$

$$\frac{r_{eco}^2}{r_1^2} = 4$$

$$r_{eco} = 2r_1$$

$$r_1 + 2d = 2r_1$$

$$d = \frac{r_1}{2} = 5\,m$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0008$

Testo *[O0008]* [3 3 4a]
Un oggetto è posto ad una distanza da una lente sferica convergente tale per cui l'immagine generata risulta di dimensioni doppie rispetto all'oggetto: $|G| = 2$. Sapendo che la distanza focale della lente vale $f = 30\,cm$, a quale distanza dalla lente si trova l'oggetto? Disegna il sistema ottico.

Spiegazione Ogni lente crea un'immagine degli oggetti intorno ad essa. Le leggi dell'ottica geometrica mi permettono di costruire geometricamente tale immagine. L'immagine risulta ingrandita o rimpicciolita a seconda di dove si trova l'oggetto rispetto al fuoco della lente.

Svolgimento Per una lente convergente, la formula dell'ingrandimento ottenuto è

$$G = \frac{f}{f - p}$$

da cui

$$G \cdot (f - p) = f$$

$$Gf - Gp = f$$

$$Gp = Gf - f$$

$$p = \frac{f \cdot (G - 1)}{G}$$

Calcolando p, nell'ipotesi che l'immagine sia dritta, otteniamo

$$p = \frac{30\,cm \cdot (2 - 1)}{2} = 15\,cm$$

L'immagine risulterà virtuale.

Calcolando p, nell'ipotesi che l'immagine sia capovolta, otteniamo

$$p = \frac{30\,cm \cdot (-2 - 1)}{-2} = 45\,cm$$

L'immagine risulterà reale.

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0009$

Testo *[O0009]* [1 2 4a]
Un oggetto è posto di fronte ad una lente convergente ad una distanza $p = 20\,cm$. La distanza focale della lente è $f = 15\,cm$. A quale distanza dalla lente si forma l'immagine? Quanto vale il fattore di ingrandimento? Disegna il sistema fisico descritto.

Spiegazione Ogni lente crea un'immagine degli oggetti intorno ad essa. Le leggi dell'ottica geometrica mi permettono di costruire geometricamente tale immagine. L'immagine risulta ingrandita o rimpicciolita a seconda di dove si trova l'oggetto rispetto al fuoco della lente. Vale la legge dei punti coniugati, che mette in relazione la distanza dell'oggetto dalla lente, la distanza focale e la distanza dell'immagine dalla lente.

Svolgimento Per una lente convergente, la formula dell'ingrandimento ottenuto è

$$G = \frac{f}{f-p} = \frac{15\,cm}{15\,cm - 20\,cm} = -3$$

L'immagine risulta capovolta ed ingrandita del triplo. Utilizzando adesso la legge dei punti coniugati per trovare la distanza q dell'immagine dalla lente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{fp}$$

$$q = \frac{fp}{p-f} = \frac{15\,cm \cdot 20\,cm}{20\,cm - 15\,cm} = 60\,cm$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0010$

Testo *[O0010]* [1 2 4a]
Calcola la velocità di un'onda su una corda fissata ai due estremi e lunga $L = 12\,m$, sapendo che la quinta frequenza di risonanza è $\nu_5 = 9\,Hz$. Disegna l'onda sulla corda.

Spiegazione Su di una corda fissata ai due estremi solo alcune onde si possono propagare. Visto che i due estremi sono fissi, devono coincidere con i nodi dell'onda stazionaria, per cui la lunghezza della corda deve essere un multiplo intero della semilunghezza d'onda.

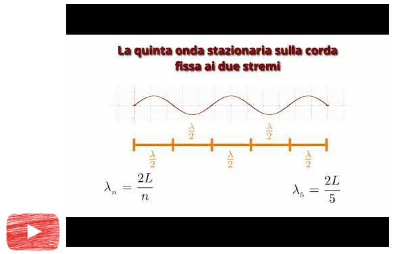


Fig. 5.1: *Guarda il video youtu.be/JVqsMEledSs*

Svolgimento La lunghezza d'onda dell'ennesima onda stazionaria su di una corda fissata agli estremi vale

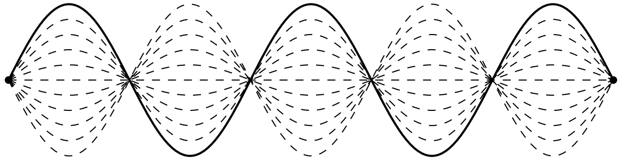
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_5 = \frac{2L}{5} = 4,8\,m$$

La velocità dell'onda stazionaria sulla corda fissata agli estremi vale

$$V = \lambda_5 \nu_5 = 43,2\,\frac{m}{s}$$

Il disegno dell'onda sulla corda è



$\lambda = \frac{2L}{5}$

Problema di: Onde - $O0011$

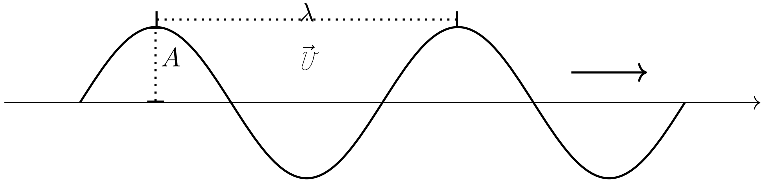
Testo [O0011] [1 4 4a]

1. Cos'è un'onda?
2. Indica la differenza tra onde trasversali ed onde longitudinali
3. Indica la differenza tra onde meccaniche ed onde elettromagnetiche
4. Disegna un'onda ed indicane tutte le variabili che la descrivono

Spiegazione Queste sono domande di teoria... o le sai o le devi ripassare

Svolgimento

1. Un'onda è un movimento di energia.
2. In un'onda trasversale l'oscillazione avviene su di una linea perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, per le onde longitudinali tale oscillazione è parallela alla direzione di propagazione dell'onda.
3. Un'onda meccanica è data dall'oscillazione del mezzo entro il quale si propaga; in un'onda elettromagnetica ciò che oscilla è un campo elettromagnetico e non il materiale entro cui l'onda si propaga
4. Le variabili che descrivono un'onda sono:
   (a) l'ampiezza (il massimo valore dell'oscillazione)
   (b) la frequenza (il numero di oscillazioni al secondo)
   (c) la lunghezza d'onda (la distanza tra un picco ed il picco successivo)
   (d) la velocità (il numero di metri al secondo)
   (e) il periodo (la durata di una oscillazione)
   (f) l'intensità (l'energia che incide su di una certa superficie in un certo intervallo di tempo)



Problema di: Onde - $O0012$

Testo [O0012] [1 1 4a]

Un raggio di luce passa dall'aria all'acqua con un angolo di incidenza $i = 45°$. L'indice di rifrazione dell'aria è $n_{aria} = 1,0003$, mentre quello dell'acqua è $n_{H_2O} = 1,33$. Con quale angolo di rifrazione il raggio entra nell'acqua?

Spiegazione Semplicemente il fenomeno della rifrazione

Svolgimento

$$\frac{\sin(r)}{\sin(i)} = \frac{n_{aria}}{n_{H_2O}}$$

$$\sin(r) = \frac{1,0003}{1,33} \cdot \frac{\sqrt(2)}{2} = 0,53182$$

$$r = \arcsin(0,53182) = 32,13°$$

Problema di: Onde - $O0013$

Testo *[O0013]* [1 4 4a]

Rispondi alle seguenti domande:

1. Cos'è un'onda? Quali tipi di onde conosci?
2. Da cosa dipende la velocità di un'onda?
3. Elenca, spiegandone il significato, le grandezze fisiche con cui descriviamo un'onda.

Spiegazione Queste sono domande di teoria... se non le sai ripassa la teoria

Svolgimento

1. Un'onda è un movimento di energia. Le onde si dividono in *meccaniche* (sono l'oscillazione del materiale in cui si propagano) ed *elettromagnetiche* (sono l'oscillazione di un campo elettromagnetico). Le onde si dividono anche in *trasversali* e *longitudinali*, a seconda che l'oscillazione delle molecole sia perpendicolare o parallela alla direzione di propagazione dell'onda.
2. La velocità di un'onda dipende dal materiale in cui si propaga. Esiste però il fenomeno della dispersione della luce, per il quale l'indice di rifrazione ha una lieve dipendenza dalla frequenza dell'onda incidente.
3. Le grandezze fisiche con cui descrivo un'onda sono:
   - ampiezza: la massima distanza di una molecola dal punto di equilibrio
   - lunghezza d'onda: la lunghezza di un'oscillazione completa
   - frequenza: il numero di oscillazioni al secondo
   - periodo: la durata diuna singola oscillazione
   - velocità: il numero di metri percorsi in un secondo
   - intensità: l'energia incidente su una superficie in un intervallo di tempo

Problema di: Onde - $O0014$

Testo *[O0014]* [1 4 4a]

Domande di teoria:

1. Quali fenomeni accadono quando un'onda passa da un materiale ad uno differente? Elencali e spiegali.
2. Perchè il suono non si può propagare nel vuoto?
3. Cosa vuol dire *vedere* un oggetto? Perchè al buio non vediamo niente? Perchè non vedo nulla delle cose che stanno dietro ad un muro?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... se non le sai ripassa la teoria

Svolgimento

1. I fenomeni che accadono sono due: la riflessione e la rifrazione. L'onda incidente si divide in due onde, una riflessa ed una rifratta. L'onda riflessa torna indietro con un angolo uguale all'angolo di incidenza; l'onda rifratta prosegue nel nuovo materiale cambiando angolo.
2. Un suono é l'oscillazione di un materiale. Nel vuoto non c'é nulla e quindi nulla puó oscillare; nel vuoto non puó esistere alcun suono.
3. Vedere un oggetto significa ricevere negli occhi la luce di quell'oggetto. Al buio non c'é luce e quindi non ci possono essere immagini. Se tra un oggetto ed i nostri occhi c'é un muro, allora l'oggetto non lo vediamo perché la luce viene bloccata dal muro e non arriva ai nostri occhi.

Problema di: Onde - $O0015$

Testo [O0015] [1 2 4a]

Un raggio di luce verde ($\nu = 6 \cdot 10^{14}\, Hz$) attraversa perpendicolarmente una lastra di vetro con indice di rifrazione $n = 1,4$. Sapendo che la lastra di vetro è spessa $d = 3\, mm$, quante oscillazioni compie il raggio luminoso nell'attraversare tale lastra?

Spiegazione Il problema parla di un raggio di luce e, dicendoci che è verde, ci fornisce il valore della sua frequenza. Conoscendo poi l'indice di rifrazione del vetro, di fatto conosciamo la velocità della luce in quel vetro. Possiamo quindi determinare la lunghhezza d'onda di quella luce nel vetro. Sapendo lo spessore del vetro possiamo infine determinare quante volte tale lunghezza d'onda è contenuta nello spessore del vetro.

Svolgimento La velocità della luce nel vetro è

$$U = \frac{c}{n} = \frac{299792458\, \frac{m}{s}}{1,4} = 214137470\, \frac{m}{s}$$

La lunghezza d'onda della luce è

$$\lambda = \frac{U}{\nu} = \frac{214137470\, \frac{m}{s}}{6 \cdot 10^{14}\, Hz} = 3,57 \cdot 10^{-7}\, m = 357\, nm$$

Il numero di oscillazioni complete fatte dall'onda nell'attraversare il vetro è quindi

$$n = \frac{d}{\lambda} = 8403$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0016$

Testo [O0016] [1 1 4a]

Costruisci l'immagine di un oggetto generata da una lente sferica divergente. Indica se l'immagine è dritta e se è reale.

Spiegazione Ogni lente crea un'immagine degli oggetti intorno ad essa. Le leggi dell'ottica geometrica mi permettono di costruire geometricamente tale immagine.

Svolgimento Lo schema dell'ottica è il seguente:

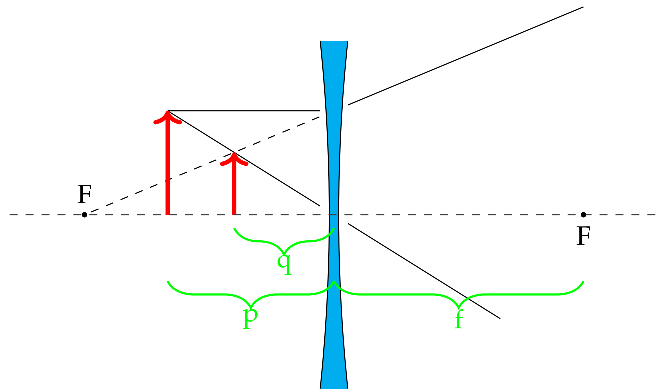


Fig. 5.2: *Costruzione dell'immagine di una lente divergente. Con F sono indicati i fuochi della lente, con f la distanza focale, con p la distanza dell'oggetto dalla lente, con q la distanza dell'immagine dalla lente. L'immagine risulta dritta e virtuale.*

Una volta disegnati la lente, il suo asse ottico, i due fuochi e l'oggetto, dovete seguire il percorso di due raggi luminosi che partono dallo stesso punto dell'oggetto. Il primo, parallelo all'asse ottico, attraversando la lente viene deviato e diverge come se provenisse dal fuoco della lente; il secondo, passando per il centro della lente, prosegue in linea retta. I due raggi luminosi, oppure i loro prolungamenti, si incontrano nel punto in cui si forma l'immagine. Avremo un'immagine dritta e virtuale.

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0017$

Testo *[O0017]* [1 2 4a]
Un'asticella lunga $l = 150\,cm$, oscilla con un estremo fisso l'altro libero. La velocità di un'onda nell'asticella è $U = 24\,\frac{m}{s}$. Calcola la terza frequenza di risonanza dell'asticella. Disegna l'onda sull'asticella.

Spiegazione Un'asticella che viene fatta oscillare mantenendola fissa ad uno degli estremi, oscilla in modo stazionario mantenendo un nodo (assenza di oscillazione) sul punto fisso ed un ventre (massima oscillazione) nel punto libero dalla parte opposta. Solo le onde della lunghezza d'onda giusta.

Svolgimento Per un'asticella bloccata ad un estremo e lasciata libera all'altro, la prima frequenza di risonanza si ottiene quando l'onda ha una lunghezza d'onda pari a quattro volte la lunghezza dell'asticella.

$$\lambda_1 = 4\,l$$

La seconda frequenza di risonanza si ottiene quando l'onda ha una lunghezza d'onda pari a quattro terzi della lunghezza dell'asticella.

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}\,l$$

La terza frequenza di risonanza si ottiene quando l'onda ha una lunghezza d'onda pari a quattro quinti della lunghezza dell'asticella.

$$\lambda_3 = \frac{4}{5}\,l$$

La terza frequenza di risonanza è quindi

$$\nu_3 = \frac{U}{\lambda_3} = \frac{24\,\frac{m}{s}}{\frac{4}{5}\cdot 1,5\,m} = 20\,Hz$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0018$

Testo *[O0018]* [1 ★ 2 ⌛ 4a 📖]
Sapendo che gli indici di rifrazione di aria e acqua sono rispettivamente $n_a = 1,00029$ e $n_{H_2O} = 1,33$ calcola lo spessore di aria che un raggio di luce deve attraversare per impiegare lo stesso tempo che impiegherebbe ad attraversare uno spessore $\Delta L_{H_2O} = 20\,cm$ di aria.

Spiegazione In questo esercizi abbiamo due raggi di luce che si muovono in due materiali differenti. La velocità della luce dipende solo dal materiale in cui si propaga; quindi i due raggi luminosi viaggiano con velocità costante di moto rettilineo uniforme. Per risolvere il problema è sufficiente imporre la condizione per cui i due raggi luminosi impiegano lo stesso tempo a fare il loro percorso.

Svolgimento Sappiamo che la velocità della luce in un certo materiale è $V = \frac{c}{n}$ dove c è la velocità della luce nel vuoto e n è l'indice di rifrazione della luce. Il tempo impiegato dalla luce ad attraversare uno strato ΔL di acqua è

$$\Delta t_{H_2O} = \frac{\Delta L}{V_{H_2O}} = \frac{\Delta L}{c} n_{H_2O}$$

Analogalmente per l'aria

$$\Delta t_{aria} = \frac{\Delta S}{V_{aria}} = \frac{\Delta S}{c} n_{aria}$$

dove ΔS è la lunghezza del percorso della luce nell'aria. Avremo che

$$\frac{\Delta S}{c} n_{aria} = \frac{\Delta L}{c} n_{H_2O}$$

$$\Delta S = \Delta L \frac{n_{H_2O}}{n_{aria}} = 26,6\,cm$$

Problema di: Onde - $O0019$

Testo *[O0019]* [1 ★ 2 ⌛ 4a 📖]
Rispondi alle seguenti domande:

1. Quali differenze ed analogie ci sono tra la luce visibile, i raggi X con cui fai una lastra e le onde radio per le telecomunicazioni?
2. Perchè d'estate preferisco indossare vestiti bianchi e non neri?
3. Come mai d'estate in generale le temperature sono alte, mentre d'inverso in generale le temperature sono basse?
4. Qual'è la principale differenza tra la luce diffusa da un muro e la luce riflessa da uno specchio?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... se non le sai ripassa la teoria

Svolgimento

1. Le onde elencate sono tutte onde elettromagnetiche e sono quindi la stessa cosa; l'unica differenza è il valore della loro frequenza. Elencate in ordine di frequenza le onde elettromagnetiche sono: onde radio, microonde, infrarossi, luce visibile, ultravioletti, raggi X, raggi gamma.
2. Un oggetto è nero se assorbe tutti i raggi luminosi che incidono su di esso, trasformando la loro energia in calore. UN oggetto è bianco quando riflette tutta la radiazione luminosa incidente. Se mi vesto di nero in una giornata calda avrò molto più caldo di quanto ne avrei vestendomi di bianco.
3. D'estate la luce tende ad illuminare una superficie minore di quanto illumina durante l'inverno. L'intensità luminosa sul terreno è quindi maggiore, con un conseguente riscaldamento del materiale illuminato
4. La luce diffusa, dopo essere stata assorbita dal muro, vene riemessa in tutte le direzioni. La luce riflessa da uno specchio, invece, ritorna indietro con un angolo di riflessione ben determinato e quindi con una direzione unica.

Problema di: Onde - $O0020$

Testo *[O0020]* [1 2 4a]
Rispondi alle seguenti domande.

1. Indica quale grandezza fisica dell'onda determina: il colore della luce visibile; la luminosità della luce visibile; il volume di un suono; la tonalità del suono?
2. Con un puntatore laser indico un punto su di un muro. Tutti nella stanza vedono quel punto. Sto parlando di un fenomeno di riflessione o di diffusione? Perchè?
3. Descrivi un fenomeno fisico in cui sia presente l'effetto Doppler.

Spiegazione In questo esercizio vengono presentate due domande di teoria per cui bisogna semplicemente studiare l'argomento, ed una situazione in cui bisogna applicare i concetti studiati.

Svolgimento

1. Parlando del suono, la frequenza ne indica la tonalità, l'ampiezza ne indica il volume. Per la luce, la frequenza ne indica il colore, l'ampiezza ne indica la luminosità.
2. La luce del puntatore laser arriva su di un punto del muro e viene poi vista da tutte le persone della stanza. Questo vuol dire che da quel punto la luce si è propagata in tutte le direzioni, quindi si parla del fenomeno della diffusione
3. Qunado sentiamo il suono della sirena di un'ambulanza, lo sentiamo acuto se l'ambulanza si avvicina a noi, mentre lo sentiamo basso se l'ambulanza si allontana da noi. Allo stesso modo, quando guardiamo la luce proveniente da una stella, tale luce è un po' più blu se la stella si avvicina a noi, mentre la vediamo un po' più rossa se la stella si sta allontanando.

Problema di: Onde - $O0021$

Testo *[O0021]* [1 6 4a]
Rispondi alle seguenti domande.

1. Immaginiamo di irradiare la superficie di un metallo con un fascio di luce monocromatica. L'energia dei singoli fotoni è $E = 5,0 \cdot 10^{-19}\,J$. Il lavoro di estrazione è $\Psi = 3,6 \cdot 10^{-19}\,J$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   (a) Dal metallo non escono elettroni
   (b) Dal metallo escono elettroni con energia cinetica nulla
   (c) Dal metallo escono elettroni con energia cinetica $E_c = 1,4 \cdot 10^{-19}\,J$
   (d) Dal metallo escono elettroni con energia cinetica $E_c = 6,4 \cdot 10^{-19}\,J$
2. In una fibra ottica monomodale un segnale viene attenuato man mano che si propaga lungo la fibra stessa. Quale di questi fattori NON determina un'attenuazione del segnale?
   (a) La presenza di impurità all'interno della fibra
   (b) La presenza di curve nel percorso della fibra
   (c) La presenza di interconnessioni tra fibre
   (d) La scelta dei valori degli indici di rifrazione del nucleo e del mantello della fibra
3. Un raggio luminoso passa da un materiale con indice di rifrazione $n_1 = 1,41$ verso un materiale con indice di rifrazione n_2. Affinchè possa esserci riflessione totale quali delle seguenti affermazioni è vera?
   (a) n_2 sia minore di n_1
   (b) n_2 sia maggiore di n_1
   (c) n_2 sia uguale a n_1
   (d) n_2 può assumere qualunque valore.
4. Riguardo ai fenomeni della fluorescenza e della fosforescenza, indica quale delle seguenti affermazioni è FALSA:
   (a) Il fenomeno della fluorescenza non ha la stessa durata del fenomeno della fosforescenza
   (b) Entrambi i fenomeni iniziano con il salto energetico di un elettrone da un livello energetico inferiore ad uno superiore.
   (c) A differenza della fluorescenza, il fenomeno della fosforescenza coinvolge anche le cariche elettriche del nucleo dell'atomo.
   (d) In entrambi i fenomeni la radiazione luminosa emessa ha energia inferiore della radiazione eccitante iniziale

Spiegazione In questo esercizio vengono presentate domande di teoria per cui bisogna semplicemente studiare l'argomento.

Svolgimento

1. Immaginiamo di irradiare la superficie di un metallo con un fascio di luce monocromatica. l'energia dei singoli fotoni è $E = 5,0 \cdot 10^{-19}\,J$. Il lavoro di estrazione è $\Psi = 3,6 \cdot 10^{-19}\,J$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   (a) Dal metallo escono elettroni con energia cinetica $E_c = 1,4 \cdot 10^{-19}\,J$
2. In una fibra ottica monomodale un segnale viene attenuato man mano che si propaga lungo la fibra stessa. Quale di questi fattori NON determina un'attenuazione del segnale?
   (a) La scelta dei valori degli indici di rifrazione del nucleo e del mantello della fibra
3. Un raggio luminoso passa da un materiale con indice di rifrazione $n_1 = 1,41$ verso un materiale con indice di rifrazione n_2. Affinchè possa esserci riflessione totale quali delle seguenti affermazioni è vera?
   (a) n_2 sia minore di n_1

4. Riguardo ai fenomeni della fluorescenza e della fosforescenza, indica quale delle seguenti affermazioni è FALSA:

   (a) A differenza della fluorescenza, il fenomeno della fosforescenza coinvolge anche le caiche elettriche del nucleo dell'atomo.

Problema di: Onde - $O0024$

Testo *[O0024]* [2 10 4a]
Una fibra ottica immersa in aria ha le seguenti caratteristiche: diametro del nucleo $d_c = 50\,\mu m$, indice di rifrazione del nucleo $n_1 = 1,527$, diametro del mantello $d_m = 125\,\mu m$, indice di rifrazione del mantello $n_2 = 1,517$. Nella fibra si propagano segnali luminosi di lunghezza d'onda $\lambda = 1300\,nm$. Determinare il numero dei modi di propagazione ed il cono di accettazione. Indicare in modo sintetico perchè la presenza di più modi di propagazione determina una attenuazione del segnale e come dovrebbe essere modificata la fibra per renderla monomodale.

Spiegazione In questo esercizio si tratta di una fibra ottica. I dati del problema sono già sufficienti per calcolare le grandezze richieste utilizzando le opportune formule.

Svolgimento Il cono di accetazione è determinato da

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1,527^2 - 1,517^2} = 0,1745$$

Il numero di modi di propagazione è dato da

$$M = \frac{\pi^2 d^2 N_A^2}{2\lambda^2}$$

$$M = \frac{\pi^2 (125\,\mu m)^2 \left(1,527^2 - 1,517^2\right)}{2(1,3\,\mu m)^2} = 1388$$

L'attenuazione del segnale è dovuta al fatto che per ogni modo di propagazione la velocità del segnale lungo l'asse della fibra è differente. Durante la propagazione l'impulso luminoso si allarga lungo l'asse della fibra, perdendo quindi di intensità. Stabiliti i materiali di cui è fatta la fibra, per rendere la fibra monomodale è sufficiente diminuire il diametro del core in modo tale da rendere $M = 1$

Problema di: Onde - $O0026$

Testo *[O0026]* [1 ★ 1 ⌛ 4a 📖]
Una lampadina ad incandescenza di potenza $P = 100\,W$ emette luce in maniera isotropa. Se viene posta al centro di una stanza cubica di lato $L = 7\,m$. Quanta energia arriverà in un tempo $\Delta t = 10\,min$ sul soffitto della stanza?

Spiegazione La lampadina emette luce, quindi emette una certa quantità di energia ogni secondo. La difficoltà di questo esercizio è solo nel capire quale frazione del totale dell'energia emessa incide sul soffitto.

Svolgimento L'energia totale emessa nel tempo indicato dal testo dell'esercizio è

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 100\,W \cdot 10\,min = 100\,W \cdot 600\,s = 60\,kJ$$

Consideriamo adesso che la lampadina si trova nel centro di una stanza cubica. Vista la simmetria della situazione possiamo affermare che ogni lato del cubo prende la stessa quantità di energia, quindi l'energia che incide sul soffitto è data da

$$\Delta E_{soff} = \frac{\Delta E}{6} = 10\,kJ$$

Problema di: Onde - $O0027$

Testo *[O0027]* [1 ★ 4 ⌛ 4a 📖]
Rispondi alle seguenti domande:

1. Come determini la direzione del raggio riflesso in una riflessione?
2. Che differenza c'è tra riflessione e diffusione?
3. In quale istante avviene la riflessione di un'onda?
4. Nel fenomeno della riflessione, perchè non cambia la velocità dell'onda?

Spiegazione Queste sono domande di teoria sul fenomeno della riflessione. Vanno semplicemente studiate!

Svolgimento

1. Il raggio incidente viene riflesso ad un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza; inoltre i raggi incidente e riflesso, e la perpendicolare alla superficie di riflessione si trovano su di uno stesso piano.
2. Nel fenomeno della diffuzione i raggi incidenti vengono riemessi in tutte le direzioni possibili e non nella sola direzione possibile definita dalle regole della riflessione.
3. La riflessione avviene nell'istante in cui un'onda prova a cambiare il materiale di propagazione e quindi la sua velocità.
4. L'onda riflessa si trova nello stesso materiale dell'onda incidente, quindi la sua velocità non cambia.

Problema di: Onde - $O0028$

Testo [O0028] [1 ⭐ 2 ⏳ 4a 📖]
Rispondi alle seguenti domande:

1. Quali fenomeni fisici sono legati al funzionamento di lenti e specchi?
2. Come si forma un'onda stazionaria?
3. Per quale motivo se una persona si sta allontanando da noi, sentiamo la sua voce di un volume minore?
4. In che modo cambia il suono di una sirena se tale sirena si sta avvicinando od allontanando da noi? Per quale motivo?

Spiegazione Queste sono domande di teoria sul fenomeno della riflessione. Vanno semplicemente studiate!

Svolgimento

1. Le lenti funzionano grazie al fenomeno della rifrazione; gli specchi grazie al fenomeno della riflessione.
2. Un'onda stazionaria si forma a causa dell'interferenza di due onde identiche che viaggiano in direzione opposta.
3. L'energia dei suoni che emettiamo si trova su di un fronte d'onda sferico che, avanzando, aumenta la sua superficie. La stessa energia si trova quindi su di superfici sempre più grandi e quindi l'intensità dell'onda diminuisce. Detta S la superficie del fronte d'onda, $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ la potenza emessa dalla sorgente sonora, l'intensità dell'onda sonora è infatti
$$I = \frac{\Delta E}{S \cdot \Delta t}$$
4. A causa dell'effetto Doppler, la frequenza di un'onda viene percepita in modo differente a seconda che l'osservatore si stia avvicinando od allontanando dalla sorgente. Quando sorgente ed osservatore si avvicinano, l'osservatore riceve un'onda di frequenza maggiore rispetto a quella che riceverebbe se fosse in quiete rispetto alla sorgente. Viceversa nel caso che l'osservatore si stia allontanando dalla sorgente.

Problema di: Fenomeni Ondulatori - *O*0029

Testo *[O0029]* [1 1 4a]
Una nave manda un impulso sonar verso il basso per misurare la profondità del fondale. La nave sente l'eco dopo un tempo $\Delta t = 1,2\,s$. Sapendo che il suono in acqua viaggia alla velocità $V_s = 1400\,\frac{m}{s}$, quanto è profondo il fondale?

Spiegazione L'eco altro non è se non la riflessione di un suono. Un sonar manda un impulso verso il basso che fa eco sul fondale.

Svolgimento Il suono in questo esercizio si sta muovendo sempre nell'acqua, e viaggia quindi con velocità costante. Lo spazio percorso dal suono è pari al doppio della prondità del fondale, quindi, utilizzando l'equazione del moto rettilineo uniforme:

$$2h = \mathcal{V}_s \Delta t$$

$$h = \frac{\mathcal{V}_s \Delta t}{2} = \frac{1400\,\frac{m}{s} \cdot 1,2\,s}{2} = 840\,m$$

Problema di: Onde - *O*0030

Testo *[O0030]* [2 2 4a]

Nell'immagine è raffigurato un aereoplano che supera la barriera del suono. Si vede chiaramente il cono di vapore acqueo condensato corrispondente alla superficie dell'onda d'uro. Calcola la velocità dell'aereo sapendo che il cono dell'onda d'urto ha un angolo al vertice $\alpha = 120°$.

Spiegazione l'onda d'urto si genera quando la sorgente si muove ad una velocità superiore a quella del suono che emette. La forma dell'onda d'urto è quella di un cono il cui angolo al vertice dipende dalle velocità del suono e dell'aereo.

Svolgimento In un certo intervallo di tempo Δt l'aereo ed il suono percorrono una distanza

$$L = \mathcal{V}_{aereo} \cdot \Delta t$$

$$D = \mathcal{V}_{suono} \cdot \Delta t$$

Queste due distanze sono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo il cui angolo opposto al cateto è

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{L} = \frac{\mathcal{V}_{suono}}{\mathcal{V}_{aereo}}$$

Quindi

$$\mathcal{V}_{aereo} = \frac{\mathcal{V}_{suono}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{340\,\frac{m}{s}}{\sin 60°} = 393\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0030a$

Testo [O0030a] [2 2 4a]
Una pallottola viene sparata a velocità $U = 800\frac{m}{s}$. Disegna il cono che l'onda d'urto forma con la direzione del moto della pallottola e calcolane l'angolo al vertice.

Spiegazione La pallottola viaggia in aria ad una velocità maggiore di quella del suono, quindi si forma un'onda d'urto conica.

Svolgimento La soluzione del problema la si raggiunge analizzando la geometria dei percorsi della pallottola e del suono. La distanza percorsa dalla pallottola, la distanza percorsa dal suono e il fronte dell'onda d'urto formano un triangolo rettangolo. Le due distanze le calcoliamo per un generico tempo Δt, in base alle velocità U_s del suono e U_p della pallottola. L'angolo cercato lo troviamo utilizzando la trigonometria

$$\sin\alpha = \frac{U_s\Delta t}{U_p\Delta t} = \frac{U_s}{U_p}$$

$$\sin\alpha = \frac{330\,\frac{m}{s}}{800\,\frac{m}{s}} = 0,4125$$

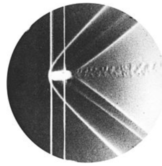
$$\alpha = 24,36^\circ$$

La sezione del cono dell'onda d'urto ha quindi un'ampiezza in gradi

$$\theta = 2\alpha = 48,72^\circ$$

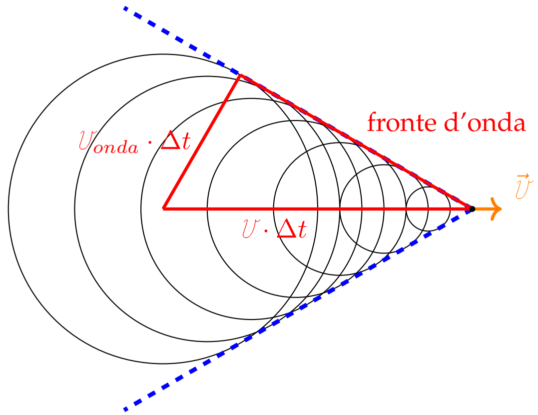
Problema di: Onde - $O0030b$

Testo [O0030b] [2 2 4a]



Nel 1887 Ernst Mach scattò la prima fotografia (mostrata qui a lato) di un'onda d'urto dovuta al moto di un proiettile supersonico in aria. Assumendo che l'angolo tra i due fronti d'onda sia $\alpha = 90^\circ$, determina la velocità del proiettile.

Spiegazione In questa situazione la sorgente delle onde viaggia nel materiale più rapidamente di quanto viaggino le onde sonore nello stesso materiale, quindi si forma un'onda d'urto.



Svolgimento
Dallo schema che analizza la formazione delle onde d'urto avremo

$$U\Delta t\sin\frac{\alpha}{2} = U_s\Delta t$$

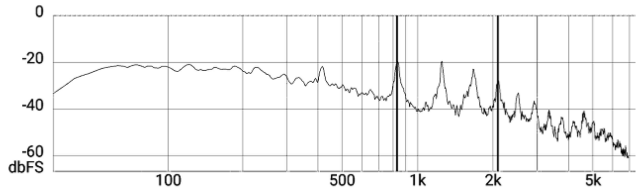
$$U\sin\frac{\alpha}{2} = U_s$$

$$U = \frac{U_s}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\cdot 340\,\frac{m}{s} = 481\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0031$

Testo [O0031] [2 2 4a]

In figura è mostrato lo spettro di frequenze (con le frequenze indicate su scala logaritmica) di un suono prodotto da aria che passa in un tubo aperto ad entrambe le estremità. Le due linee evidenziate corrispondono alle frequenze $\nu_1 = 829\,Hz$ e $\nu_2 = 2088\,Hz$. Sapendo che il suono viaggia in aria alla velocità $U = 340\,\frac{m}{s}$, quanto è lungo il tubo?



Spiegazione Nel grafico in figura sono rappresentati i picchi di maggiore intensità per le frequenze di risonanza del tubo. Essendo il tubo aperto ai due lati, l'onda stazionaria che in esso si forma ha un massimo (*ventre*) su entrambe le aperture. Tra una frequenza di risonanza e la successiva, quindi, ci deve essere una differenza pari a mezza lunghezza d'onda. Guardando tutti i picchi presenti nel grafico, si vede che i due segnati indicano la seconda e la quinta frequenza di risonanza. Per la seconda frequenza di risonanza la lunghezza del tubo è pari alla lunghezza d'onda del suono.

Svolgimento Indicando con l'indice n l'ennesima onda di risonanza, avremo

$$L = \lambda_2 = \frac{U_{suono}}{\nu_2} = \frac{340\,\frac{m}{s}}{829\,Hz} = 0,41\,m$$

Problema di: Onde - $O0032$

Testo [O0032] [2 2 4a]

Un'ambulanza dista da una persona $r_1 = 200\,m$ e si muove verso di essa a velocità costante $V = 15\,\frac{m}{s}$. Sapendo che l'intensità sonora percepita è $I_1 = 0,5\,\frac{W}{m^2}$, quale intensità sonora verrà percepita dopo un tempo $\Delta t = 4\,s$?

Spiegazione L'intensità di un'onda varia al variare della distanza tra l'osservatore e la sorgente. Inizialmente la distanza è data; la distanza finale è ricavabile conoscendo il movimento della sorgente.

Svolgimento Cominciamo con il calcolarci la distanza finale tra sorgente ed osservatore

$$r_2 = r_1 - V \cdot \Delta t = 200\,m - 15\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s = 140\,m$$

L'intensità percepita sarà quindi

$$I_2 r_2^2 = I_1 r_1^2$$

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = 0,5\,\frac{W}{m^2}\,\frac{40000\,m^2}{19600\,m^2} = 1,02\,\frac{W}{m^2}$$

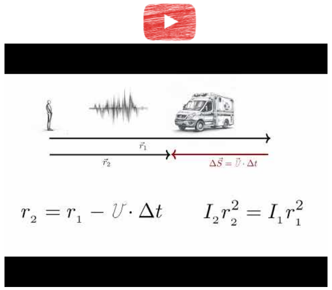


Fig. 5.3: *Guarda il video youtu.be/btmBK4c3Flg*

Problema di: Onde - $O0033$

Testo [O0033] [2 2 4a]

I sali di litio su di una fiamma emettono luce rossa dovuta ad una riga monocromatica di frequenza $\nu = 4,469 \cdot 10^{14}\,Hz$. In acqua tale luce ha una lunghezza d'onda $\lambda = 0,504 \cdot 10^{-6}\,m$. Quanto vale l'indice di rifrazione dell'acqua?

Spiegazione Un raggio di luce, passando dal vuoto in un materiale trasparente, cambia la sua velocità in accordo con il valore dell'indice di rifrazione del materiale, mentre non cambia la sua frequenza.

Svolgimento La velocità del raggio di luce è

$$V = \lambda\nu = \frac{\lambda\nu}{c} \cdot c = 0,75 \cdot c$$

Visto che l'indice di rifrazione di un materiale è il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e nel materiale, allora

$$n = \frac{c}{V} = \frac{1}{0,75} = 1,33$$

Problema di: Onde - Effetto Doppler $O0034$

Testo *[O0034]* [2 ⭐ 2 ⏳ 4a 📖]

Quando un'ambulanza viene nella tua direzione percepisci un suono di frequenza $\nu_1 = 2,2\,kHz$, mentre quando si allontana il suono percepito ha una frequenza $\nu_2 = 2\,kHz$. Con quale velocità viaggia l'ambulanza?

Spiegazione La differentè frequenza è dovuta all'effetto doppler relativo al moto della sorgente rispetto al mezzo di propagazione. L'osservatore è invece in quiete.

Svolgimento La velocità del suono è $U_s = 340\,\frac{m}{s}$. Chiamiamo ν_{sor} la frequenza del suono emesso dalla sirena dell'ambulanza. La frequenza ν_1 percepita dall'osservatore quando l'ambulanza si avvicina, e la frequenza ν_2 percepita dall'osservatore quando l'ambulanza si allontana saranno

$$\begin{cases} \nu_1 = \nu_{sor}\dfrac{U_s}{U_s - U_{sor}} \\ \nu_2 = \nu_{sor}\dfrac{U_s}{U_s + U_{sor}} \end{cases}$$

Da cui otteniamo

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{U_s + U_{sor}}{U_s - U_{sor}}$$

Chiamati per comodità $\alpha = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$ e $x = \dfrac{U_{sor}}{U_s}$ avremo che l'equazione diventa

$$\alpha = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\alpha - 1 = x\,(\alpha + 1)$$

$$x = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0,04762$$

$$U_{sor} = x \cdot U_s = 0,04762 \cdot 340\,\frac{m}{s} = 16,2\,\frac{m}{s} = 58,3\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Effetto doppler - $O0036$

Testo *[O0036]* [2 2 4a]
Una persona vede passare un'auto della polizia con la sirena accesa. La persona ferma ascolta il suono della sirena in avvicinamento ad una frequenza $\nu_1 = 1100 Hz$ ed il suono della sirena in allontanamento ad una frequenza $\nu_2 = 900 Hz$. Assumendo la velocità del suono nell'aria pari a $\mathcal{V} = 340 \frac{m}{s}$, calcolare la velocità della macchina della polizia e la frequenza della sirena.

Spiegazione Un problema sull'effetto Doppler. Due informazioni: una sulla sirena in avvicinamento e l'altra sulla sirena in allontanamento. Nel primo caso le velocità del suono e della sirena sono concordi; viceversa nell'altro caso.

Svolgimento La formula generale per l'effetto doppler è

$$\nu' = \nu \left(\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{oss}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}} \right)$$

dove le velocità della sorgente e dell'osservatore sono indicate rispetto alla velocità di propagazione dell'onda. In questo problema indichiamo con gli indici 1 e 2 rispettivamente il caso in cui l'auto si avvicina all'osservatore, ed il caso in cui si allontana dall'osservatore. Le velocità della sorgente sono quindi

$$\mathcal{V}_{sorg_1} = -\mathcal{V}_{sorg_2} = \mathcal{V}_{sorg}$$

Il problema ci offre due equazioni, relative a prima e dopo il passaggio dell'auto, che scriviamo nel seguente sistema.

$$\begin{cases} \nu_1 = \nu \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}} \right) \\ \nu_2 = \nu \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}} \right) \\ \nu = \nu_2 \left(\frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg}}{\mathcal{V}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_1 \left(\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg} \right) = \nu_2 \left(\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg} \right) \\ \nu = \nu_2 \left(\frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg}}{\mathcal{V}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right) \mathcal{V} = \mathcal{V}_{sorg} \\ \nu = \nu_2 \left(\frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_{sorg}}{\mathcal{V}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{sorg} = 0,1 \cdot 340 \, \frac{m}{s} = 34 \, \frac{m}{s} \\ \nu = 900 \, Hz \left(\frac{374}{340} \right) = 990 \, Hz \end{cases}$$

Problema di: Effetto doppler - $O0037$

Testo *[O0037]* [2 2 4a]
Una sirena emette un suono di frequenza $\nu = 900\,Hz$. Essa si sta allontanando da un osservatore, partendo da ferma, con accelerazione $a = 1\,\frac{m}{s^2}$. Dopo quanto tempo il suono verrà percepito con frequenza dimezzata?

Spiegazione Un semplice problema sull'effetto Doppler combinato con un problema di cinematica sul moto uniformemente accelerato. La sirena si sta allontanando con velocità crescente e quindi la frequenza percepita diminuisce.

Svolgimento La formula generale per l'effetto doppler è

$$\nu' = \nu\left(\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{oss}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}}\right)$$

dove le velocità della sorgente e dell'osservatore sono indicate rispetto alla velocità di propagazione dell'onda. La velocità della sirena è data da

$$\mathcal{V}_{sorg} = a\Delta t + \mathcal{V}_i = a\Delta t$$

L'accelerazione è però opposta alla direzione del suono, quindi dovremo tenerne conto quando inseriamo i valori numerici. Questo significa che possiamo mantenere i segni nelle equazioni così come sono, ma al momento dell'inserimento dei dati al posto delle velocità inseriremo i valori con il segno positivo o negativo a seconda del verso del vettore.

La frequenza percepita sarà quindi

$$\nu' = \nu\left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}}\right)$$

$$\frac{\nu'}{\nu} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - a\Delta t}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - a\Delta t}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - a\Delta t}\right)$$

$$\mathcal{V} - a\Delta t = 2\mathcal{V}$$

$$\Delta t = \frac{\mathcal{V}}{-a} = \frac{340\,\frac{m}{s}}{-1\cdot\left(-1\,\frac{m}{s^2}\right)} = 340\,s$$

Problema di: Effetto doppler - $O0037a$

Testo *[O0037a]* [2 2 4a]
Una sirena emette un suono di frequenza $\nu = 900\,Hz$. All'istante iniziale, essa si sta avvicinando ad un osservatore con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 4\,\frac{m}{s}$, con accelerazione $a = 1\,\frac{m}{s^2}$ opposta alla velocità iniziale. Dopo quanto tempo il suono verrà percepito con frequenza dimezzata?

Spiegazione Un semplice problema sull'effetto Doppler combinato con un problema di cinematica sul moto uniformemente accelerato. La sirena si sta allontanando con velocità crescente e quindi la frequenza percepita diminuisce.

Svolgimento La formula generale per l'effetto doppler è

$$\nu' = \nu \left(\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{oss}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}} \right)$$

dove le velocità della sorgente e dell'osservatore sono indicate rispetto alla velocità di propagazione dell'onda.
La velocità della sirena è data da

$$\mathcal{V}_{sorg} = a\Delta t + \mathcal{V}_i$$

Tale velocità è però opposta alla direzione del suono, quindi dovremo tenerne conto quando inseriamo i valori numerici.
La frequenza percepita sarà quindi

$$\nu' = \nu \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_{sorg}} \right)$$

$$\frac{\nu'}{\nu} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_i - a\Delta t} \right)$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_i - a\Delta t} \right)$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - \mathcal{V}_i - a\Delta t} \right)$$

$$\mathcal{V} - \mathcal{V}_i - a\Delta t = 2\mathcal{V}$$

$$\Delta t = \frac{\mathcal{V} + \mathcal{V}_i}{-a}$$

Consideriamo positivo il verso della velocità concorde con la velocità del suono. La velocità iniziale ha lo stesso verso, e l'accelerazione ha verso opposto. Quindi

$$\Delta t = \frac{340\,\frac{m}{s} + 4\,\frac{m}{s}}{-1 \cdot \left(-1\,\frac{m}{s^2}\right)} = 344\,s$$

Problema di: Effetto doppler - $O0038$

Testo *[O0038]* [3 4 4a]
Una sirena è montata sul bordo di una piattaforma girevole che ruota con frequenza $\nu_p = 10\,Hz$, ed emette un suono di frequenza $\nu = 900\,Hz$. Un osservatore percepisce un suono di frequenza variabile da un minimo $\nu_1 = 840\,Hz$ ad un massimo $\nu_2 = 860\,Hz$. Determinate la velocità di allontanamento della piattaforma ed il suo raggio.

Spiegazione L'osservatore percepisce una frequenza variabile i quanto la sirena, girando con la piattaforma, alterna momenti in cui si allontana a velocità maggiore ed altri in cui si allontana a velocità minore dall'osservatore.

Svolgimento La formula generale per l'effetto doppler è

$$\nu' = \nu\left(\frac{V - V_{oss}}{V - V_{sorg}}\right)$$

dove le velocità della sorgente e dell'osservatore sono indicate rispetto alla velocità di propagazione dell'onda.
Chiamando $V_r = \omega r$ la velocità con cui la sirena effettua la sua rotazione, e V_p la velocità della piattaforma, avremo che la massima velocità di allontanamento sarà $V_{s1} = V_p + V_r$, mentre la minima sarà $V_{s2} = V_p + V_r$. Alla massima velocità sarà associata la minima frequenza percepita e viceversa. Avremo quindi il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{V_{suono}}{V_{suono} - V_{s1}} \\ \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{V_{suono}}{V_{suono} - V_{s2}} \end{cases}$$

Considerando un sistema di riferimento allineato con la velocità della piattaforma, avremo che il suono viaggia nella direzione opposta e quindi utilizzeremo per esso un valore $V_{suono} = -340\,\frac{m}{s}$

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{V_{suono}}{V_{suono} - V_{s1}} \\ \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{V_{suono}}{V_{suono} - V_{s2}} \end{cases}$$

Chiamiamo $a_1 = \dfrac{\nu}{\nu_1}$ e $a_2 = \dfrac{\nu}{\nu_2}$; $x_1 = \dfrac{V_{s1}}{V_{suono}}$ e $x_2 = \dfrac{V_{s2}}{V_{suono}}$
Considerato che la sirena è su di una piattaforma girevole, avremo $V_{s1} = V_p + V_r$ e $V_{s2} = V_p - V_r$
per cui otteniamo

$$\begin{cases} a_1 = 1 - x_1 \\ a_2 = 1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a_1 \\ x_2 = 1 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - a_1 - a_2 \\ x_1 - x_2 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{V_p}{V_{suono}} = 2 - a_1 - a_2 \\ 2\dfrac{V_r}{V_{suono}} = a_1 + a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_p = V_{suono}\left(1 - \dfrac{a_1 + a_2}{2}\right) \\ V_r = V_{suono}\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right) \end{cases}$$

Problema di: Rifrazione - *O*0039

Testo [O0039] [2 3 4a]
Una piscina è realizzata con una vasca interrata profonda $h = 3\,m$. Essa è riempita di acqua fino a $d = 30\,cm$ dal bordo. Sapendo che il sole si trova $\alpha = 45°$ dalla verticale, calcola quanto è lunga al massimo l'ombra del bordo della piscina sul fondo della stessa.

Spiegazione I raggi del sole seguono percorsi rettilinei. Il raggio di luce da considerare è quello che sfiora il bordo della piscina, arriva in acqua, subisce una rifrazione ed arriva sul fondo della piscina. Quel punto è il punto in cui finisce l'ombra del bordo della piscina.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare in quale punto (inteso come *a quale distanza dal bordo*) il raggio luminoso tocca l'acqua. Considerando il triangolo rettangolo che si forma avremo

$$x_1 = d \tan\alpha = 30\,cm$$

Successivamente avviene la rifrazione, ed il raggio si inclina formando con la verticale un angolo β

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_{aria}}{n_{acqua}}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1,33} = 0,532$$

$$\beta = 32,1°$$

Il raggio ora prosegue verso il fondo ed arriva sul fondo a distanza x_2 dalla verticale del punto di ingresso in acqua.

$$x_2 = (h - d)\tan\beta = 169,5\,cm$$

La lunghezza dell'ombra risulta quindi

$$L = x_1 + x_2 = 199,5\,cm$$

Problema di: Onde, Risonanza - *O*0042

Testo [O0042] [2 3 4a]
Un tubo lungo $L = 1,5\,m$ è chiuso a un'estremità. Un filo teso, fissato ad entrambe le estremità, lungo $d = 0,25\,m$ e di massa $m = 10\,g$ è posto vicino all'estremità aperta del tubo. Il filo, vibrando nel suo schema fondamentale, fa risuonare la colonna d'aria nel tubo alla sua frequenza fondamentale. Trovare la frequenza di oscillazione della colonna d'aria e la tensione del filo.

Spiegazione La corda e l'aria nel tubo vibrano in risonanza, quindi con la stessa frequenza. La lunghezza d'onda della corda è stabilita dal fatto che è fissata ai due estremi; in modo analogo la lunghezza d'onda dell'onda nel tubo è definita dal fatto che il tuo è chiuso ad uno solo dei due estremi.

Svolgimento La velocità di propagazione del suono prodotto dalla corda vibrante è $V_s = 330\,\frac{m}{s}$; questa onda sonora produrrà un'onda stazionaria fondamentale nel tubo la cui frequenza è data da

$$\nu = \frac{V_s}{4L} = \frac{330\,\frac{m}{s}}{4 \cdot 1,5\,m} = 55\,Hz$$

La tensione della corda vibrante, detto V_c la velocità delle onde sulla corda, sarà ricavabile da

$$V_c = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{F \cdot L}{m}}$$

$$F = \frac{V_c^2 m}{L} =$$

Sappiamo che la corda ed il tubo sono in risonanza, quindi oscillano con la stessa frequenza. Per la corda fissa ai due estremi avremo per la velocità delle onde sulla corda

$$V_c = \lambda\nu = 2L\nu$$

quindi

$$F = 4L\nu^2 m = 181,5\,N$$

Problema di: Rifrazione - $O0043$

Testo *[O0043]* [2 3 4a]
In un anfiteatro un suono prodotto sul palco si riflette sulle pareti verticali dei gradini dell'anfiteatro. I suono riflessi interferiscono all'orecchio di un osservatore sul palco. I gradini solo larghi $L = 75\,cm$. Quale deve essere la frequenza del suono, affinché sul palco il suono venga percepito correttamente?

Spiegazione Affinché il suono riflesso sia sentito correttamente, tutte le onde devono arrivare in fase.

Svolgimento Ogni onda riflessa ha fatto un percorso, rispetto alle altre, più lungo di $\Delta S = 2L$. Per rimanere in fase tale percorso deve essere pari ad una lunghezza d'onda. Quindi

$$\nu = \frac{U_s}{\lambda} = \frac{U_s}{2L} = \frac{330\,\frac{m}{s}}{1,5\,m} = 220\,Hz$$

Problema di: Rifrazione - $O0044$

Testo *[O0044]* [2 3 4a]
Sapendo che la velocità del suono è $U_s = 330\,\frac{m}{s}$, quanto è profondo un pozzo con pareti verticali, se risuona con frequenza minima $\nu = 6\,Hz$?

Spiegazione Il pozzo è un tubo chiuso ad uno degli estremi nel quale l'aria può risuonare.

Svolgimento Detta H la profondità del pozzo, la lunghezza d'onda del suono nel pozzo è pari a

$$\lambda = 4H$$

da cui

$$H = \frac{\lambda}{4} = \frac{U_s}{4\nu} = \frac{330\,\frac{m}{s}}{24\,Hz} = 13,75\,m$$

Problema di: Rifrazione - $O0045$

Testo *[O0045]* [2 ★ 3 ⌛ 4a 📖]
Una corda è montata su di un supporto in modo che suoni una ben determinata frequenza fondamentale. La corda è sostituita con una di eguale lunghezza, dello stesso materiale, ma diametro doppio. Di quanto dev'essere variata la tensione della corda per risuonale nello stesso modo?

Spiegazione Questo problema si risolve conoscendo come calcolare la velocità di un'onda su di una corda.

Svolgimento Sappiamo che la frequenza di risonanza della corda non deve cambiare, il che significa che non deve cambiare la velocità delle onde sulla corda in quanto le due corde hanno la stessa lunghezza. Indichiamo con l'indice i la corda sostituita, e con indice f la nuova corda.

$$\nu_i = \nu_f$$
$$\frac{\mathcal{V}_i}{\lambda_i} = \frac{\mathcal{V}_f}{\lambda_f}$$
da cui
$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_f$$

$$\sqrt{\frac{F_i}{\mu_i}} = \sqrt{\frac{F_f}{\mu_f}}$$

La densità lineare della corda è legata alla densità volumetrica ed alla sezione della corda, in quanto la corda è assimilabile ad un cilindro.

$$\frac{F_i}{\rho S_i} = \frac{F_f}{\rho S_f}$$

$$F_f = F_i \frac{S_f}{\rho S_i}$$

$$\frac{F_f}{F_i} = \frac{S_f}{\rho S_i} = \frac{d_f^2}{\rho d_i^2} = 4$$

La tensione del filo deve quindi essere quadruplicata.

Problema di: Onde - $O0046$

Testo *[O0046]* [2 ★ 3 ⌛ 4a 📖]
La massima tensione a cui può essere sottoposto un cavo di acciaio è $\tau = 7 \cdot 10^8 \,\frac{N}{m^2}$. La densità dell'acciaio è $\rho = 7800 \,\frac{kg}{m^3}$. Qual'è la massima velocità di un'onda trasversale su di una corda di acciaio?

Spiegazione Questo problema si risolve conoscendo come calcolare la velocità di un'onda su di una corda.

Svolgimento Sappiamo dal testo dell'esercizio che la tensione per unità di superficie a cui è sottoposto il cavo deve essere sempre

$$\frac{F}{S} < \tau$$

Visto che la forza con cui è tesa una corda è legata alla velocità delle onde sulla corda avremo

$$F = \mathcal{V}^2 \mu = \mathcal{V}^2 \rho S$$

da cui

$$\frac{\mathcal{V}^2 \rho S}{S} < \tau$$

$$\mathcal{V}^2 < \frac{\tau}{\rho}$$

Essendo $\mathcal{V} > 0$ per definizione, avremo

$$\mathcal{V} < \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^8 \,\frac{N}{m^2}}{7800 \,\frac{kg}{m^3}}} = 300 \,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - *O*0047

Testo *[O0047]* [1 2 4a]
Su di una nave esplode una bombola di gas producendo un suono che si propaga nell'aria e nell'acqua. Una seconda nave percepisce entrambi i suoni separati da un intervallo di tempo $\Delta t = 2\,s$. Quanto sono distanti le due navi?

Spiegazione Il suono in questione si propaga con velocità differenti in aria ed in acqua e quindi è normale che i due suono arrivino alla seconda nave in tempi differenti.

Svolgimento Avremo che

$$\Delta t_{aria} - \Delta t_{acqua} = \Delta t$$

$$\frac{\Delta S}{V_{aria}} - \frac{\Delta S}{V_{acqua}} = \Delta t$$

$$\Delta S \cdot \left(\frac{1}{V_{aria}} - \frac{1}{V_{acqua}}\right) = \Delta t$$

$$\Delta S = \Delta t \cdot \left(\frac{V_{aria} V_{acqua}}{V_{acqua} - V_{aria}}\right)$$

$$\Delta S = 2\,s \cdot \left(\frac{330\,\frac{m}{s} \cdot 1505\,\frac{m}{s}}{1505\,\frac{m}{s} - 330\,\frac{m}{s}}\right)$$

$$\Delta S = 845\,m$$

Problema di: Onde - *O*0048

Testo *[O0048]* [2 3 4a]
Una parete è fatta da due strati di materiali trasparenti con indici di assorbimento lineare $\lambda_1 = 2\,\frac{1}{cm}$ e $\lambda_2 = 4\,\frac{1}{cm}$. Sapendo che nel complesso la parete è spessa $d = 1\,cm$, quanto devono essere spessi i due strati affinché la luce che attraversa la parete perpendicolarmente venga attenuata del $\epsilon = 10\%$?

Spiegazione La luce attraversa due materiali trasparenti che la assorbono in modo differente. Il testo fornisce il valore del prodotto degli assorbimenti e della somma degli spessori delle pareti. Gli assorbimenti si moltiplicano in quanto la percentuale di luce assorbita dal secondo strato è una percentuale di quella in uscita dal primo strato.

Svolgimento Detti x_1 e x_2 i due spessori dei due materiali avremo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = d \\ e^{-\lambda_1 x_1} \cdot e^{-\lambda_2 x_2} = \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = d - x_1 \\ e^{-\lambda_1 x_1} \cdot e^{-\lambda_2 d} \cdot e^{\lambda_2 x_1} = \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = d - x_1 \\ e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x_1} = \epsilon \cdot e^{\lambda_2 d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = d - x_1 \\ e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x_1} = e^{\lambda_2 d + \ln \epsilon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = d - x_1 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_1 = \lambda_2 d + \ln \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = d - x_1 \\ x_1 = \dfrac{\lambda_2 d + \ln \epsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{cases}$$

da cui infine otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4 - 2,3}{2} = 0,85\,cm \\ x_2 = 0,15\,cm \end{cases}$$

Problema di: Onde - $O0049$

Testo *[O0049]* [1 2 4a]
Un raggio laser si propaga all'interno di una guida di luce lunga $L = 20\,m$. Quanto deve valere il coefficiente di attenuazione se vogliamo che la sua intensità non subisca un'attenuazione superiore a $\epsilon = 20\%$?

Spiegazione Un laser, propagandosi in un materiale, attenua la sua intensità secondo una legge esponenziale. Utilizzando tale legge si arriva alla soluzione del problema.

Svolgimento L'intensità dell'onda in funzione della distanza percorsa, per quanto riguarda il fenomeno dell'attenuazione, è data da

$$I = I_0 e^{-\lambda x}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\lambda x}$$

$$\lambda = \frac{-\ln \frac{I}{I_0}}{x}$$

$$\lambda = \frac{-\ln 0,8}{20\,m} = 0,011\,\frac{1}{m}$$

Problema di: Onde - $O0050$

Testo *[O0050]* [3 3 4a]
Un raggio laser che si propaga in aria, incide con un angolo di $i = 60°$ su di una lastra di vetro piana di spessore $d = 5mm$, con indice di rifrazione $n = 1,5$ e con coefficiente di attenuazione $\lambda = 4\,\frac{1}{cm}$. Di quanto è cambiata l'intensità del laser in uscita dalla lastra a causa dell'attenuazione del vetro?

Spiegazione Un laser, propagandosi in un materiale, attenua la sua intensità secondo una legge esponenziale. Utilizzando tale legge si arriva alla soluzione del problema. In questo problema in particolare bisogna notare che la luce non attraversa la lastra perpendicolarmente a causa del fenomeno della rifrazione.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare l'angolo rispetto alla normale con cui il laser viaggia all'interno della lastra.

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_i}{n_r}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin r = \frac{1}{1,5}$$

$$\sin r = \frac{2\sqrt{3}}{6} = 0,577$$

$$r = 35,3°$$

Il percorso che fa il laser corrisponde all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come cateto adiacente rispetto all'angolo r lo spessore della lastra. Per cui il percorso fatto dal laser è

$$x = \frac{d}{\cos r} = 6,13\,mm$$

Considerato il coefficiente di attenuazione avremo:

$$\frac{I}{I_o} = e^{-\lambda x} = e^{-0,4\cdot 6,13} = 0,086 = 8,6\%$$

Problema di: Onde - $O0051$

Testo [O0051] [2 3 4a]

Uno specchio è realizzato da uno strato di alluminio riflettente coperto da uno strato di ossido di alluminio trasparente con indice di rifrazione $n = 1,5$. Quanto deve essere spesso lo strato di ossido affinché lo specchio abbia la massima capacità di riflettere la luce?

Spiegazione La luce che incide sullo specchio viene riflessa due volte: quando incide sullo strato di ossido e quando incide sullo strato di alluminio. La massima capacità di riflettere la luce la si ottiene quando le due onde riflesse interferiscono costruttivamente

Svolgimento Consideriamo un raggio luminoso che incide perpendicolarmente allo specchio. Il raggio riflesso dallo specchio fa un percorso più lungo rispetto al raggio riflesso dall'ossido di alluminio. I due raggi saranno in fase quando la differenza di percorso è un numero intero di lunghezze d'onda.

$$2d = k\lambda'$$

La grandezza λ' è la lunghezza d'onda della luce nell'ossido. Assumendo che l'indice di rifrazione dell'aria sia $n_{aria} \simeq 1$ avremo

$$\lambda' = \frac{v'}{\nu} = \frac{c n_{aria}}{n_{aria} n_{oss} \nu} = \frac{v n_{aria}}{n_{oss} \nu} = \lambda \frac{n_{aria}}{n_{oss}}$$

$$\lambda' \simeq \frac{\lambda}{n_{oss}}$$

e quindi

$$d = \frac{k}{2} \cdot \frac{\lambda}{n_{oss}}$$

Visto che uno specchio è costruito per riflettere la luce visibile avremo

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{550\, nm}{1,5} \simeq 183\, \mu m$$

Problema di: Onde - $O0052$

Testo [O0052] [2 2 4a]

Un amplificatore emette un suono di intensità $I = 10\, dB$. Determina l'intensità sonora complessiva emessa da 10 amplificatori.

Spiegazione Questo esercizio serve semplicemente a prendere confidenza con l'unità di misura dei deciBel dB

Svolgimento L'intensità di un altoparlante è

$$\beta_1 = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

da cui

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\beta_1}$$

I dieci altoparlanti emetteranno

$$I_{10} = 10 I_1 = I_0 \cdot 10^{\beta_1 + 1}$$

Quindi

$$\beta_{10} = \beta_1 + 1$$

$$\beta_{10} = 20\, dB + 1B = 30\, dB$$

Problema di: Onde - $O0053$

Testo *[O0053]* [2 ★ 2 ⌛ 4a 📖]
Un amplificatore emette un suono di intensità I corrispondente a $\beta_1 = 10\,dB$. Quanti amplificatori uguali devo far suonare affinché l'intensità sonora emessa sia $\beta_{tot} = 20\,dB$?

Spiegazione Questo esercizio serve semplicemente a prendere confidenza con l'unità di misura dei deciBel dB

Svolgimento L'intensità di un altoparlante è

$$\beta_1 = \log_{10}\frac{I_1}{I_0}$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\beta_1}$$

che per il nostro esercizio è

$$\frac{I_1}{I_0} = 10$$

Vogliamo un'intensità

$$\beta_n = 2\beta_1 = 2\log_{10}\frac{I_1}{I_0}$$

Sappiamo che per definizione

$$\beta_n = \log_{10}\frac{nI_1}{I_0}$$

Quindi

$$2\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = \log_{10}\frac{nI_1}{I_0}$$

$$\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2 = \log_{10}\frac{nI_1}{I_0}$$

$$\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2 = \frac{nI_1}{I_0}$$

cioè

$$n = \frac{I_1}{I_0} = 10$$

Problema di: Onde - $O0054$

Testo *[O0054]* [4 2 4a] Un sottomarino emette un impulso sonoro di potenza $P = 6,28\,kW$ verso il fondale. Tale impulso torna al sottomarino con intensità $I = 1,54\,\frac{W}{m^2}$. Sapendo che il fattore di attenuazione di quel suono in acqua è $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3} m^{-1}$. Dai una stima di quanto è profondo il fondale.

Spiegazione Un sottomarino emette un segnale semisferico che nel suo propagarsi si attenua proporzionalmente al quadrato della distanza. Contemporaneamente si verifica un fenomeno di attenuazione che segue una legge esponenziale.

Svolgimento La diminuzione dell'intensità è legata alla propagazione semisferica dell'onda ed al fenomeno dell'assorbimento.

$$I_1 = \frac{P}{2\pi r^2}; \qquad I_2 = I_1 e^{-\alpha r} = \frac{P}{2\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}$$

Il problema prevede quindi di risolvere l'equazione

$$\frac{2\pi I_2}{P} r^2 = e^{-\alpha r}$$

$$0,00154 r^2 = e^{-0,0015 r}$$

r	$\frac{2\pi I_2}{P} r^2$	$e^{-\alpha r}$	cerco un valore
0	0	1	maggiore
$40\,m$	$2,464$	$0,942$	minore
$20\,m$	$0,616$	$0,970$	maggiore
$30\,m$	$1,386$	$0,956$	minore
$25\,m$	$0,9625$	$0,9632$	maggiore
$27,5\,m$	$1,1646$	$0,9600$	minore
$26,25\,m$	$1,0612$	$0,9614$	

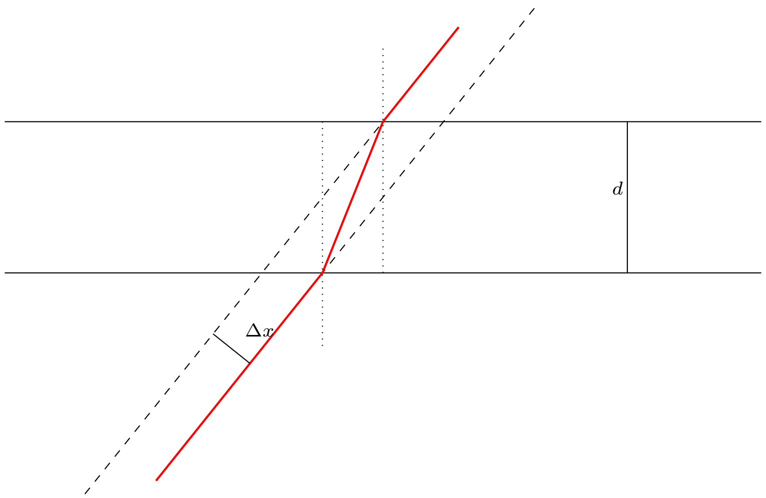
Tale equazione non è risolvibile per via analitica e si può solo dare una soluzione approssimata per esempio utilizzando il metodo dicotomico riempiendo riga per riga la tabella mostrata da cui si deduce che l'onda ha viaggiato per una distanza $r = (25,625 \pm 0,625)\ m$.

Problema di: Onde - $O0055$

Testo *[O0055]* [3 2 4a] Un laser rosso attraversa una lastra piana di vetro con $n_{vetro} = 1,4$, immersa in aria con $n_{aria} \sim 1$, e spessa $d = 3\,mm$, con un angolo di incidenza $i = 30°$. In uscita dalla lastra il raggio risulta parallelo a quello in ingresso, ma traslato di una quantità Δx. Determina il valore di Δx.

Spiegazione Il raggio di luce in ingresso cambia traiettoria, percorre la lastra e poi esce. La rifrazione avviene in due punti in modo opposto, quindi il raggio in uscita esce parallelo al raggio in ingresso. Seguire il percorso del raggio luminoso darà la soluzione del problema.

Svolgimento



Indichiamo il punto di incidenza del raggio con O. L'angolo di rifrazione risulta essere

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r}\sin i = \frac{0,5}{1,4} = 0,357$$

$$r = 20,9^\circ$$

Abbiamo quindi che il raggio rifratto prosegue nel nuovo materiale con un angolo minore di quello che avrebbe avuto senza il fenomeno della rifrazione.
Il raggio rifratto attraversa il materiale spostandosi rispetto al punto di incidenza O di

$$L = d \tan r = 3\,mm \cdot 0,382 = 1,147\,mm$$

Se il raggio non avesse fatto rifrazione avremmo avuto

$$L' = d \tan i = 1,732\,mm$$

I due raggi escono dalla lastra in due punti distanti tra loro

$$\Delta L = L' - L = 0,585\,mm$$

I raggi in uscita sono poi entrambi inclinati di $i = 30^\circ$ rispetto alla normale alla superficie del vetro, quindi la distanza tra i due raggi risulta essere

$$\Delta x = \Delta L \cdot \cos i = 0,585\,mm \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,507\,mm$$

Problema di: Onde - $O0056$

Testo *[O0056]* [2 3 4a]
Uno schermo con due fenditure a distanza d è attraversato da due fasci di luce di lunghezza d'onda λ_x e $\lambda_r = 658\,nm$. Quanto deve valere λ_x affinché il primo picco di interferenza costruttiva del rosso coincida con il primo punto di interferenza distruttiva dell'altro fascio?

Spiegazione I picchi di interferenza costruttiva e distruttiva dovuti ad un fenomeno di diffrazione da due fenditure si trovano su di uno schermo ad una distanza dal picco principale che dipende dalla lunghezza d'onda della luce e dalla distanza tra le fenditure.

Svolgimento Detto $n \in \mathbb{N}$, i picchi di interferenza costruttiva per il rosso si trovano con

$$n\lambda_r = d \sin \alpha_r$$

Detto $m \in \mathbb{N}$, punti di interferenza distruttiva per il secondo fascio sono invece trovabili con

$$\frac{2m-1}{2}\lambda_x = d \sin \alpha_x$$

Vogliamo che il primo punto buio per il secondo fascio $(m = 1)$ coincida $(\alpha_r = \alpha_x)$ con il primo picco del rosso $(n = 1)$
quindi avremo

$$\frac{1}{2}\lambda_x = \lambda_r$$

$$\lambda_x = 2\lambda_r = 1316\,nm$$

Problema di: Onde - $O0057$

Testo *[O0057]* [2 3 4a]

Un diaframma con due fenditure a distanza $d = 0,1\,mm$ è attraversato dalla luce emessa da una lampada ad idrogeno costituita da due fasci di lunghezza d'onda $\lambda_{blu} = 486\,nm$ e $\lambda_{rosso} = 658\,nm$. La luce è poi proiettata su di uno schermo a distanza L. Quanto deve valere la distanza L affinché i primi picchi di interferenza costruttiva del rosso e del blu distino tra loro $\Delta x = 5\,mm$?

Spiegazione I picchi di interferenza costruttiva e distruttiva dovuti ad un fenomeno di diffrazione da due fenditure si trovano su di uno schermo ad una distanza dal picco principale che dipende dalla lunghezza d'onda della luce e dalla distanza tra le fenditure.

Svolgimento Detti $n, m \in \mathbb{N}$, i picchi di interferenza costruttiva per il rosso e per il blu su di uno schermo a distanza L si trovano con

$$n\lambda_r = d\frac{x_r}{L}$$

$$m\lambda_b = d\frac{x_b}{L}$$

Vogliamo che il primo picco del blu ed il primo picco del rosso distino Δx, quindi

$$\Delta x = x_{1r} - x_{1b} = \frac{L}{d}\left(\lambda_r - \lambda_b\right)$$

$$L = \frac{d \cdot \Delta x}{(\lambda_r - \lambda_b)} = \frac{0,1\,mm \cdot 5\,mm}{172\,nm} = 2,81\,m$$

Problema di: Onde - $O0058$

Testo *[O0058]* [2 2 4a]

Un anello metallico circolare di raggio $r = 5\,cm$ entra in risonanza con un suono di frequenza non inferiore a $\nu = 5000\,Hz$. Determinare la velocità delle onde sulla corda.

Spiegazione La chiave per capire questo esercizio è saper disegnare un'onda stazionaria su di un anello.

Svolgimento Detti $n \in \mathbb{N}$, le lunghezze d'onda con cui l'anello può oscillare sono date dall'equazione

$$n\lambda_n = 2\pi r$$

Sappiamo che per il valore $n = 1$ la corda vibra con la frequenza minima data dal problema, quindi

$$\frac{U}{\nu} = 2\pi r$$

$$U = 2\pi\nu r = 1571\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0059$

Testo *[O0059]* [3 3 4a]

Un anello metallico circolare di raggio $r = 5\,cm$ entra in risonanza con un suono di frequenza $\nu_\alpha = 5000\,Hz$, con uno di frequenza $\nu_\beta = 6000\,Hz$ e con nessun suono di frequenza intermedia. Determinare la velocità delle onde sulla corda.

Spiegazione La chiave per capire questo esercizio è saper disegnare un'onda stazionaria su di un anello.

Svolgimento Detti $n \in \mathbb{N}$, le lunghezze d'onda con cui l'anello può oscillare sono date dall'equazione

$$n\lambda_n = 2\pi r$$

Sappiamo che per un certo valore di n incognito la corda vibra con la frequenza data dal problema, quindi

$$\begin{cases} n_\alpha \frac{\mathcal{V}}{\nu_\alpha} = 2\pi r \\ n_\beta \frac{\mathcal{V}}{\nu_\beta} = 2\pi r \end{cases}$$

Sappiamo poi che non si ha risonanza per frequenze intermedie a quelle indicate, quindi

$$n_\beta = n_\alpha + 1$$

$$\begin{cases} n_\alpha \frac{\mathcal{V}}{\nu_\alpha} = 2\pi r \\ (n_\alpha + 1)\frac{\mathcal{V}}{\nu_\beta} = 2\pi r \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_\alpha \frac{\mathcal{V}}{\nu_\alpha} = 2\pi r \\ (n_\alpha + 1)\frac{\mathcal{V}}{\nu_\beta} = n_\alpha \frac{\mathcal{V}}{\nu_\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_\alpha \frac{\mathcal{V}}{\nu_\alpha} = 2\pi r \\ n_\alpha \left(\frac{1}{\nu_\alpha} - \frac{1}{\nu_\beta}\right) = \frac{1}{\nu_\beta} \end{cases}$$

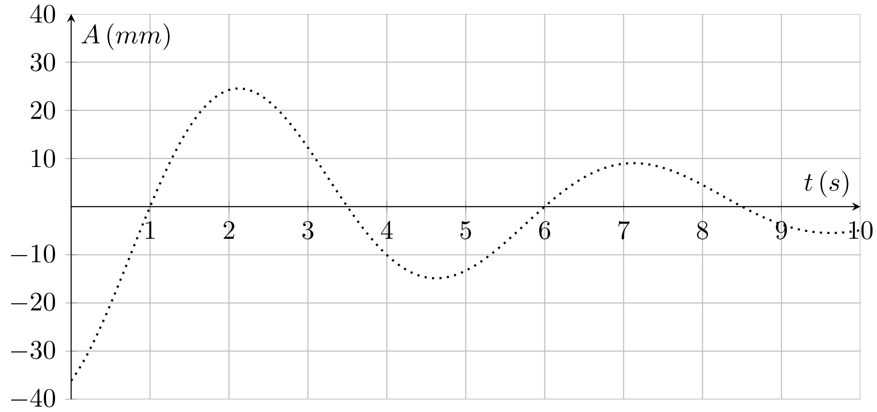
$$\begin{cases} n_\alpha = \frac{5000}{1000} = 5 \\ 5\frac{\mathcal{V}}{5000\,Hz} = 2\pi 5\,cm \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_\alpha = 5 \\ \mathcal{V} = 314\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Problema di: Onde - $O0060$

Testo *[O0060]* [3 3 4a]

Nella figura seguente è rappresentata l'oscillazione nel tempo di un punto di una corda. Calcola, utilizzando il grafico, la frequenza dell'onda ed il fattore di attenuazione dell'intensità.



Spiegazione Dal grafico è possibile vedere di quanto l'ampiezza dell'onda diminuisce ad ogni oscillazione e di conseguenza ricavare il fattore di attenuazione Dal grafico è possibile vedere in quanto tempo avviene una mezza oscillazione e quindi ricavare la frequenza.

Svolgimento Osservando il grafico vediamo che un'oscillazione completa dura un tempo

$$T = 6\,s - 1\,s = 5\,s$$

per cui la frequenza vale

$$\nu = \frac{1}{T} = 0,2\,Hz$$

L'ampiezza dell'oscillazione la valutiamo nei punti di massimo e di minimo. Nel primo punto stazionario con $t_1 = 2\,s$, un massimo, l'oscillazione ha ampiezza

$A_1 = 25\,mm$; nel secondo punto stazionario con $t_2 = 4,5\,s$, un minimo, l'oscillazione ha ampiezza $A_2 = 15\,mm$.
Tra i due punti vi è una distanza temporale

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

In generale, per un'oscillazione smorzata, avremo

$$A(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} A_0$$

quindi

$$\begin{cases} A_1 = e^{-\frac{t_1}{\tau}} \\ A_2 = e^{-\frac{t_2}{\tau}} \end{cases}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\frac{1}{\tau}(t_2 - t_1)}$$

$$\ln\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1}{\tau}(t_2 - t_1)$$

$$\tau = \frac{(t_2 - t_1)}{\ln\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\tau = \frac{2,5\,s}{\ln\frac{25}{15}} = 4,89\,s$$

Dal momento che l'intensità di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, avremo

$$I(t) \propto A^2(t)$$

per cui

$$A^2(t) = e^{-2\frac{t}{\tau}} A_0^2$$

$$I(t) = e^{-\frac{t}{\frac{\tau}{2}}} I_0$$

definendo λ il coefficiente di attenuazione avremo

$$\lambda = \frac{\tau}{2} = 2,45\,s$$

Problema di: Onde - *O*0062

Testo *[O0062]* [3 6 4a]

Un fascio laser non polarizzato attraversa un sistema di tre filtri polarizzatori lineari di cui l'ultimo è posto perpendicolarmente al primo. Il secondo filtro forma un angolo α con il primo.

1. Determinare la dipendenza dell'intensità del fascio in uscita in funzione dell'angolo α.
2. Mostra graficamente il fenomeno della polarizzazione giustificando di conseguenza i calcoli fatti in precedenza.
3. Per quali valori dell'angolo l'intensità in uscita si è ridotta di un fattore 8? Dai un'interpretazione fisica ai risultati ottenuti.

Spiegazione Quando la luce passa da un sistema di filtri polarizzatori, ad ogni filtro l'ampiezza dell'onda viene attenuata di un fattore $\cos\alpha$ dipendente dall'angolo tra un filtro ed il filtro successivo. Questo è dovuto al fatto che il filtro polarizzatore taglia la componente dell'oscillazione perpendicolare ad esso.

Svolgimento L'intensità in uscita dopo il primo filtro è ridotta della metà per via del fatto che l'intera componente perpendicolare al filtro viene soppressa. Il secondo ed il terzo filtro tagliano l'ampiezza dell'oscillazione di un fattore $\cos\theta$ legato all'angolo θ tra un filtro ed il successivo. L'intensità di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, quindi nel nostro problema

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2\alpha$$

$$I_3 = I_2 \cdot \cos^2(90-\alpha) = \frac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2(90-\alpha)$$

quindi

$$I_3 = \frac{1}{8} I_0 \sin^2(2\alpha)$$

Dal testo sappiamo che

$$I_3 = \frac{1}{8} I_0$$

e quindi

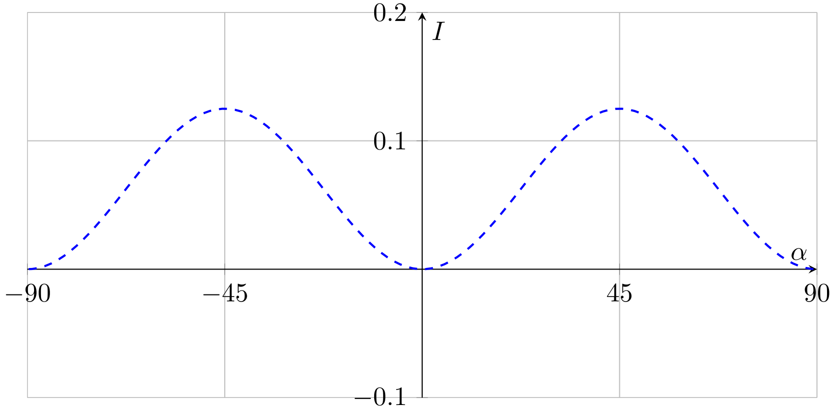
$$\frac{1}{8} I_0 = \frac{1}{8} I_0 \sin^2(2\alpha)$$

$$1 = \sin^2(2\alpha)$$

$$(2\alpha) = \pm 90^\circ$$

$$\alpha = \pm 45^\circ$$

Questo significa che il secondo filtro, rispetto al primo, deve essere ruotato di 45° in senso orario o antiorario.



Problema di: Onde - $O0063$

Testo *[O0063]* [2 3 4a]
Un fascio laser non polarizzato di intensità $I = 10\,\frac{W}{m^2}$ attraversa un sistema di tre filtri polarizzatori lineari in cui ogni filtro forma un angolo $\alpha = 30°$ con il precedente. Determinare l'intensità del fascio in uscita.

Spiegazione Quando la luce passa da un sistema di filtri polarizzatori, ad ogni filtro l'ampiezza dell'onda viene attenuata di un fattore $\cos\alpha$ dipendente dall'angolo tra un filtro ed il filtro successivo. Questo è dovuto al fatto che il filtro polarizzatore taglia la componente dell'oscillazione perpendicolare ad esso.

Svolgimento L'intensità in uscita dopo il primo filtro è ridotta della metà per via del fatto che l'intera componente perpendicolare al filtro viene soppressa. Il secondo ed il terzo filtro tagliano l'ampiezza dell'oscillazione di un fattore $\cos\alpha$, quindi nel nostro problema

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2\alpha$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{W}{m^2} \cdot \cos^2 30° = 3,75\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0064$

Testo *[O0064]* [3 3 4a]
Un tubo di lunghezza L, chiuso ad un estremo, ruota con velocità angolare ω intorno all'estremo chiuso. Ipotizzando che il tubo risuoni con la sua frequenza fondamentale, determinare la massima e la minima frequenza del suono percepito da un osservatore posto lontano dal tubo, sullo stesso piano di rotazione.

Spiegazione A causa della rotazione del tubo l'aria nell'estremità aperta si muove rispetto al tubo con una certa velocità ed innesca il fenomeno della risonanza del tubo stesso. La sorgente del suono, cioè l'estremità aperta del tubo, si muove allontanandosi ed avvicinandosi all'osservatore, determinando un effetto Doppler per l'osservatore.

Svolgimento La velocità dell'estremità aperta del tubo, rispetto all'osservatore, è

$$\mathcal{U}_{sorg} = \pm\omega L$$

Considerato che il tubo risuona con la sua frequenza fondamentale, la frequenza del suono emesso è

$$\nu_s = \frac{\mathcal{U}_{suono}}{4L}$$

La frequenza del suono percepito dall'osservatore è quindi

$$\nu_o = \nu_s \frac{\mathcal{U}_{suono} - \mathcal{U}_{oss}}{\mathcal{U}_{suono} - \mathcal{U}_{sorg}}$$

L'osservatore è fermo, quindi

$$\nu_o = \nu_s \frac{\mathcal{U}_{suono}}{\mathcal{U}_{suono} - \mathcal{U}_{sorg}}$$

Consideriamo nella formula successiva tutte le grandezze indicate in valore assoluto; le due frequenza percepite saranno quindi

$$\nu_o = \frac{\mathcal{U}_{suono}}{4L} \frac{\mathcal{U}_{suono}}{\mathcal{U}_{suono} \pm \omega L}$$

$$\nu_o = \nu_s \frac{1}{1 \pm \frac{\omega L}{U_{suono}}}$$

Problema di: Onde - $O0065$

Testo *[O0065]* [2 4 4a]
In un contenitore cilindrico sono contenuti uno strato di $h_1 = 5\,cm$ di acqua ($n_{H_2O} = 1,33$) ed uno strato di olio ($n_{olio} = 1,47$) di spessore $h_2 = 10\,cm$. Un raggio laser incide con un angolo di incidenza $i = 30°$ sulla superficie dell'olio, nel punto sull'asse del contenitore. Arrivato sul fondo, a quale distanza dall'asse arriva il raggio laser?

Spiegazione In questo problema occorre seguire il raggio luminoso nel suo percorso attraverso i due liquidi.

Svolgimento L'angolo di rifrazione sul primo liquido è

$$\sin r_1 = \frac{n_{aria}}{n_{olio}} \sin i$$

$$\sin r_1 = 0,34 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = 19,9°$$

Il punto di incidenza sul secondo liquido è spostato di

$$\Delta x_1 = h_1 \cdot \tan r_1$$

$$\Delta x_1 = 10\,cm \cdot \tan 19,9° = 3,62\,cm$$

L'angolo di rifrazione sul secondo liquido è

$$\sin r_2 = \frac{n_{olio}}{n_{H_2O}} \sin r_1$$

$$\sin r_2 = 0,34 \cdot \frac{1,47}{1,33} \qquad \Rightarrow \qquad r_2 = 22,1°$$

Il punto di incidenza sul fondo è ulteriormente spostato di

$$\Delta x_2 = h_2 \cdot \tan r_2 = 5\,cm \cdot 0,406 = 2,03\,cm$$

Lo spostamento complessivo è quindi

$$\Delta x_{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5,65\,cm$$

Problema di: Onde - $O0066$

Testo *[O0066]* [3 3 4a]

Un sistema di due lenti sottili è formato da una lente divergente e da una lente convergente con distanze focali $f_1 = -2\,cm$ ed $f_2 = 3\,cm$ con il loro fuoco sinistro in comune. La lente divergente è posta sulla sinistra del banco ottico. Un oggetto è posto a $p_1 = 3\,cm$ a sinistra della lente divergente. Dove di forma l'immagine dell'oggetto e quanto risulta ingrandita? *[Esegui un disegno preciso con il righello]*

Spiegazione Un sistema di lenti si analizza una lente alla volta. L'immagine della prima lente è da considerarsi come l'oggetto per la seconda lente.

Svolgimento Cominciamo a calcolare la posizione dell'immagine formata dalla lente divergente

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

da cui

$$q_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} = -\frac{6}{5}\,cm$$

Calcoliamo ora la distanza di questa prima immagine dalla seconda lente

$$p_2 = f_2 + f_1 - q_1 = 3\,cm - 2\,cm + \frac{6}{5}\,cm = \frac{11}{5}\,cm$$

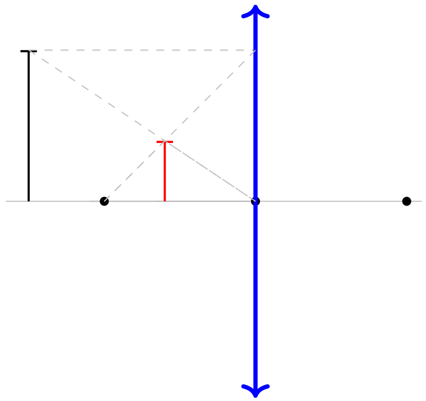
Calcoliamo adesso la posizione dell'immagine prodotta dalla seconda lente

$$q_2 = \frac{f_2 p_2}{p_2 - f_2} = \frac{33\,cm^2}{-4\,cm} = -\frac{33}{4}\,cm$$

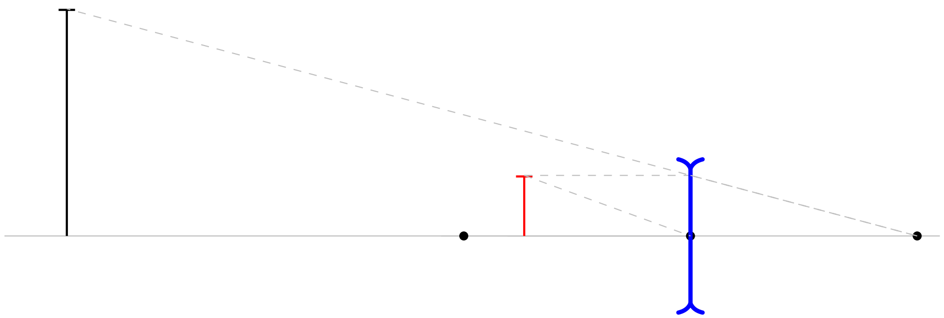
Il fattore di ingrandimento sarà il prodotto dei fattori

$$G_{tot} = G_1 \cdot G_2 = \frac{f_1}{f_1 - p_1} \cdot \frac{f_2}{f_2 - p_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = 1,5$$

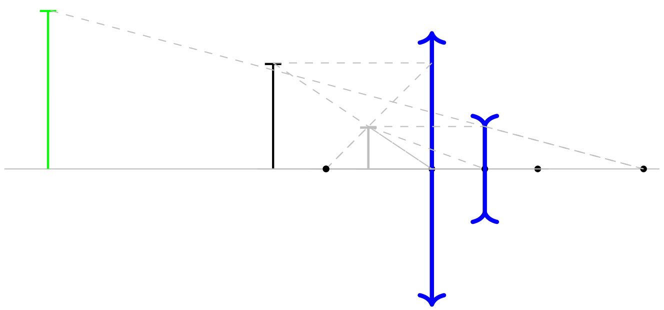
Nell'immagine seguente vediamo lo schema che rappresenta la costruzione dell'immagine dovuta alla prima lente (divergente)



Nell'immagine seguente vediamo lo schema che rappresenta la costruzione dell'immagine finale ricavata grazie alla lente convergente dall'immagine precedentemente trovata dovuta alla prima lente (divergente)



Lo schema dell'ottica completa è quindi mostrato nell'immagine seguente, nella quale l'oggetto è nero e l'immagine finale è verde.



Problema di: Onde - $O0067$

Testo *[O0067]* [3 3 4a]
Una sorgente luminosa puntiforme è posta in una piscina profonda $h = 2\,m$. Quanto vale l'area della regione illuminata sulla superficie dell'acqua, vista dall'esterno della piscina?

Spiegazione La luce prodotta dalla sorgente esce dall'acqua solo se incide in essa con un angolo inferiore all'angolo limite per riflessione totale. Quindi rimane illuminata, vista dall'esterno, solo una regione circolare di cui bisogna determinare il raggio.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare l'angolo limite per riflessione totale dall'acqua all'aria

$$\frac{\sin i}{\sin 90°} = \frac{n_{aria}}{n_{H_2O}}$$

$$i = 48,75°$$

Questo significa che la luce emessa dalla sorgente, e che esce nell'aria, disegna un cono la cui parete forma un angolo i con l'acqua. dal momento che conosciamo la profondità dell'acqua, avremo che il raggio di questo cono vale

$$r = h \cdot \tan i = 2\,m \cdot 1,14 = 2,28\,m$$

L'area illuminata, vista dall'esterno, è quindi

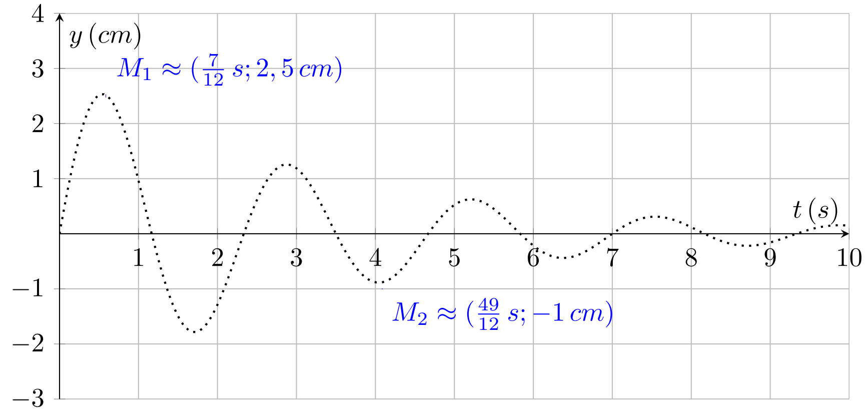
$$A = \pi r^2 = 16,34\,m^2$$

Problema di: Onde - $O0068$

Testo *[O0068]* [3 4 4a]
Nella figura seguente è rappresentata l'oscillazione smorzata nel tempo di un oggetto appeso ad una molla. Sapendo che l'equazione di tale oscillazione è

$$y = A_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

calcola, utilizzando il grafico, la frequenza dell'oscillazione ed il fattore di attenuazione dell'ampiezza dell'oscillazione. Disegna sul grafico la funzione interpretabile come l'*oscillazione* e la funzione interpretabile come l'*ampiezza dell'oscillazione*



Spiegazione Dal grafico è possibile vedere di quanto l'ampiezza dell'onda diminuisce ad ogni oscillazione e di conseguenza ricavare il fattore di attenuazione Dal grafico è possibile vedere in quanto tempo avviene una mezza oscillazione e quindi ricavare la frequenza.

Svolgimento I valori della funzione sono ricavabili dal grafico nel seguente modo. Notiamo innanzi tutto che la funzione esegue 3 oscillazioni complete in un tempo $\Delta t = 7\,s$, dal secondo $t_i = 0$ al secondo $t_f = 7\,s$, quindi il periodo è $T = \frac{7}{3}\,s$ e la frequenza è

$$\nu = \frac{3}{7}\,Hz$$

Prendiamo due punti, uno di massimo ed uno di minimo, della funzione, deducendo i valori dal grafico $M_1 = \left(\frac{7}{12}\,s; 2,5\,cm\right)$ e $M_2 = \left(\frac{49}{12}\,s; -1\,cm\right)$

avremo

$$\begin{cases} y_1 = A_0 \cdot e^{-\lambda x_1} \sin\frac{\pi}{4} \\ y_2 = A_0 \cdot e^{-\lambda x_2} \sin\frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

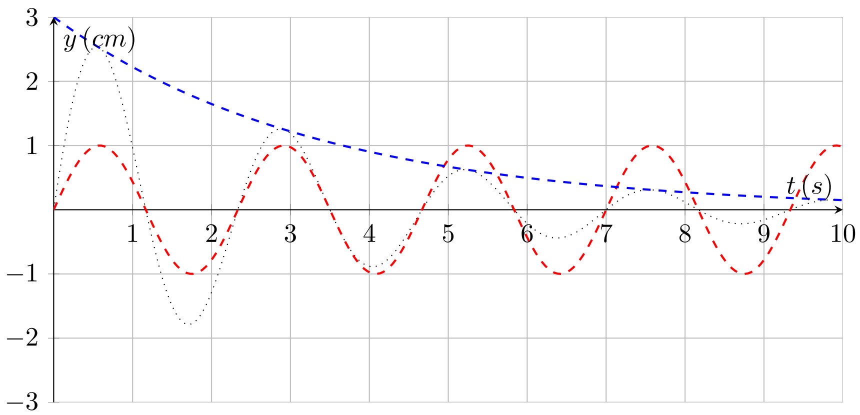
$$\begin{cases} y_1 = A_0 \cdot e^{-\lambda x_1} \\ y_2 = -A_0 \cdot e^{-\lambda x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y_1}{y_2} = -e^{-\lambda(x_1-x_2)} \\ y_1 = A_0 \cdot e^{-\lambda x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln\frac{y_1}{-y_2}}{(x_1-x_2)} = \lambda \\ \frac{y_1}{e^{-\lambda x_1}} = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\ln\frac{2,5}{1}}{3,5\,cm} = 0,26\,\frac{1}{cm} \\ A_0 = 2,9\,cm \end{cases}$$

L'oscillazione armonica smorzata è il prodotto delle due funzioni mostrate in figura: in rosso l'oscillazione sinusoidale; in blu l'andamento esponenziale dell'ampiezza dell'oscillazione. L'oscillazione rossa è punto per punto dilatata in base al valore della funzione esponenziale.



Problema di: Onde - $O0069$

Testo *[O0069]* [3 3 4a]
Un raggio laser incide con un angolo $i = 45°$ su di una lastra di vetro con indice di rifrazione $n = \sqrt{2}$ spessa $d = 3\sqrt{3}\,cm$.

1 Disegna il percorso fatto dalla luce nella lastra e calcolane la lunghezza.

L'intensità del raggio di luce entrato nel vetro, incidente sulla seconda parete della lastra, risulta attenuata di un fattore 5.

2 Quanto vale l'indice di attenuazione lineare di quel vetro? *[Si trascuri l'energia dei raggi riflessi]*

Spiegazione Con la legge di Snell possiamo determinare il percorso del raggio luminoso nella lastra trasparente, e quindi calcolarne la lunghezza.

Svolgimento L'angolo di rifrazione nella lastra è

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r}\sin i = \frac{1}{2}$$

$$r = 30°$$

La lunghezza del percorso nella lastra è quindi

$$x = \frac{d}{\cos r} = 6\,cm$$

L'intensità dell'onda in ingresso diminuisce attraversando il vetro

$$I = I_0 e^{-\lambda x}$$

$$-\ln 5 = -\lambda \cdot x$$

$$\frac{\ln 5}{6\,cm} = \lambda$$

$$\lambda = 0,268\,cm^{-1}$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0073$

Testo *[O0073]* [2 3 4a]
Un altoparlante di potenza $P = 10\,W$ si trova nel centro del soffitto di una stanza alta $h = 10\,m$ ed emette un suono unicamente verso il basso. Calcolate l'intensità sonora nel punto A sul pavimento sotto l'altoparlante ed in un punto B sul pavimento a $d_{AB} = 2\,m$ di distanza da A

Spiegazione Dalla definizione di intensità è possibile determinarla conoscendo la potenza della sorgente e la distanza dell'osservatore.

Svolgimento Nel punto A l'intensità è

$$I = \frac{P}{2\pi h^2} = 0,016\,\frac{W}{m^2}$$

Nel punto B la distanza dalla sorgente è

$$x = \sqrt{h^2 + d_{AB}^2} = 0,015\,\frac{W}{m^2}$$

Nelle formule il fattore 2 è giustificato dal fatto che la potenza sonora emessa è direzionata su di una semisfera e non su di una sfera.

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0074$

Testo *[O0074]* [2 3 4a]
Un oggetto luminoso si trova nel centro della base di una bottiglia metallica cilindrica di raggio $r = 10\,cm$ ed altezza $h = 30\,cm$. Riempiendo la bottiglia di acqua ($n = 1,33$) fino all'orlo, quanto vale il massimo angolo di rifrazione dei raggi luminosi in uscita dall'acqua?

Spiegazione L'angolo di rifrazione maggiore lo si ottiene considerando il raggio luminoso che partendo dalla sorgente luminosa tocca il bordo della bottiglia.

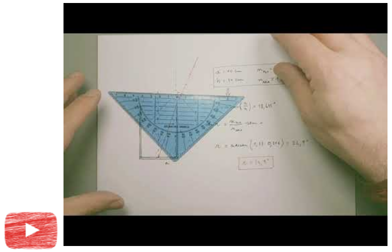


Fig. 5.4: *Guarda il video youtu.be/CDYb-hiQu7g*

Svolgimento L'angolo di incidenza del raggio luminoso che ci interessa è

$$\sin i = \frac{r}{h}$$

L'angolo di rifrazione è quindi

$$\sin r = \sin i \frac{1,33}{1} = 0,443$$

$$r = 26,3^\circ$$

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0075$

Testo *[O0075]* [2 1 4a]
Una sorgente luminosa puntiforme non polarizzata, posta a distanza $d_i = 1\,m$ da noi, ha un'intensità tanto forte da farci male agli occhi. E' meglio mettere di fronte ai nostri occhi un filtro polarizzante o allontanarci alla distanza $d_f = 3\,m$?

Spiegazione Sia il filtro polarizzante, sia l'allontanamento dalla sorgente diminuiscono l'intensità percepita dall'osservatore: bisogna capire quale fenomeno la diminuisce maggiormente.

Svolgimento Il filtro polarizzatore taglia una delle componenti dei campi elettrici e magnetici, quindi diminuisce l'intensità di un fattore 2.
Allontanarsi triplicando la distanza diminuisce l'intensità di un fattore 9
E' quindi meglio allontanarsi.

Problema di: Fenomeni Ondulatori - $O0076$

Testo [O0076] [2 ⭐ 3 ⏳ 4a 📖]
Un raggio luminoso bianco in aria ($n_{aria} = 1,0003$) incide con un angolo $i = 30°$ sulla superficie dell'acqua in un contenitore profondo $h = 2\,m$. Sapendo che l'indice di riflessione del rosso è $n_{rosso} = 1,331$ e quello del blu è $n_{blu} = 1,343$, quanto distanti cadranno i due raggi luminosi sul fondo del contenitore?

Spiegazione I due raggi luminosi, muovendosi in un materiale con indice di rifrazione per loro differente, seguiranno percorsi differenti e quindi arriveranno sul fondo in punti differenti.

Svolgimento L'angolo di rifrazione con il quale il raggio rosso entra in acqua è

$$\sin r_r = \sin i \frac{n_{rosso}}{n_{aria}} = 0,6653 \quad \Rightarrow \quad r = 41,7°$$

Arrivato sul fondo del contenitore, si sarà spostato in orizzontale di una quantità

$$L_r = h \tan r_r = 2\,m \cdot 0,8911 = 1,782\,m$$

L'angolo di rifrazione con il quale il raggio blu entra in acqua è

$$\sin r_b = \sin i \frac{n_{blu}}{n_{aria}} = 0,6713 \quad \Rightarrow \quad r = 42,2°$$

Arrivato sul fondo del contenitore, si sarà spostato in orizzontale di una quantità

$$L_b = h \tan r_b = 2\,m \cdot 0,9057 = 1,811\,m$$

I due raggi arriveranno quindi in due punti distanti tra loro

$$\Delta x = L_b - L_r = 0,029\,m$$

Problema di: Onde - $O0077$

Testo [O0077] [1 ⭐ 1 ⏳ 4a 📖]
Tre sirene di potenza $P = 500\,W$ si trovano ai vertici di una piazza quadrata di lato $L = 50\,m$. Quale intensità viene percepita da un osservatore posto nel quarto vertice?

Spiegazione L'intensità percepita dall'osservatore sarà la somma delle intensità delle tre singole onde percepite.

Svolgimento L'intensità delle due sorgenti più vicine è

$$I_1 = \frac{P}{4\pi L^2} = 0,016\,\frac{W}{m^2}$$

La terza sirena si trova ad una distanza $L_3 = L\sqrt{2}$, quindi

$$I_3 = \frac{P}{8\pi L^2} = 0,016\,\frac{W}{m^2} = 0,008\,\frac{W}{m^2}$$

L'intensità totale percepita è quindi

$$I_{tot} = 2I_1 + I_3 = 0,04\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0077a$

Testo *[O0077a]* [1 ⭐ 3 ⏳ 4a 📖]
Agli estremi di un corridoio lungo $L = 100\,m$ sono posizionati due altoparlanti di potenza $P = 1000\,W$. Una persona, dal centro del corridoio, si sposta di $d = 10\,m$ verso uno degli altoparlanti. Quale intensità sonora percepisce?

Spiegazione L'intensità percepita di una sorgente ondulatoria varia con la distanza dalla sorgente. L'intensità è proporzionale all'energia della sorgente ed è quindi additiva.

Svolgimento L'intensità percepita ad una certa distanza è data da

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

da cui

$$I = \frac{P}{4\pi\,(r-d)^2} + \frac{P}{4\pi\,(r+d)^2} = \frac{1000\,W}{4\pi}\left(\frac{1}{1600\,m^2} + \frac{1}{3600\,m^2}\right) = 0,072\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0077b$

Testo *[O0077b]* [1 ⭐ 3 ⏳ 4a 📖]
Agli estremi di una strada lunga $L = 100\,m$ sono posizionati due altoparlanti di potenza $P = 2000\,W$. Una persona, dal centro della strada, si sposta perpendicolarmente ad essa di $d = 10\,m$. Quale intensità sonora percepisce?

Spiegazione L'intensità percepita di una sorgente ondulatoria varia con la distanza dalla sorgente. L'intensità è proporzionale all'energia della sorgente ed è quindi additiva.

Svolgimento La distanza delle sorgenti è

$$r = \sqrt{(50\,m)^2 + (10\,m)^2} = 51\,m$$

L'intensità percepita ad una certa distanza è data da

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

da cui

$$I_{tot} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{1000\,W}{2\pi 2600\,m^2} = 0,06\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0078$

Testo *[O0078]* [1 1 4a]
Una sirena si trova nel vertice di una piazza quadrata di lato $L = 50\,m$. Un osservatore posto nel vertice opposto percepisce un'intensità $I = 220\,\frac{W}{m^2}$. Quale intensità viene percepita da un osservatore posto in un vertice differente?

Spiegazione L'intensità del suono percepito varia con la distanza dalla sorgente.

Svolgimento L'equazione che descrive l'andamento dell'intensità di un'onda sferica al variare della distanza è

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

$$I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{220\,\frac{W}{m^2} \cdot \left(50\sqrt{2}\,m\right)^2}{(50\,m)^2} = 440\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0078a$

Testo *[O0078a]* [1 1 4a]
Una sirena si trova nel vertice di una piazza rettangolare di lato $L = 30\,m$ e $H = 40\,m$. Un osservatore posto nel vertice opposto percepisce un'intensità $I = 220\,\frac{W}{m^2}$. Quale intensità viene percepita da un osservatore posto nel vertice più vicino?

Spiegazione L'intensità del suono percepito varia con la distanza dalla sorgente.

Svolgimento Il primo osservatore si trova ad una distanza $r_1 = 50\,m$ dalla sorgente del sono.
L'equazione che descrive l'andamento dell'intensità di un'onda sferica al variare della distanza è

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

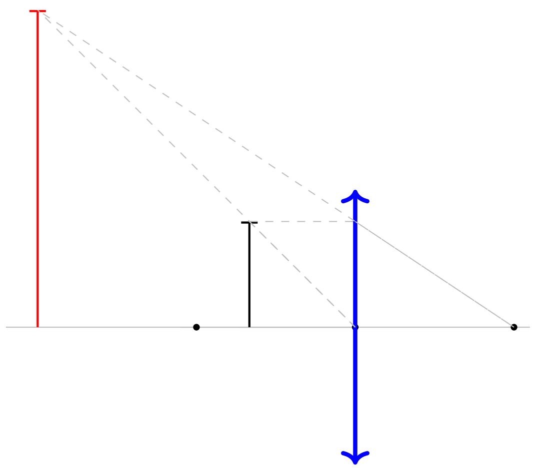
$$I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{220\,\frac{W}{m^2} \cdot (50\,m)^2}{(30\,m)^2} = 611\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0079$

Testo [O0079] [1 2 4a]
Disegna l'immagine di una lente convergente in modo che risulti dritta e virtuale. Assegna tu valori al fuoco della lente ed alla posizione dell'oggetto rispetto alla lente e determina la posizione dell'immagine.

Spiegazione Un problema di ottica geometrica gestito dalla legge dei punti coniugati.

Svolgimento Affinché una lente convergente generi un'immagine dritta e virtuale l'oggetto deve essere posto tra la lente ed il fuoco. Nello schema seguente l'oggetto è in nero e l'immagine in rosso.



Assegniamo i seguenti valori: $f = 3\,cm; p = 2\,cm$ ed otteniamo

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{6\,cm}$$

$$q = -6\,cm$$

Problema di: Onde - $O0079a$

Testo [O0079a] [1 2 4a]
Disegna l'immagine di una lente divergente. Assegna tu valori al fuoco della lente ed alla posizione dell'oggetto rispetto alla lente e determina la posizione dell'immagine.

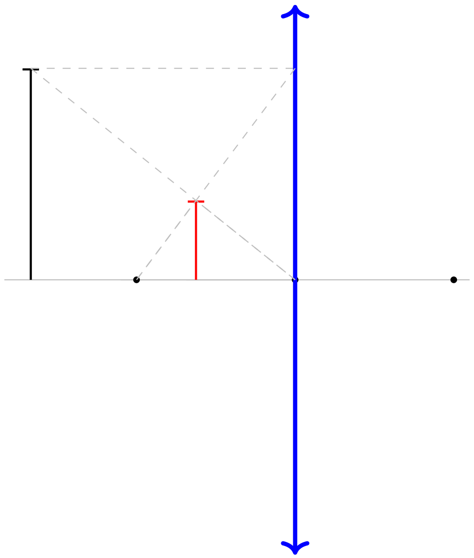
Spiegazione Un problema di ottica geometrica gestito dalla legge dei punti coniugati.

Svolgimento Assegniamo i seguenti valori: $f = -3\,cm; p = 5\,cm$ ed otteniamo

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = -\frac{8}{15\,cm}$$

$$q = -\frac{15}{8}\,cm$$

Nello schema seguente l'oggetto è in nero e l'immagine in rosso.

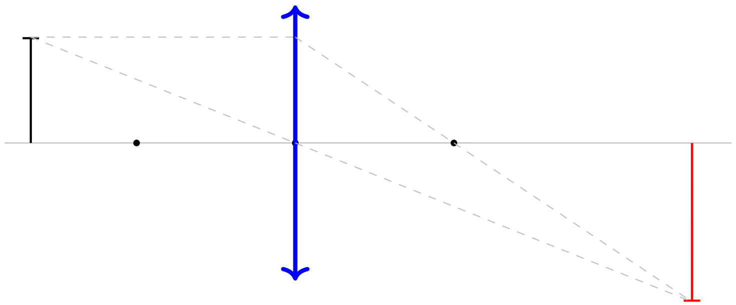


Problema di: Onde - $O0079b$

Testo *[O0079b]* [1 2 4a]
Disegna l'immagine di una lente convergente in modo che risulti capovolta e reale. Assegna tu valori al fuoco della lente ed alla posizione dell'oggetto rispetto alla lente e determina la posizione dell'immagine.

Spiegazione Un problema di ottica geometrica gestito dalla legge dei punti coniugati.

Svolgimento Affinché una lente convergente generi un'immagine capovolta e reale l'oggetto deve essere posto ad una distanza dalla lente maggiore di quella del fuoco. Nello schema seguente l'oggetto è in nero e l'immagine in rosso.



Assegniamo i seguenti valori: $f = 3\,cm; p = 5\,cm$ ed otteniamo

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{2}{15\,cm}$$

$$q = 7,5\,cm$$

Problema di: Onde - $O0080$

Testo *[O0080]* [1 ⭐ 3 ⌛ 4a 📖]
L'intensità luminosa di un faro, vista da un osservatore posto alla distanza $r_1 = 50\,m$, è $I_1 = 1200\,\frac{W}{m^2}$. Di quanti metri si deve spostare affinché l'intensità raddoppi? In quale verso?

Spiegazione L'intensità percepita di una sorgente ondulatoria varia con la distanza dalla sorgente.

Svolgimento Per diminuire l'intensità percepita bisogna allontanarsi dalla sorgente.
L'equazione che descrive l'andamento dell'intensità di un'onda sferica al variare della distanza è

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

$$r_2^2 = \frac{I_1}{I_2} r_1^2 = 2r_1^2$$

$$r_2 = r_1\sqrt{2} = 70,7\,m$$

E' quindi necessario allontanarsi di

$$\Delta S = 20,7\,m$$

Problema di: Onde - $O0081$

Testo *[O0081]* [2 ⭐ 3 ⌛ 4a 📖]
In un forno a microonde largo circa $L = 30\,cm$ si formano microonde stazionarie di frequenza $\nu = 2450\,MHz$. Calcola la distanza tra i nodi dell'onda stazionaria.

Spiegazione In questo problema il sistema fisico consiste in un volume a forma di parallelepipedo nel cui si formano onde stazionarie tridimensionali. Il problema viene però molto semplificato considerando unicamente la maggiore delle tre dimensioni del forno, La fisica da utilizzare è quella delle onde stazionare in una dimensione.

Svolgimento In un forno a microonde non circolano correnti elettriche lungo le pareti, quindi il campo elettrico su di esse è nullo. L'onda stazionaria che si forma ha quindi due nodi agli estremi.
La distanza tra i nodi è quindi data dall'equazione

$$d = \frac{L}{n} = \frac{n\frac{\lambda}{2}}{n} = \frac{c}{2\nu} = \frac{299792458\,\frac{m}{s}}{2\cdot 2,45\cdot 10^9\,Hz} = 0,06\,m$$

Problema di: Onde - $O0082$

Testo *[O0082]* [1 3 4a]

Una sirena emette un suono percepito con intensità $I_1 = 200\,\frac{W}{m^2}$ da una persona posta a $d = 10\,m$ di distanza. Dietro la persona un muro a distanza $h = 18\,m$ dalla sirena. Calcola l'intensità sonora complessiva percepita dalla persona dovuta all'onda sonora ed al suo eco.

Spiegazione L'intensità percepita dalla persona è la somma delle intensità del suono e del suono riflesso. L'intensità delle onde dipende dalla distanza tra la sorgente e l'osservatore.

Svolgimento L'onda riflessa ha percorso in totale $r_2 = 26\,m$ dalla sorgente. Quindi

$$I_2 = I_1 \frac{d^2}{r_2^2} = 200\,\frac{W}{m^2} \cdot \frac{100\,m^2}{676\,m^2} = 29,6\,\frac{W}{m^2}$$

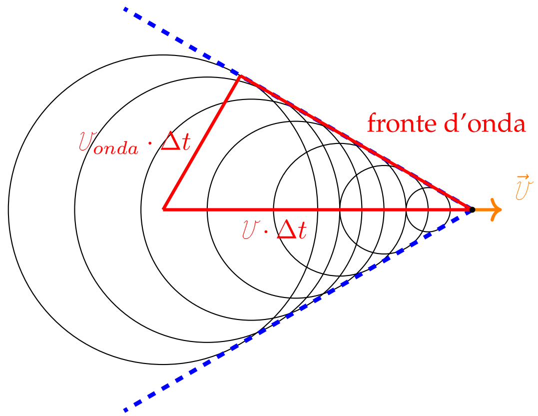
$$I_{tot} = I_1 + I_2 = 229,6\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0083$

Testo *[O0083]* [2 3 4a]

Mostra come puoi calcolare la velocità di una sorgente sonora supersonica conoscendo l'angolo $\alpha = 20°$ tra i due fronti dell'onda d'urto e sapendo che la velocità del suono è $V_s = 340\,\frac{m}{s}$.

Spiegazione Qui si parla dell'effetto doppler relativo al suono emesso da una sorgente che, rispetto all'aria, si muove ad una velocità maggiore di quella del suono. Per rispondere alla consegna è necessario disegnare lo schema della situazione fisica.



Svolgimento

Dallo schema che analizza la formazione delle onde d'urto avremo

$$V \Delta t \sin\frac{\alpha}{2} = V_s \Delta t$$

$$V = \frac{V_s}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{340\,\frac{m}{s}}{\sin 10°} = 1958\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0085$

Testo *[O0085]* [3 3 4a]

Due sorgenti luminose sincrone, di lunghezza d'onda $\lambda = 1,5\,m$, sono poste in un sistema di coordinate cartesiane espresse in metri, nei punti $O(0,0)$ e $A(L,0)$ con $L = 1\,m$. Indica un punto $B(\beta \cdot L, 0)$, tra le due sorgenti, nel quale le due onde fanno interferenza distruttiva.

Spiegazione Il fenomeno dell'interferenza costruttiva di onde sincrone prodotte da sorgenti differenti si verifica quando le due onde differiscono di mezza fase (in questo caso equivalente a dire che hanno fatto un percorso di lunghezza che differisce di mezza lunghezza d'onda.)

Svolgimento Affinché le due sorgenti sincrone siano in opposizione di fase, in modo da dare interferenza distruttiva, la differenza dei loro cammini deve essere pari a mezza lunghezza d'onda.

Identifichiamo con $B(\beta L; 0)$ il punto in cui ci dovrebbe essere interferenza distruttiva; conoscendo le coordinate delle sorgenti avremo:

$$\left|\overline{OB} - \overline{AB}\right| = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

$$|\beta - (1-\beta)| = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{L}$$

Il valore assoluto serve in quanto non sappiamo a priori se il punto B è vicino ad A o all'origine. Matematicamente questo valore assoluto ci permetterà per ogni soluzione trovata di trovare anche la sua simmetrica rispetto al centro del sistema fisico.

Se la differenza di cammino è un numero dispari di mezze lunghezze d'onda avremo interferenza distruttiva indipendentemente da quale delle due onde ha fatto più strada.

Il problema è comunque simmetrico per cui se troviamo un punto B necessariamente troveremo anche il suo simmetrico rispetto al punto medio $\overline{OB}$

$$\begin{cases} 2\beta - 1 = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{L} & \beta \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2\beta = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{L} & \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4}\frac{\lambda}{L} & \beta \geq \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{4}\frac{\lambda}{L} & \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

La struttura del sistema mostra le soluzioni simmetriche rispetto al centro. Se cerchiamo la prima posizione a partire dal centro allora poniamo $n = 0$ ottenendo

$$\begin{cases} \beta = \frac{7}{8} & \beta \geq \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{8} & \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Problema di: Onde - $O0086$

Testo *[O0086]* [2 3 4a]
Su di una asticella lunga $L = 2\,m$, fissa ad un lato e libera sull'altro, si formano le sue prime tre onde stazionarie. Disegnale, e calcolane la frequenza sapendo che la velocità delle onde è $U = 10\,\frac{m}{s}$

Spiegazione Per svolgere l'esercizio è necessario sapere cosa siano e come si formano le onde stazionarie. In questo esercizio, l'onda avrà un nodo nel punto fisso della bacchetta e un ventre nel punto libero

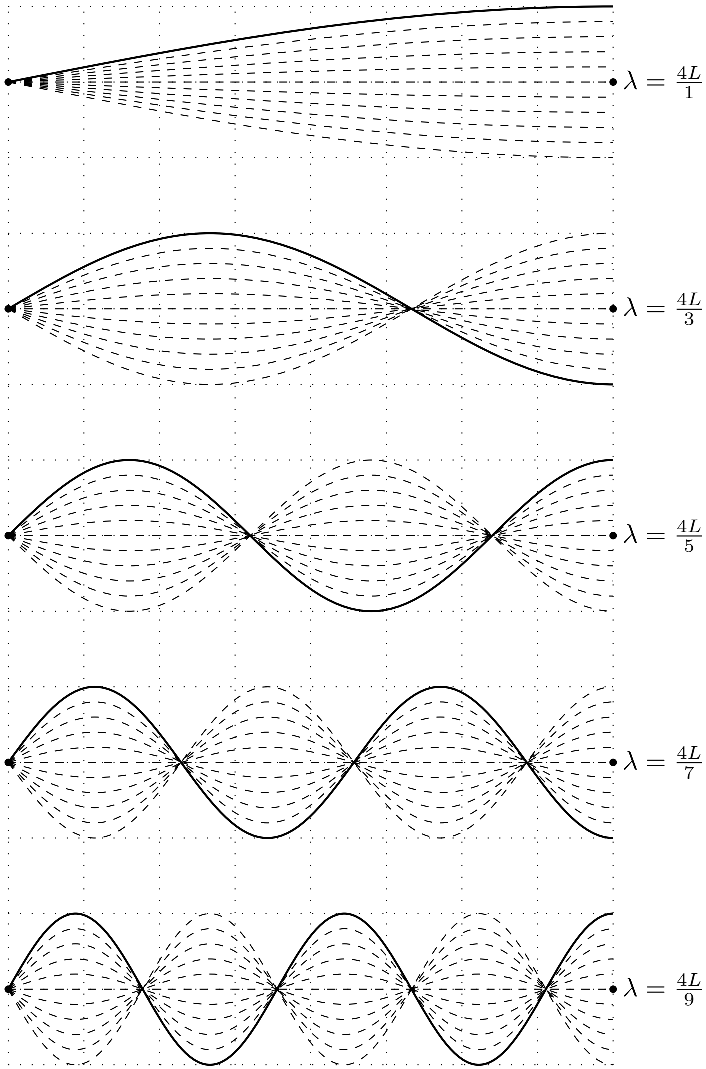
Svolgimento Le frequenze delle onde stazionarie che si sono formate sono:

$$\nu_1 = \frac{4L}{U} = 0,8\,Hz$$

$$\nu_2 = \frac{4L}{3U} = 0,27\,Hz$$

$$\nu_3 = \frac{4L}{5U} = 0,16\,Hz$$

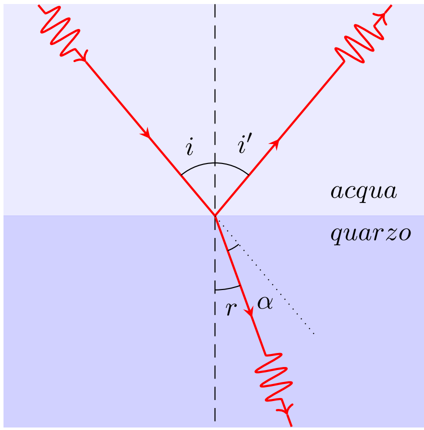
Nella figura seguente sono mostrate le prime cinque onde stazionarie sull'asticella.



Problema di: Onde - $O0087$

Testo *[O0087]* [2 3 4a]
Un cristallo di quarzo è un materiale trasparente con indice di rifrazione $n = 1,55$. Esso è completamente immerso in acqua ($n = 1,33$). Di quanti gradi devia un raggio luminoso che incide su di esso con un angolo $i = 39°$. Nello scrivere questo esercizio ho tirato a caso il valore dell'angolo i. Perché sono sicuro che il raggio di luce entra nel quarzo?

Spiegazione Un semplice problema sulla rifrazione. Attenti solo a leggere bene la richiesta del problema.



Svolgimento Il raggio di luce passa dall'acqua (i) al cristallo di quarzo (r). Vale la legge di Snell

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r} \sin i = \frac{1,33}{1,55} \sin 39° = 0,54$$

$$r = 32,7°$$

Il raggio luminoso ha quindi deviato di

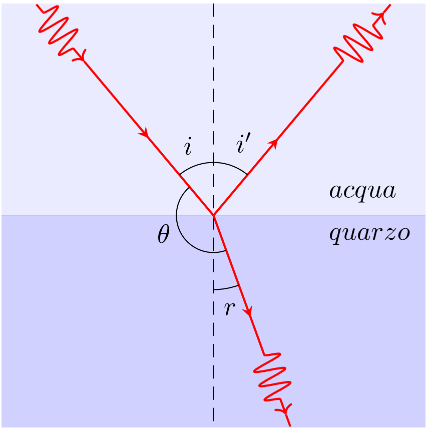
$$\alpha = i - r = 39° - 32,7° = 6,3°$$

Passando da un mezzo meno rifrangente ad un mezzo più rifrangente non esiste il fenomeno della riflessione totale.

Problema di: Onde - $O0087a$

Testo *[O0087a]* [2 3 4a]
Un cristallo di quarzo è un materiale trasparente con indice di rifrazione $n = 1,55$. Esso è completamente immerso in acqua ($n = 1,33$). Considerato un raggio luminoso che incide sul cristallo con un angolo $i = 39°$, calcola quanti gradi vale l'angolo tra di esso ed il corrispondente raggio rifratto. Nello scrivere questo esercizio ho tirato a caso il valore dell'angolo i. Perché sono sicuro che il raggio di luce entra nel quarzo?

Spiegazione Un semplice problema sulla rifrazione. Attenti solo a leggere bene la richiesta del problema.



Svolgimento Il raggio di luce passa dall'acqua (i) al cristallo di quarzo (r). Vale la legge di Snell

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r} \sin i = \frac{1,33}{1,55} \sin 39° = 0,54$$

$$r = 32,7°$$

Il raggio luminoso ha quindi deviato di

$$\alpha = i - r = 39° - 32,7° = 6,3°$$

L'angolo tra i raggi incidente e rifratto è quindi

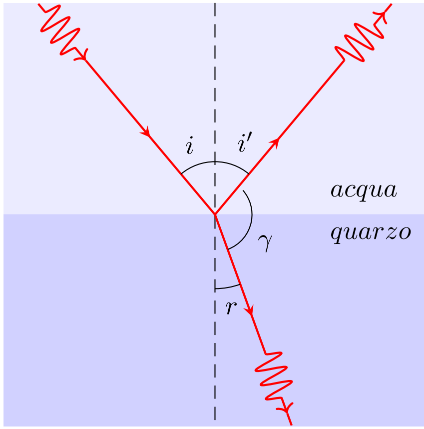
$$\theta = 180° - i + r = 173,7°$$

Passando da un mezzo meno rifrangente ad un mezzo più rifrangente non esiste il fenomeno della riflessione totale.

Problema di: Onde - *O0087b*

Testo *[O0087b]* [2 3 4a]
Un cristallo di quarzo è un materiale trasparente con indice di rifrazione $n = 1,55$. Esso è completamente immerso in acqua ($n = 1,33$). Considerato un raggio luminoso che incide sul cristallo con un angolo $i = 39°$, calcola quanti gradi vale l'angolo tra il raggio rifratto ed il raggio riflesso. Nello scrivere questo esercizio ho tirato a caso il valore dell'angolo i. Perché sono sicuro che il raggio di luce entra nel quarzo?

Spiegazione Un semplice problema sulla rifrazione. Attenti solo a leggere bene la richiesta del problema.



Svolgimento Il raggio di luce passa dall'acqua (i) al cristallo di quarzo (r). Vale la legge di Snell

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r} \sin i = \frac{1,33}{1,55} \sin 39° = 0,54$$

$$r = 32,7°$$

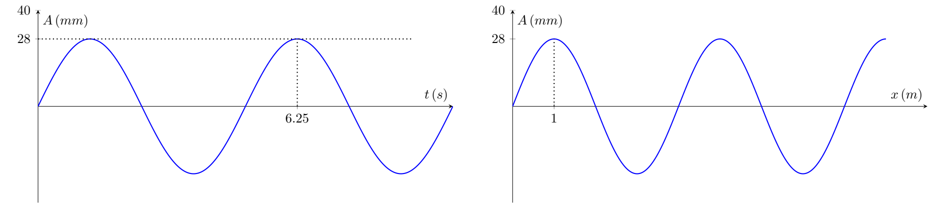
L'angolo tra il raggio rifratto e quello riflesso lo si trova con

$$\gamma = 180° - i' - r = 180° - i - r = 108,3°$$

Passando da un mezzo meno rifrangente ad un mezzo più rifrangente non esiste il fenomeno della riflessione totale.

Problema di: Onde - $O0088$

Testo *[O0088]* [1 3 4a]
I grafici in figura mostrano l'oscillazione di un'onda su di una corda. Identifica l'ampiezza, il periodo, la frequenza, la lunghezza d'onda, e la velocità dell'oscillazione.



Spiegazione In questo esercizio semplicemente viene richiesto di saper leggere un grafico. I due grafici proposti mostrano una immagine dell'onda congelata in un istante di tempo, e l'evoluzione temporale dell'onda in un singolo punto dello spazio.

Svolgimento L'ampiezza delle oscillazioni è indicata nel grafico:

$$A = 28\,mm$$

Dal grafico si evince che un quarto dell'oscillazione è lunga $1\,metro$, quindi

$$\lambda = 4 \cdot 1\,m = 4\,m$$

Per quanto riguarda il periodo, abbiamo che cinque quarti del periodo valgono $6,25\,s$ quindi

$$T = 6,25\,s \cdot \frac{4}{5} = 5\,s$$

La velocità è infine

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{4\,m}{5\,s} = 0,8\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0090$

Testo *[O0090]* [3 3 4a]
Due osservatori, Marco e Giorgio, distano tra loro $\Delta S = 5\,km$. Il vento soffia da Giorgio verso Marco. Due petardi scoppiano nei punti in cui si trovano i due osservatori. Marco sente il suono $\Delta t_m = 14\,s$ dopo aver visto il lampo. Giorgio sente il suono $\Delta t_g = 15\,s$ dopo aver visto il lampo. Calcola la velocità del vento e quella del suono.

Spiegazione Supponiamo che il lampo si propaghi istantaneamente. Il suono viaggia ad una velocità definita nell'aria. Se poi l'aria si muove (c'è vento) rispetto al terreno allora la distanza è ovviamente percorsa in tempi differenti.

Svolgimento Indichiamo V_s e V_v sono rispettivamente le velocità del suono rispetto all'aria e la velocità del vento. La velocità del suono verso Giorgio rispetto al terreno è

$$V_1 = \frac{\Delta S}{\Delta t_g} = 333,3\frac{m}{s} = V_s + V_v$$

La velocità del suono verso Marco rispetto al terreno è

$$V_2 = \frac{\Delta S}{\Delta t_m} = 357,1\frac{m}{s} = V_s - V_v$$

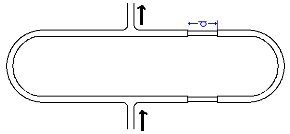
Queste due equazioni devono essere messe a sistema.
Avremo quindi come soluzione

$$V_s = \frac{V_1 + V_2}{2} = 345,2\,\frac{m}{s}$$

$$V_m = \frac{V_1 - V_2}{2} = 11,9\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Onde - $O0091$

Testo *[O0091]* [2 2 4a]
In un tubo di Quincke è immesso un suono di frequenza $\nu = 500\,Hz$. Quale deve essere l'estensione di lunghezza d dei due rami del tubo, come indicata in figura, affinché in uscita dal tubo si percepisca un suono di ampiezza minima? Motiva la risposta.



Spiegazione Un problema sull'interferenza tra onde sonore. Il tubo di Quincke è un tubo che si dirama in due bracci di lunghezza differente, i quali successivamente si ricongiungono per mandare in uscita dal tubo un suono dato dall'interferenza dei due suoni provenienti dai due bracci.

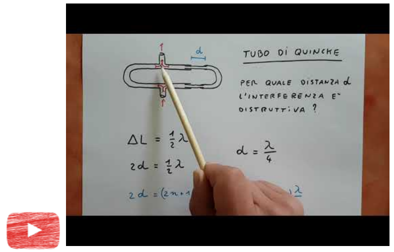


Fig. 5.5: *Guarda il video youtu.be/1Rw8xFSz620*

Svolgimento L'assenza di un suono si ottiene quando le onde che si propagano nei due tubi sono in opposizione di fase. Questo avviene quando la differenza di percorso è pari ad un multiplo intero di lunghezze d'onda più mezza lunghezza d'onda.

$$2d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$4d = (2n+1)\,\frac{V}{\nu}$$

La prima frequenza per cui si ha interferenza distruttiva vale

$$d = 0,25 \cdot 1 \frac{340\,\frac{m}{s}}{500\,Hz} = 17\,cm$$

Problema di: Onde - $O0092$

Testo *[O0092]* [2 2 4a]
La luce proveniente da una stella lontana ha lunghezza d'onda $\lambda = 500\,nm$. Un telescopio è stato realizzato proiettando la luce della stella osservata su di uno schermo, facendola prima passare da un foro di diametro d. Lo schermo dista dal foro una distanza $D = 3\,m$. Se d è grande l'immagine della stella osservata sarà sullo schermo grande quanto il foro. Se d è piccolo, allora il fenomeno della diffrazione renderà grande l'immagine sullo schermo. Qual é la dimensione del foro che rende massimo il potere risolutivo del telescopio? *[Walter Lewin problem #77]*

Spiegazione Il potere risolutivo di un telescopio è la minima distanza angolare che permette di distinguere come distinti due oggetti nello spazio. Il criterio per determinarla è legato al fatto che la forma dell'oggetto osservato sullo schermo del telescopio è circolare. Tanto minore è la dimensione dell'immagine sullo schermo, tanto maggiore il potere risolutivo del telescopio.

Svolgimento La dimensione dell'immagine della stella sullo schermo è la combinazione di due fattori, la dimensione del foro ed il fenomeno della diffrazione, anch'esso dipendente dalle dimensioni del foro, ma in modo opposto. Se ignoriamo la diffrazione, l'immagine sullo schermo ha le stesse dimensioni del foro

$$H = d$$

Se teniamo solo conto della diffrazione, l'immagine sullo schermo ha le dimensioni del diametro pari a

$$H = 2 \cdot 1,22 \cdot \frac{D\lambda}{d}$$

Le dimensioni effettive dell'immagine saranno quindi pari al massimo dei due valori possibili. La situazione migliore, con le dimensioni minime, si otterrà eguagliando le due dimensioni

$$d = \frac{2,44 \cdot D\lambda}{d}$$

$$d^2 = 2,44 \cdot D\lambda$$

$$d = \sqrt{2,44 \cdot D\lambda}$$

Con i dati a disposizione otteniamo

$$d = \sqrt{2,44 \cdot 3\,m \cdot 5 \cdot 10^{-7}\,m} = 1,9\,mm$$

Problema di: Onde - $O0093$

Testo *[O0093]* [2½ 3 4a]
Un raggio luminoso in aria incide sull'acqua con un angolo i tale per cui il raggio riflesso ed il raggio rifratto formano tra loro un angolo di $90°$. Calcola i

Spiegazione Un semplice problema sulla rifrazione. Attenti solo a leggere bene la richiesta del problema.

Svolgimento Il raggio di luce passa dall'aria all'acqua. Vale la legge di Snell

$$\sin r = \frac{n_i}{n_r} \sin i = \frac{1}{1,33} \sin i$$

Il raggio riflesso viene riflesso con un angolo pari all'angolo di incidenza

$$i' = i$$

Quindi, dal testo del problema

$$90° - i' + 90° - r = 90°$$

$$r = 90° - i$$

Riprendendo la legge di Snell

$$\sin(90° - i) = \frac{1}{1,33} \sin i$$

$$\cos i = \frac{1}{1,33} \sin i$$

$$\tan i = 1,33$$

$$i = 53°$$

Problema di: Onde - $O0094$

Testo *[O0094]* [2 3 4a]

Un'onda piana di intensità $I_0 = 2\,\frac{W}{m^2}$ incide su di una lente sferica convergente di lunghezza focale f. La sola luce che attraversa la lente è poi raccolta da uno schermo a distanza $x = \frac{2}{3}f$ dalla lente. Quale intensità ha la luce sullo schermo?

Spiegazione La luce raccolta dalla lente è concentrata verso il fuoco. Lo schermo non si trova nel fuoco, e quindi viene illuminato secondo una geometria da individuare.

Svolgimento Ad essere costante è la potenza del fascio luminoso che attraversa la lente di superficie S_0.

$$P = I_0 \cdot S_0$$

sullo schermo avremo

$$P = I_1 \cdot S_1$$

Quindi

$$I_1 \cdot S_1 = I_0 \cdot S_0$$
$$I_1 = I_0 \frac{S_0}{S_1}$$

Assumendo la lente di forma sferica di raggio r_0, l'immagine sullo schermo è una sfera di raggio r_1. Utilizzando le similitudini tra triangoli (provate a trovare ed indicare voi in modo corretto tali triangoli) otteniamo

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{f}{f - \frac{2}{3}f} = 3$$

Quindi

$$I_1 = 9 I_0 = 18\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0094a$

Testo *[O0094a]* [2 ★ 3 ⌛ 4a 📖]

Un'onda piana di intensità $I_0 = 2\,\frac{W}{m^2}$ incide su di una lente sferica divergente di lunghezza focale f. La sola luce che attraversa la lente è poi raccolta da uno schermo a distanza $x = \frac{2}{3}f$ dalla lente. Quale intensità ha la luce sullo schermo?

Spiegazione La luce raccolta dalla lente diverge come se provenisse dal fuoco. Lo schermo non si trova nel fuoco, e quindi viene illuminato secondo una geometria da individuare.

Svolgimento Ad essere costante è la potenza del fascio luminoso che attraversa la lente di superficie S_0.

$$P = I_0 \cdot S_0$$

sullo schermo avremo

$$P = I_1 \cdot S_1$$

Quindi

$$I_1 \cdot S_1 = I_0 \cdot S_0$$

$$I_1 = I_0 \frac{S_0}{S_1}$$

Assumendo la lente di forma circolare di raggio r_0, l'immagine sullo schermo è un cerchio di raggio r_1. Utilizzando le similitudini tra triangoli (provate a trovare ed indicare voi in modo corretto tali triangoli) otteniamo

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{f}{f + \frac{2}{3}f} = \frac{3}{5}$$

Quindi

$$I_1 = \frac{9}{25} I_0 = 0,72\,\frac{W}{m^2}$$

Problema di: Onde - $O0095$

Testo *[O0095]* [1½ ★ 3 ⌛ 4a 📖]

Una radiolina può ricevere trasmissioni radiofoniche sintonizzandosi su frequenze che appartengono ad una delle tre seguenti bande: FM (Frequency Modulation) da $88\,MHz$ a $108\,MHz$; MW (Medium waves) da $540\,kHz$ a $1600\,kHz$; e SW (Short Waves) da $6\,MHz$ a $18\,MHz$. Quali sono le lunghezze d'onda massime e minime delle tre bande di ricezione? IN quale delle tre bande la ricezione di un'onda elettromagnetica è meno influenzata dalla presenza degli edifici? *[Simulazione esame di maturità scientifica: fisica - 25 gennaio 2016]*

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Rifrazione - $LabO0040$

Testo *[LabO0040]* [2 2 4a]
Intorno all'anno 150 d.C.,
Claudio Tolomeo misurò l'angolo di incidenza i e l'angolo di rifrazione r, per un raggio di luce che passa dall'aria all'acqua. Sulla base di questi dati, assumendo che l'indice di rifrazione dell'aria valga $n_{aria} = 1$, quanto vale l'indice di rifrazione dell'acqua?

i	r	i	r
$10°$	$8°$	$50°$	$35°$
$20°$	$15,5°$	$60°$	$40,5°$
$30°$	$22,5°$	$70°$	$45,5°$
$40°$	$29°$	$80°$	$50°$

Spiegazione Con i dati a disposizione calcoliamo il valore atteso di n_{acqua} e l'errore assoluto sulla misura

Svolgimento
Con i dati a disposizione troviamo il valore dell'indice di rifrazione dell'acqua

$$n_{acqua} = n_{aria}\frac{\sin i}{\sin r}$$

e facendone poi la media otteniamo

$$n_{acqua} = 1,289$$

i	r	n
$10°$	$8°$	$1,248$
$20°$	$15,5°$	$1,280$
$30°$	$22,5°$	$1,306$
$40°$	$29°$	$1,326$
$50°$	$35°$	$1,336$
$60°$	$40,5°$	$1,214$
$70°$	$45,5°$	$1,317$
$80°$	$50°$	$1,286$

L'errore assoluto può essere valutato con

$$E_a = \frac{M_{ax} - M_{in}}{2} = \frac{1,336 - 1,214}{2} = 0,061$$

Quindi

$$n_{acqua} = 1,289 \pm 0,061$$

Indice