Esercizi svolti di fisica

Andrea de Capoa

29 marzo 2024

Ricerca per parole chiave

Gli esercizi di questo libro sono tutti catalogati per parole chiave sul sito "Maledetta fisica". Andate all'indirizzo Ricerca esercizi ed inserite il codice privato **anonimo**. Potrete così ricercare gli esercizi per argomento.

In alcuni esercizi è contenuto un link ad un video su YouTube con una videolezione che spiega l'esercizio. Il canale YouTube con tutti gli esercizi è raggiungibile con il link @maledettafisica

Introduzione all'opera

Scheda 2

2.1 Lo scopo del progetto

L'apprendimento della fisica passa spesso attraverso la risoluzione di esercizi. I concetti fondanti della materia sono spesso molto più profondi di quanto non appaia a prima vista, e spesso si imparano sempre meglio e più in profondità quando ci si trova di fronte a problemi che non si riesce a risolvere. Con questo libro voglio fornire agli studenti delle scuole superiori uno strumento per mettere alla prova le proprie conoscenze e sviluppare le relative abilità. Per questo motivo tutti gli esercizi sono risolti, e quei pochi ancora non risolti verranno risolti quanto prima. Buon lavoro.

2.2 Lo stato dell'arte

L'opera è in continua evoluzione. Se mi scriverete all'email *decapoa@gmail.com* potrete indicarmi quali argomenti ritenete sia più utile sviluppare, correggere, sostituire, ampliare, ecc. ecc. Vi sarò grato dell'aiuto che vorrete fornire.

Generalità: soluzioni

Problema di: Generalità - $I0001$

Testo *[I0001]* [1 ★ 11 ⌛ 1a 📖]
Esegui le somme indicate qui di seguito, scegliendo a tuo piacimento l'unità di misura del risultato tra le due già presenti.

- $4\,hm + 300\,m =$
- $3\,hm + 5\,cm =$
- $3\,m + 18\,mm =$
- $9\,km^2 + 10\,hm^2 =$
- $9\,m^2 + 200\,cm^2 =$
- $9\,m^2 + 5\,dm^2 =$
- $12\,km^3 + 78\,hm^3 =$
- $8\,m^3 + 15\,cm^3 =$

- $2\,m^3 + 40\,dm^3 =$
- $45\,l + 50\,dl =$
- $45\,l + 50\,cl =$
- $8\,dl + 2\,cl =$
- $7\,kg + 400\,g =$
- $3\,kg + 3\,hg =$
- $3\,g + 55\,mg =$
- $3\,h + 5\,min =$

- $3\,min + 2\,sec =$
- $3\,h + 5\,sec =$
- $36\,\frac{km}{h} + 30\,\frac{m}{s} =$
- $25\,\frac{kg}{m^3} + 12\,\frac{g}{cm^3} =$
- $2\,\frac{kg\cdot m}{s^2} + 5\,\frac{g\cdot cm}{s^2} =$
- $8\,\frac{kg\cdot m}{s} + 5\,\frac{g\cdot km}{h} =$

Spiegazione Tutte le somme indicate possono essere eseguite in quanto le grandezze fisiche coinvolte sono sempre omogenee; ogni volta vengono sommate o due lunghezze, oppure due tempi, oppure due masse, due densità, ecc. Per eseguire la somma devo trasformare una delle due grandezze nell'altra, preoccupandomi, ad ogni passaggio, di scrivere qualcosa di diverso ma equivalente.

$$7\,km = 7000\,m = 700000\,cm = 4375\,Miglia_{terr} = 7,4\cdot 10^{-16}\,anniluce$$

Eseguire le conversioni di unità di misura Immaginiamo di convertire in metri la quantità $\Delta S = 10\,km$ oppure in ore la quantità $\Delta t = 90\,min$. Il procedimento da seguire prevede i seguenti passaggi, rappresentati poi di seguito:

1. Riscrivere la parte numerica lasciandola immutata.
2. Al posto delle unità di misura che compaiono riscrivere il loro equivalente nella nuova unità di misura: al posto di *km* scrivo *1000 metri* (infatti in un kilometro ci sono $1000\,metri$) e al posto di *min* scrivo $\frac{h}{60}$ (infatti per scrivere l'equivalente di un minuto devo prendere un'ora e dividerla per 60)
3. Eseguire le operazioni del caso sui numeri rimasti

$$12\,km = 12\cdot 1000\,m = 12000\,m$$

$$90\,min = 90\cdot\frac{h}{60} = 1.5\,h$$

Nel caso di conversioni più complesse, il procedimento non cambia. Osserviamo quanto segue: la parte numerica viene copiata uguale, la linea di frazione viene copiata uguale, al posto di *km* scrivo *1000 m* che rappresenta la quantità equivalente espressa un metri, al posto di h (ore) scrivo $3600\,s$, quantità ad essa equivalente.

$$130\,\frac{km}{h} = 130\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 36.11\,\frac{m}{s}$$

Analogamente avremo:

$$130\,\frac{kg}{m^3} = 130\,\frac{kg}{m\cdot m\cdot m} = 130\,\frac{1000\,g}{100\,cm\cdot 100\,cm\cdot 100\,cm} = 0,13\,\frac{g}{cm^3}$$

Svolgimento

- $4\,hm + 300\,m = 4\cdot 100\,m + 300\,m = 700\,m;$
- $4\,hm + 300\,m = 4\,hm + 300\cdot\frac{hm}{100} = 7\,hm;$
- $3\,hm + 5\,cm = 3\cdot 100\,m + 5\,cm = 3\cdot 100\cdot 100\,cm + 5\,cm = 300005\,cm;$
- $3\,hm + 5\,cm = 3\,hm + 5\,\frac{m}{100} = 3\,hm + 5\,\frac{hm}{100\cdot 100} = 3,00005\,hm;$
- $3\,m + 18\,mm = 3\cdot 1000\,mm + 18\,mm = 3018\,mm;$
- $3\,m + 18\,mm = 3\,m + 18\frac{m}{1000} = 3,018\,m;$
- $9\,km^2 + 10\,hm^2 = 9\cdot 10\,hm\cdot 10\,hm + 10\,hm^2 = 900\,hm^2 + 10\,hm^2 = 910\,hm^2;$
- $9\,km^2 + 10\,hm^2 = 9\,km^2 + 10\,\frac{km}{10}\cdot\frac{km}{10} = 9\,km^2 + 0,1\,km^2 = 9,1\,km^2;$
- $9\,m^2 + 200\,cm^2 = 9\cdot(100\,cm)^2 + 200\,cm^2 = 90000\,cm^2 + 200\,cm^2 = 90200\,cm^2;$

- $9\,m^2 + 200\,cm^2 = 9\,m^2 + 200\,\frac{m}{100}\cdot\frac{m}{100} = 9\,m^2 + 0,02\,m^2 = 9,02\,m^2$;
- $9\,m^2 + 5\,dm^2 = 9\cdot 10\,dm\cdot 10\,dm + 5\,dm^2 = 900\,dm^2 + 5\,dm^2 = 905\,dm^2$;
- $9\,m^2 + 5\,dm^2 = 9\,m^2 + 5\cdot\frac{m}{10}\cdot\frac{m}{10} = 9\,m^2 + 0,05\,m^2 = 9,05\,m^2$;
- $12\,km^3 + 78\,hm^3 = 12\cdot(10\,hm)^3 + 78\,hm^3 = 12000\,hm^3 + 78\,hm^3 = 12078\,hm^3$;
- $12\,km^3 + 78\,hm^3 = 12\,km^3 + 78\,\left(\frac{km}{10}\right)^3 = 12\,km^3 + 0,078\,km^3 = 12,078\,km^3$;
- $8\,m^3 + 15\,cm^3 = 8\cdot(100\,cm)^3 + 15\,cm^3 = 8000000\,cm^3 + 15\,cm^3 = 8000015\,cm^3$;
- $8\,m^3 + 15\,cm^3 = 8\,m^3 + 15\,\frac{m}{100}\cdot\frac{m}{100}\cdot\frac{m}{100} = 8\,m^3 + 0,000015\,cm^3 = 8,000015\,cm^3$;
- $2\,m^3 + 40\,dm^3 = 2\cdot 10\,dm\cdot 10\,dm\cdot 10\,dm + 40\,dm^3 = 2000\,m^3 + 40\,dm^3 = 2040\,dm^3$;
- $2\,m^3 + 40\,dm^3 = 2\,m^3 + 40\cdot\frac{m}{10}\cdot\frac{m}{10}\cdot\frac{m}{10} = 2\,m^3 + 0,04\,m^3 = 2,04\,m^3$;
- $45\,l + 50\,dl = 45\cdot 10\,dl + 50\,dl = 500\,dl$;
- $45\,l + 50\,dl = 45\,l + 50\cdot\frac{l}{10} = 50\,l$;
- $45\,l + 50\,cl = 45\cdot 100\,cl + 50\,cl = 4550\,cl$;
- $45\,l + 50\,cl = 45\,l + 50\cdot\frac{l}{100} = 45,5\,l$;
- $8\,dl + 2\,cl = 8\cdot 10\,cl + 2\,cl = 82\,cl$;
- $8\,dl + 2\,cl = 8\,dl + 2\frac{dl}{10} = 8,2\,dl$;
- $7\,kg + 400\,g = 7\cdot 1000\,g + 400\,g = 7400\,g$;
- $7\,kg + 400\,g = 7\,kg + 400\,\frac{kg}{1000} = 7,4\,kg$;
- $3\,kg + 3\,hg = 3\cdot 10\,hg + 3\,hg = 33\,hg$;
- $3\,kg + 3\,hg = 3\,kg + 3\,\frac{kg}{10} = 3,3\,kg$;
- $3\,g + 55\,mg = 3\cdot 1000\,mg + 55\,mg = 3055\,mg$;
- $3\,g + 55\,mg = 3\,g + 55\,\frac{g}{1000} = 3,055\,g$;
- $3\,h + 5\,min = 3\cdot 60\,min + 5\,min = 185\,min$;
- $3\,h + 5\,min = 3\,h + 5\,\frac{h}{60} = 3,0833\,h$;
- $3\,min + 2\,sec = 3\cdot 60\,sec + 2\,sec = 182\,sec$;
- $3\,min + 2\,sec = 3\,min + 2\,\frac{min}{60} = 3,0333\,min$;
- $3\,h + 5\,sec = 3\cdot 3600\,sec + 5\,sec = 10805\,sec$;
- $3\,h + 5\,sec = 3\,h + 5\,\frac{h}{3600} = 3,0014\,h$;
- $36\,\frac{km}{h} + 30\,\frac{m}{s} = 36\,\frac{1000\,m}{3600\,s} + 30\,\frac{m}{s} = 40\,\frac{m}{s}$
- $36\,\frac{km}{h} + 30\,\frac{m}{s} = 36\,\frac{km}{h} + 30\,\frac{km\cdot 3600}{1000\cdot h} = 144\,\frac{km}{h}$
- $25\,\frac{kg}{m^3} + 12\,\frac{g}{cm^3} = 25\,\frac{1000\,g}{100\,cm\cdot 100\,cm\cdot 100\,cm} + 12\,\frac{g}{cm^3} = 12,025\,\frac{g}{cm^3}$
- $25\,\frac{kg}{m^3} + 12\,\frac{g}{cm^3} = 25\,\frac{kg}{m^3} + 12\,\frac{kg\cdot 100\cdot 100\cdot 100}{1000\cdot m\cdot m\cdot m} = 12025\,\frac{kg}{m^3}$
- $2\,\frac{kg\cdot m}{s^2} + 5\,\frac{g\cdot cm}{s^2} = 2\,\frac{1000\,g\cdot 100\,cm}{s^2} + 5\,\frac{g\cdot cm}{s^2} = 200005\,\frac{g\cdot cm}{s^2}$
- $2\,\frac{kg\cdot m}{s^2} + 5\,\frac{g\cdot cm}{s^2} = 2\,\frac{kg\cdot m}{s^2} + 5\,\frac{kg\cdot m}{1000\cdot 100\cdot s^2} = 2,00005\,\frac{kg\cdot m}{s^2}$
- $8\,\frac{kg\cdot m}{s} + 5\,\frac{g\cdot km}{h} = 8\,\frac{1000\,g\cdot km\cdot 3600}{1000\,h} + 5\,\frac{g\cdot km}{h} = 28805\,\frac{g\cdot km}{h}$
- $8\,\frac{kg\cdot m}{s} + 5\,\frac{g\cdot km}{h} = 8\,\frac{kg\cdot m}{s} + 5\,\frac{kg\cdot m\cdot 1000}{1000\cdot 3600\,s} = 5,0014\,\frac{kg\cdot m}{s}$

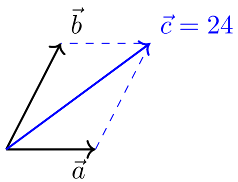
Problema di: Vettori - $I0002$

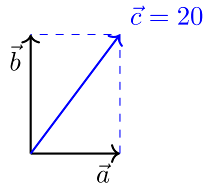
Testo *[I0002]* [2 8 1a]
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rispettivamente di moduli $a = 12$ e $b = 16$, disegnateli in modo tale che la loro somma sia un vettore $\vec{c}$ il cui modulo valga $c = 20$. Ripetete l'esercizio in modo tale che $c = 4$; $c \sim 10$; $c \sim 24$; $c = 28$.

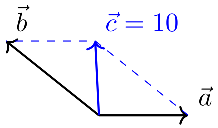
Spiegazione Il modulo della somma di due vettori dipende dai moduli di quei due vettori e dall'angolo compreso tra i due vettori. Visto che il testo dell'esercizio dice quanto valgono i due vettori, per risolvere l'esercizio bisogna indicare quanto vale l'angolo tra di essi. Questo è conseguenza della regola del parallelogrammo.

Svolgimento

- Affinché il vettore somma $c = 28$ i due vettori devono essere paralleli e nello stesso verso
- Affinché il vettore somma $c \sim 24$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo acuto
- Affinché il vettore somma $c = 20$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo retto $\alpha = 90°$
- Affinché il vettore somma $c \sim 10$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo ottuso
- Affinché il vettore somma $c = 4$ i due vettori devono essere posizionati ad un angolo piatto $\alpha = 180°$







Problema di: Grandezze fisiche - $I0003$

Testo *[I0003]* [1½ 3 1a]
Ho versato in un bicchiere un volume $V_{H_2O} = 50\,cm^3$ di acqua ed un volume $V_o = 50\,cm^3$ di olio. L'acqua ha una densità $\rho_{H_2O} = 1\,\frac{kg}{dm^3}$ e l'olio ha una densità $\rho_o = 0,8\,\frac{g}{cm^3}$. Quanto volume di liquido si trova nel bicchiere? Quanta massa di liquido si trova nel bicchiere?

Spiegazione In questo problema l'unica cosa da sapere è cosa sia la densità di un materiale. i volumi dei due liquidi sono stati dati dal problema; le masse si ricavano conoscendo i valori della densità.

Svolgimento Il volume complessivo di liquido è semplicemente

$$V_{tot} = V_{H_2O} + V_{olio} = 100\,cm^3$$

La massa dell'acqua è

$$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} = 1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 50\,cm^3$$

Possiamo vedere che le unità di misura non si semplificano come dovrebbero; dobbiamo quindi convertire di unità di misura prima di poter eseguire i conti

$$m_{H_2O} = 1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 50\,\frac{dm^3}{1000} = 0,05\,kg = 50\,g$$

La massa dell'olio è

$$m_a = \rho_{olio} \cdot V_{olio} = 0,8\,\frac{g}{cm^3} \cdot 50\,cm^3 = 40\,g$$

La massa di liquido nel bicchiere vale

$$m_{tot} = m_{H_2O} + m_{olio} = 90\,g$$

Problema di: Grandezze fisiche - $I0004$

Testo *[I0004]* [1 2 1a]
Un oggetto di materiale sconosciuto, ha un volume $V = 8,75\,dm^3$ ed ha la stessa massa di un blocco di ferro di densità $\rho_{Fe} = 7,874\frac{kg}{dm^3}$ che occupa un volume $V_{Fe} = 3\,dm^3$. Calcola la massa e la densità del materiale.

Spiegazione In questo problema l'unica cosa da sapere è cosa sia la densità di un materiale, definita come il rapporto tra massa e volume di un qualunque oggetto fatto di quel materiale

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Visto che la densità di un oggetto dipende solo dal materiale di cui è fatto, una volta trovato il valore della densità del materiale potremo capire quale materiale è.

Svolgimento La massa dell'oggetto di ferro vale

$$M_{Fe} = \rho_{Fe} \cdot V_{Fe} = 7,874\frac{kg}{dm^3} \cdot 3\,dm^3 = 23,662\,kg$$

Il problema ci dice che l'oggetto di cui non conosciamo il materiale (indicato con l'indice s) ha la stessa massa dell'oggetto di ferro

$$M_s = M_{Fe} = 23,662\,kg$$

La densità del materiale vale quindi

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} = 2,7\,\frac{kg}{dm^3}$$

Confrontando questo valore con le tabelle dei materiali troviamo che il materiale sconosciuto è alluminio.

Problema di: Grandezze fisiche - $I0005$

Testo *[I0005]* [2 2 1a]
Un cilindro graduato contiene un volume $V_i = 250\,cm^3$ di acqua. Dopo averci immerso un oggetto di rame di densità $\rho_{ogg} = 8,92\frac{kg}{dm^3}$, il cilindro segna un volume $V_f = 375\,cm^3$. Calcola volume e massa dell'oggetto.

Spiegazione Questo problema vogliamo misurare la massa di un oggetto tramite immersione in un liquido. Noi ne conosciamo il materiale, quindi la densità. Nel cilindro graduato c'è un certo quantitativo di luquido; immergendo l'oggetto il livello del liquido sale. L'unica cosa da sapere è cosa sia la densità di un materiale, definita come il rapporto tra massa e volume di un qualunque oggetto fatto di quel materiale

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Visto che la densità di un oggetto dipende solo dal materiale di cui è fatto, è sufficiente confrontare le tabelle dei materiali. Il volume dell'oggetto lo si ricava per differenza tra i livelli dei liquidi dopo e prima dell'immersione. La massa semplicemente applicando la formula della densità di un materiale.

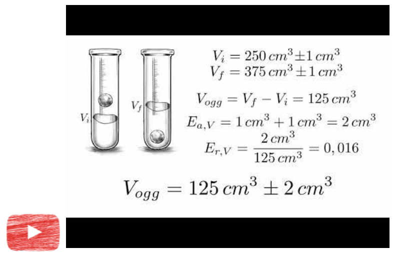


Fig. 3.1: *Guarda il video youtu.be/3e3aF8zQEgE*

Svolgimento Il suo volume si ricava per differenza

$$V_{Cu} = V_f - V_i = 125\,cm^3 = 0,125\,dm^3$$

Il risultato l'ho trasformato in decimetri cubi per poter meglio fare i conti con le unità di misura nei passaggi successivi.

La massa dell'oggetto vale

$$M_{Cu} = \rho_{Cu} \cdot V_{Cu} = 8,92 \frac{kg}{dm^3} \cdot 0,125\, dm^3 = 1,115\, kg$$

Problema di: Vettori - $I0006$

Testo *[I0006]* [3 4 1a]
Calcola la somma di due vettori lunghi entrambi $r = 9$ posti ad un angolo $\theta = 60°$ tra loro.

Spiegazione Per sommare due vettori a $\theta = 60°$ tra loro è sufficiente un po' di geometria euclidea.

Svolgimento I due vettori, uguali in modulo, sono due lati di un triangolo equilatero. Il triangolo che formano è infatti isoscele perché il due vettori hanno lo stesso modulo, e visto che l'angolo tra loro è $\theta = 60°$, i due angoli alla base, sicuramente uguali, hanno come somma $120°$ e quindi sono entrambi di $60°$

I due vettori possono essere scomposti lungo la linea della bisettrice e lungo la linea perpendicolare alla bisettrice. Le due componenti perpendicolari sono uguali ed opposte e quindi si annullano. Per le altre due si sommano i moduli.

Le due componenti parallele coincidono con l'altezza del triangolo equilatero che può essere calcolata come

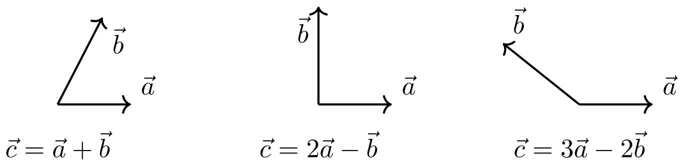
$$h = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi il vettore somma, diretto lungo la bisettrice dell'angolo tra i due vettori, vale

$$|c| = 2 \cdot 9 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

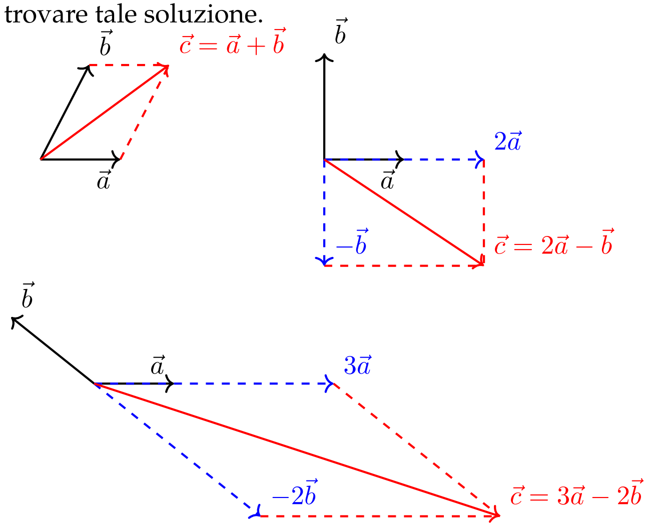
Problema di: Vettori - $I0007$

Testo *[I0007]* [1 3 1a]
Esegui le operazioni indicate con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



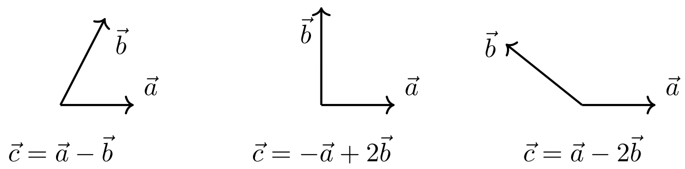
Spiegazione In questo esercizio bisogna eseguire due tipi di operazioni con i vettori: il prodotto di un vettore per uno scalare e la somma di vettori. Prima si esegue il prodotto di un vettore per uno scalare, e poi si fa la somma dei risultati.

Svolgimento In rosso troverete la soluzione del problema; in blu i vettori necessari per arrivare a trovare tale soluzione.



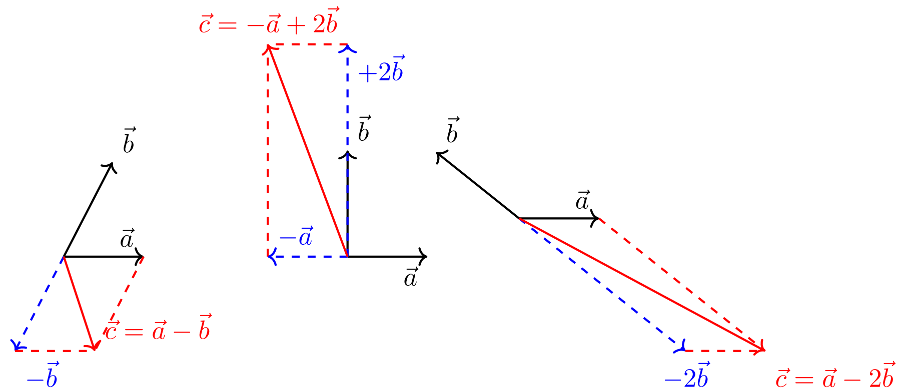
Problema di: Vettori - $I0007a$

Testo *[I0007a]* [1 3 1a]
Esegui le operazioni indicate con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



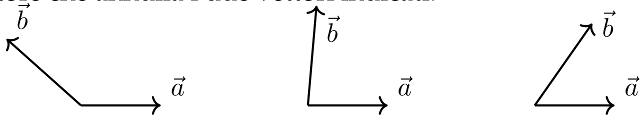
Spiegazione In questo esercizio bisogna eseguire due tipi di operazioni con i vettori: il prodotto di un vettore per uno scalare e la somma di vettori. Prima si esegue il prodotto di un vettore per uno scalare, e poi si fa la somma dei risultati.

Svolgimento In rosso troverete la soluzione del problema; in blu i vettori necessari per arrivare a trovare tale soluzione.



Problema di: Vettori - $I0008$

Testo *[I0008]* [2 1 1a]
Disegna il vettore che annulla i due vettori indicati.



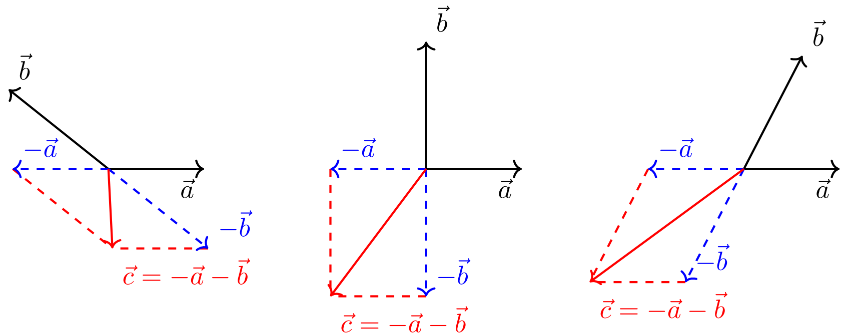
Spiegazione Il vettore $\vec{c}$ che annulla i vettori indicati $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è quello per cui vale la relazione

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

e quindi

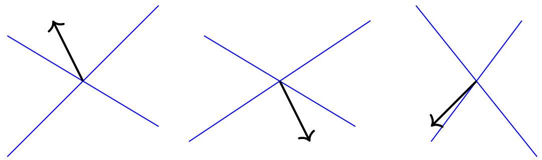
$$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$$

Svolgimento



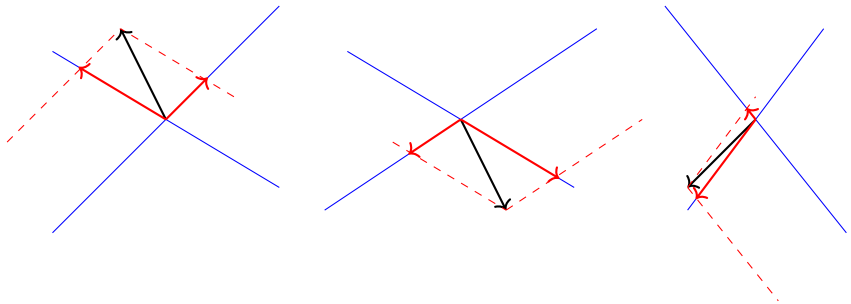
Problema di: Vettori - $I0009$

Testo *[I0009]* [1 3 1a]
Scomponi i seguenti vettori lungo le direzioni indicate



Spiegazione La scomposizione di un vettore consiste nel trovare i due vettori che sommati danno il vettore dato.

Svolgimento Per trovare i vettori richiesti devi tracciare delle linee tratteggiate che partono dalla punta del vettore dato (quello in nero) e che siano parallele alle direzioni indicate dal problema (le linee blu). I due vettori disegnati in rosso rappresentano la soluzione richiesta. Quei due vettori, sommati, danno il vettore di partenza.



Problema di: Vettori - $I0010$

Testo *[I0010]* [2 2½ 1a]
Scomponi un vettore $c = 10$ lungo due direzioni tra loro perpendicolari, in modo che una delle due componenti del vettore sia lunga $a = 6$. Fatto il disegno, calcola l'altra componente del vettore.

Spiegazione La scomposizione di un vettore consiste nel trovare i due vettori che sommati danno il vettore dato.

Svolgimento Per svolgere l'esercizio disegniamo due rette tra loro perpendicolari ed il vettore $\vec{c}$ applicato nell'intersezione tra le rette. Svolgiamo la scomposizione ed indichiamo il vettore $\vec{a}$. Il calcolo del vettore $\vec{b}$ verrà fatto con il teorema di Pitagora

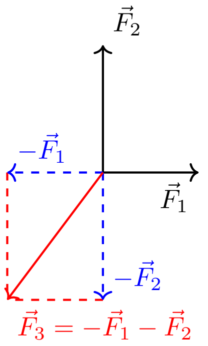
$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Problema di: Vettori - $I0011$

Testo *[I0011]* [2 4 1a]
Disegna, e calcolane il valore, il vettore $\vec{F_3}$ che annulla la somma dei vettori $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ di valore rispettivamente $F_1 = 1,5\,kN$ e $F_2 = 800\,N$ posti perpendicolari tra loro.

Spiegazione I due vettori dati possono essere sommati. La somma tra il vettore risultato ed il vettore che voi dovete indicare, deve dare come risultato zero. Quindi il vettore che dovete indicare deve essere uguale e opposto al vettore somma tra i due vettori indicati nel problema.

Svolgimento Cominciamo con il disegnare, in blu, i due vettori che singolarmente annullano i due vettori dati; la somma dei due vettori blu, da il vettore rosso. Il vettore rosso è il vettore che, da solo, annulla i due vettori dati. Il vettore rosso, infatti, annulla i due vettori dati in quanto annulla la loro somma.

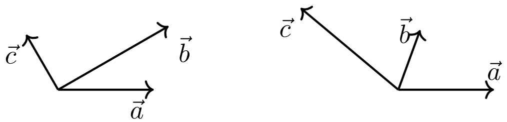


Il modulo del vettore $\vec{F_3}$ deve essere uguale al modulo del vettore $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ e si calcola

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{(1500\,N)^2 + (800\,N)^2} = 1700\,N$$

Problema di: Vettori - $I0015$

Testo *[I0015]* [2 7 1a]
Esegui la somma dei tre vettori mostrati in figura.



Spiegazione Per sommare tre vettori, sommo i primi due e successivamente sommo il terzo vettore al risultato della somma dei primi due. Non fate l'errore di sommare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, poi sommare i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$, e poi sommare i due risultati... sarebbe sbagliato perchè contereste il vettore $\vec{b}$ due volte.

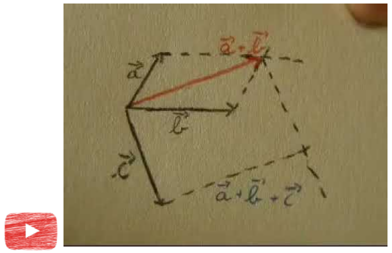
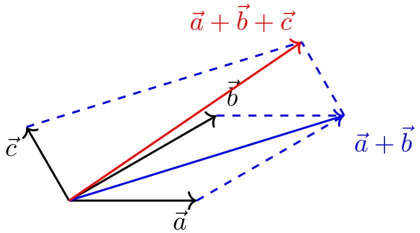
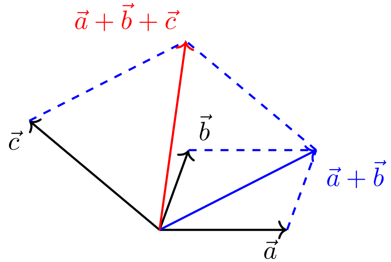


Fig. 3.2: *Guarda il video youtu.be/3l5VpcPO-PM*

Svolgimento Cominciate con il sommare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ottenendo quello che nella soluzione è il vettore in blu. Successivamente sommate il vettore blu al vettore $\vec{c}$.





Problema di: Laboratorio - $I0017$

Testo *[I0017]* [2 3 1a]
Due cubi di lato $l = 10\,cm$, uno di argento (di densità $\rho_{Ag} = 10,5\,\frac{kg}{dm^3}$) e l'altro di piombo (di densità $\rho_{Pb} = 11,3\,\frac{kg}{dm^3}$), hanno la stessa massa. Avendo lo stesso volume e la stessa massa, quello più denso deve contenere al suo interno uno spazio vuoto. Quanto è grande la cavità che ci deve essere all'interno del cubo di piombo?

Spiegazione In questo problema abbiamo due cubi di eguale volume ma materiale differente. Questo significa che i due cubi non dovrebbero avere la stessa massa. Visto che il testo afferma invece che hanno la stessa massa, questo significa che il cubo più denso deve avere necessariamente una cavità all'interno ch lo alleggerisca un po'.

Svolgimento Il problema ci dice che i due cubi hanno lo stesso volume

$$V = V_{cubo} = l^3 = 1000\,cm^3 = 1\,dm^3$$

e stessa massa, quindi

$$M_{Pb} = M_{Ag}$$

$$\rho_{Pb} V_{Pb} = \rho_{Ag} V_{Ag}$$

Il volume dell'argento coincide con il volume del cubo, il volume del piombo è pari al volume del cubo meno il volume della cavità interna vuota, per cui

$$\rho_{Pb}\left(V_{cubo} - V_{cav}\right) = \rho_{Ag} V_{cubo}$$

da cui ricavo il volume della cavità

$$\rho_{Pb} V_{cubo} - \rho_{Pb} V_{cav} = \rho_{Ag} V_{cubo}$$

$$-\rho_{Pb} V_{cav} = \rho_{Ag} V_{cubo} - \rho_{Pb} V_{cubo}$$

$$\rho_{Pb} V_{cavita} = \rho_{Pb} V_{cubo} - \rho_{Ag} V_{cubo}$$

$$V_{cav} = \frac{\rho_{Pb} V_{cubo} - \rho_{Ag} V_{cubo}}{\rho_{Pb}}$$

$$V_{cav} = V_{cubo} \frac{\rho_{Pb} - \rho_{Ag}}{\rho_{Pb}}$$

$$V_{cav} = V_{cubo}\left(1 - \frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Pb}}\right)$$

$$V_{cav} = 1\,dm^3\left(1 - \frac{10,5}{11,3}\right) = 0,07\,dm^3$$

Problema di: Grandezze fisiche - $I0018$

Testo *[I0018]* [2⭐ 3⌛ 1a📖]
Calcola la densità del liquido che si ottiene dopo aver mescolato $m_{H_2O} = 1\,kg$ di acqua $\left(\rho_{H_2O} = 1\,\frac{kg}{dm^3}\right)$ e $m_2 = 2\,kg$ di alcool $\left(\rho_{alc} = 0,8\,\frac{kg}{dm^3}\right)$.

Spiegazione La densità di un liquido si calcola sempre facendo il rapporto tra la sua massa ed il suo volume

Svolgimento La massa di liquido presente è

$$m = m_{H_2O} + m_{alc} = 3\,kg$$

I volumi di acqua ed alcool sono

$$V_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{\rho_{H_2O}} = 1\,dm^3$$

$$V_{alc} = \frac{m_{alc}}{\rho_{alc}} = 2,5\,dm^3$$

Il volume complessivo di liquido è

$$V = V_{H_2O} + V_{alc} = 3,5\,dm^3$$

La densità del liquido è

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3\,kg}{3,5\,dm^3} = 0,86\,\frac{kg}{dm^3}$$

Problema di: Vettori - $I0019$

Testo *[I0019]* [2½⭐ 3⌛ 2a📖]
Dobbiamo costruire il vettore $\vec{P} = 5\vec{i} + 9\vec{j}$ sommando un vettore $\vec{A} = a\vec{j}$ con un multiplo λ di un vettore $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Trovate a e λ.

Spiegazione Somma di vettori con i versori. Bisogna impostare il corretto sistema.

Svolgimento L'equazione da scrivere è

$$\vec{P} = \vec{A} + \lambda\vec{B}$$

che in termini delle componenti significa

$$5\vec{i} + 9\vec{j} = a\vec{j} + \lambda\vec{i} + 2\lambda\vec{j}$$

$$(5 - \lambda)\,\vec{i} + (9 - a - 2\lambda)\,\vec{j} = 0$$

Questa si concretizza nel sistema

$$\begin{cases} 5 - \lambda = 0 \\ 9 - a - 2\lambda = 0 \end{cases}$$

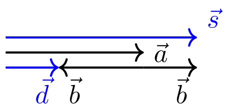
$$\begin{cases} \lambda = 5 \\ a = -1 \end{cases}$$

Problema di: Generalità - $I0021$

Testo *[I0021]* [2 4 2a]
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, determinare i loro moduli sapendo che la loro somma massima vale 18 e la loro somma minima vale 8.

Spiegazione La somma di due vettori è un vettore il cui modulo dipende dai moduli dei due vettori ma anche **dall'angolo** tra i due vettori. Il risultato della somma è massimo se l'angolo tra i vettori è nullo; il risultato è minimo se l'angolo tra i due vettori è 180°

Svolgimento Proviamo a disegnare i due vettori *somma massima* $\vec{s}$ e *somma minima* $\vec{d}$



Come si vede dal disegno, la differenza di valore tra la somma massima e la somma minima è pari al doppio del valore del vettore più corto. Quindi

$$2b = 18 - 8$$

$$b = 5$$

e quindi

$$a = 10$$

Un modo più matematico di affrontare il problema è il seguente. Visto il testo del problema possiamo scrivere:

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ a - b = 8 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ a = 8 + b \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} 8 + b + b = 18 \\ a = 8 + b \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} 8 + 2b = 18 \\ a = 8 + b \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} 2b = 10 \\ a = 8 + b \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ a = 13 \end{cases} \tag{3.6}$$

Problema di: Generalità - $I0022$

Testo *[I0022]* [1 2 1a]
Un corpo di ferro, di massa $m = 10\,kg$, ha forma sferica. Quanto vale il suo raggio?

Spiegazione Il problema chiede il calcolo del raggio di una sfera conoscendone la massa e materiale. Troviamo il raggio dalla conoscenza del valore del volume, a sua volta ottenuta dalla conoscenza di massa e densità.

Svolgimento Il volume della sfera e di conseguenza il suo raggio, è ottenibile dal rapporto tra massa e densità

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{m}{\rho_{Fe}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_{Fe}}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{30\,kg}{4 \cdot \pi \cdot 7960\,\frac{kg}{m^3}}} = 0,067\,m$$

Problema di: Generalità - $I0023$

Testo *[I0023]* [1 2 1a]
Un cubo di lato $L = 0,05\,m$, fatto di un materiale sconosciuto, ha una massa $m = 200\,g$. Quanto vale la densità del cubo, espressa in $\frac{kg}{m^3}$? Se con un martello rompo l'oggetto e ne stacco un frammento, quanto vale la densità di quel frammento? [motiva la risposta]

Spiegazione In questo problema bisogna solo sapere come calcolare una densità a partire dalla definizione stessa della densità, e sapere che la densità è un parametro dipendente solo dal materiale di cui è fatto un oggetto.

Svolgimento La densità dell'oggetto è

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{L^3} = \frac{200\,g}{0,000125\,m^3} = \frac{0,2\,kg}{0,000125\,m^3} = 1600\,\frac{kg}{m^3}$$

Visto che la scheggia è fatta dello stesso materiale del cubo, avrà la stessa sua densità.

Problema di: Generalità - $I0023a$

Testo *[I0023a]* [1 ⭐ 2 ⏳ 1a 📖]
Un blocco cubico di marmo, di densità $\rho = 2600\,\frac{kg}{m^3}$, misura $L = 40\,cm$ di lato. Calcola la sua massa. Quanto vale la densità del cubo, espressa in $\frac{g}{cm^3}$? Se uno scultore ne ricava una statuetta di volume $V_{statua} = 25000\,cm^3$, quanto sarà la densità della statuetta? [motiva la risposta]

Spiegazione Per questo esercizio è necessario sapere cosa sia la densità di un corpo e da cosa dipende.

Svolgimento La massa del blocco è

$$M = \rho_{marmo} \cdot V = 2600\,\frac{kg}{m^3} \cdot (0,4\,m)^3 = 166,4\,kg$$

La densità del blocco è

$$\rho_{marmo} = 2600\,\frac{kg}{m^3} = 2600\,\frac{1000g}{(100cm)^3} = 2,6\,\frac{g}{cm^3}$$

La densità ella statuetta non cambia in quanto non cambia il materiale di cui è fatta.

Problema di: Generalità - $I0023b$

Testo *[I0023b]* [1 ⭐ 2 ⏳ 1a 📖]
Un blocco cubico di ferro, di densità $\rho = 7,874\,\frac{g}{cm^3}$, misura $L = 20\,cm$ di lato. Calcola la sua massa. Quanto vale la densità del cubo, espressa in $\frac{kg}{m^3}$? Se uno scultore lo fonde e ne ricava una statuetta di volume minore perché del materiale si è perso come scarto di lavorazione, quanto sarà la densità della statuetta? [motiva la risposta]

Spiegazione Per questo esercizio è necessario sapere cosa sia la densità di un corpo e da cosa dipende.

Svolgimento La densità del blocco è

$$\rho_{ferro} = 7,874\,\frac{g}{cm^3} = 7,874\,\frac{\frac{kg}{1000}}{\left(\frac{m}{100}\right)^3} = 7876\,\frac{kg}{m^3}$$

La massa del blocco è

$$M = \rho_{ferro} \cdot V = 7,874\,\frac{g}{cm^3} \cdot (20\,cm)^3 = 62992\,g$$

La densità ella statuetta non cambia in quanto non cambia il materiale di cui è fatta.

Problema di: Generalità - $I0023c$

Testo *[I0023c]* [1 2 1a]
Calcola il volume di un blocco di marmo, di massa $m = 400\,kg$ e densità $\rho = 2600\,\frac{kg}{m^3}$. Quanto vale la densità del blocco espressa in $\frac{g}{cm^3}$? Se uno scultore ne ricava una statuetta di volume dimezzato, quanto sarà la densità della statuetta? [motiva la risposta]

Spiegazione Per questo esercizio è necessario sapere cosa sia la densità di un corpo e da cosa dipende.

Svolgimento Il volume del blocco di marmo lo si trova utilizzando la definizione di densità

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{400\,kg}{2600\,\frac{kg}{m^3}} = 0,1538\,m^3$$

La densità del blocco è

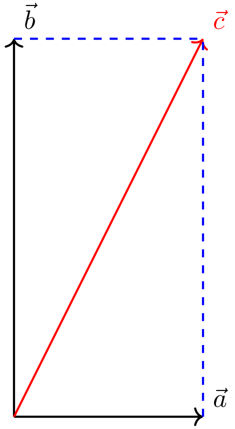
$$\rho = 2600\,\frac{kg}{m^3} = 2600\,\frac{1000\,g}{100\,cm \cdot 100\,cm \cdot 100\,cm = 2,6\,\frac{g}{cm^3}}$$

Problema di: Generalità - $I0024$

Testo *[I0024]* [1 3 1a]
Disegna due vettori perpendicolari tra loro, uno lungo $a = 5$ e l'altro lungo il doppio. Disegna poi la loro somma e calcola quanto vale.

Spiegazione La somma di vettori si fa con la regola del parallelogrammo. Essendo poi i vettori posti a $90°$ il calcolo della somma può essere fatto con il teorema di Pitagora.

Svolgimento Nel seguente disegno si vede come è stata applicata la regola del parallelogrammo per trovare la somma dei due vettori.



Il calcolo del valore di $\vec{c}$ si fa utilizzando il teorema di Pitagora

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 11,18$$

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0025$

Testo *[I0025]* [1 ★ 2 ⌛ 1a 📖]
Un frammento di acciaio ha una massa $m = 40\,g$ ed una densità $\rho = 8\,\frac{g}{cm^3}$. Quanto vale il suo volume? Che densità avrebbe una trave di acciaio della massa $m = 500\,kg$. *[Motiva la risposta]*

Spiegazione Per questo esercizio è necessario sapere cosa sia la densità di un corpo e da cosa dipende.

Svolgimento Il volume del frammento di acciaio lo calcoliamo nel seguente modo:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{40\,g}{8\,\frac{g}{cm^3}} = 5\,cm^3$$

La trave di acciaio, essendo dello stesso materiale, avrà la stessa densità. Ovviamente avendo una massa maggiore avrà anche un volume maggiore.

Problema di: Generalità - $I0025a$

Testo *[I0025a]* [1 ★ 2 ⌛ 1a 📖]
Nel serbatoio di un'auto ci sono $m = 250\,g$ di benzina, di densità $\rho = 0,7\,\frac{kg}{dm^3}$. Calcola in volume della benzina. Se l'autista riempie il serbatoio aggiungendo un volume $V = 12\,litri$ di benzina, quale sarà la densità del liquido contenuto nel serbatoio? [motiva la risposta]

Spiegazione Per questo esercizio è necessario sapere cosa sia la densità di un corpo e da cosa dipende.

Svolgimento Il volume di benzina nel serbatoio è

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{0,25\,kg}{0,7\,\frac{kg}{dm^3}} = 0,357\,dm^3$$

Con l'aggiunta di nuova benzina, la densità del liquido non cambia visto che il liquido è sempre benzina e non è quindi cambiato il materiale.

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026a$

Testo *[I0026a]* [1 2 1a]

Esegui le seguenti somme

- $10\,kg + 5\,hg$;
- $5\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{km}{h}$;
- $4\,h + 25\,min$;
- $2\,m^3 + 3000\,cm^3$;

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $10\,kg + 5\,hg = 10 \cdot 10\,hg + 5\,hg = 105\,hg$;
- $5\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{km}{h} = 5\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 5\,\frac{m}{s} + 20\,\frac{m}{s} = 25\,\frac{m}{s}$;
- $4\,h + 25\,min = 4 \cdot 60\,min + 25\,min = 265\,min$;
- $2\,m^3 + 3000\,cm^3 = 2 \cdot 100\,cm \cdot 100\,cm \cdot 100\,cm + 3000\,cm^3 = 2000000\,cm^3 + 3000\,cm^3 = 2003000\,cm^3$;

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026b$

Testo *[I0026b]* [1 2 1a]

Esegui le seguenti somme

- $10\,g + 5\,hg$;
- $10\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{km}{h}$;
- $4\,s + 25\,min$;
- $2\,cm^3 + 3000\,mm^3$;

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $10\,g + 5\,hg = 10\,g + 5 \cdot 100\,g = 510\,g$;
- $10\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s} + 72\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s} + 20\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{m}{s}$;
- $4\,s + 25\,min = 4\,s + 25 \cdot 60\,s = 1504\,s$;
- $2\,cm^3 + 3000\,mm^3 = 2 \cdot 10\,mm \cdot 10\,mm \cdot 10\,mm + 3000\,mm^3 = 5000\,mm^3$;

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026c$

Testo *[I0026c]* [1 2 1a]
Esegui le seguenti somme

- $10\,g + 3\,kg$;
- $10\,\frac{m}{s} + 18\,\frac{km}{h}$;
- $4\,s + 2\,h$;
- $2\,dm^3 + 30\,cm^3$;

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $10\,g + 3\,kg = 10\,g + 3 \cdot 1000\,g = 3010\,g$;
- $10\,\frac{m}{s} + 18\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s} + 18\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s} + 5\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{m}{s}$;
- $4\,s + 2\,h = 4\,s + 2 \cdot 3600\,s$;
- $2\,dm^3 + 30\,cm^3 = 2 \cdot 10\,cm \cdot 10\,cm \cdot 10\,cm + 30\,cm^3 = 2030\,cm^3$;

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026d$

Testo *[I0026d]* [1 2 1a]
Esegui le seguenti somme

- $10\,m + 3\,km$;
- $8\,\frac{m}{s} + 54\,\frac{km}{h}$;
- $4\,s + 25\,min$;
- $2\,dm^3 + 30\,mm^3$;

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $10\,m + 3\,km = 10\,m + 3 \cdot 1000\,m = 3010\,m$;
- $8\,\frac{m}{s} + 54\,\frac{km}{h} = 8\,\frac{m}{s} + 54\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 8\,\frac{m}{s} + 15\,\frac{m}{s} = 23\,\frac{m}{s}$;
- $4\,s + 25\,min = 4\,s + 25 \cdot 60\,s = 1504\,s$;
- $2\,dm^3 + 30\,mm^3 = 2 \cdot 100\,mm \cdot 100\,mm \cdot 100\,mm + 30\,mm^3 = 2000030\,mm^3$;

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026e$

Testo [I0026e] [1 2 1a]
Esegui le seguenti operazioni

- $5\,\frac{kg}{m^3}+5\,\frac{g}{cm^3}=;$
- $4\,min+25\,s=;$
- $2\,\frac{g\cdot cm}{s}+72\,\frac{kg\cdot m}{h}=;$
- $2\,hg+300\,g=;$

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $5\,\frac{kg}{m^3}+5\,\frac{g}{cm^3}=5\,\frac{1000g}{(100\,cm)^3}+5\,\frac{g}{cm^3}=0,005\,\frac{g}{cm^3}+5\,\frac{g}{cm^3}=5,005\,\frac{g}{cm^3};$
- $2\,\frac{g\cdot cm}{s}+72\,\frac{kg\cdot m}{h}=2\,\frac{g\cdot cm}{s}+72\,\frac{1000\,g\cdot 100\,cm}{3600\,s}=2\,\frac{g\cdot cm}{s}+2000\,\frac{g\cdot cm}{s}=2002\,\frac{g\cdot cm}{s};$
- $4\,min+25\,s=4\cdot 60\,s+25\,s=240\,s+25,s=265\,s;$
- $2\,hg+300\,g=2\cdot 100\,g+300\,g=200\,g+300\,g=500\,g;$

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0026f$

Testo [I0026f] [1 2 1a]
Esegui le seguenti somme

- $10\,m+5\,km;$
- $5\,\frac{m}{s}+36\,\frac{km}{h};$
- $4\,h+25\,s;$
- $2\,m^2+300\,cm^2;$

Spiegazione Per eseguire le somme richieste è necessario convertire le unità di misura in modo che siano uguali.

Svolgimento

- $10\,m+5\,km=10\,m+5000\,m=5010\,m;$
- $5\,\frac{m}{s}+36\,\frac{km}{h}=5\,\frac{m}{s}+36\,\frac{1000\,m}{3600\,s}=15\,\frac{m}{s};$
- $4\,h+25\,s=4\cdot 3600\,s+25\,s=14425\,s;$
- $2\,m^2+300\,cm^2=2\cdot 100\,cm\cdot 100\,cm+300\,cm^2=20000\,cm^2+300\,cm^2=20300\,cm^2;$

Problema di: Introduzione alla fisica - $I0028$

Testo *[I0028]* [0 2 1a]
Esegui le seguenti operazioni con $a = 10\,\frac{m}{s^2}$, $m = 2\,kg$, $\Delta t = 4\,s$, $\mathcal{V}_i = 1\,\frac{m}{s}$, $\mathcal{V}_f = 4\,\frac{m}{s}$, calcolando la grandezza a sinistra dell'uguale.

- $\Delta S = \mathcal{V}_i \cdot \Delta t =$
- $a = \dfrac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} =$
- $\Delta S = \dfrac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t =$
- $E_{ci} = \dfrac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 =$

Spiegazione Questo esercizio serve unicamente per prendere dimestichezza sul modo corretto di eseguire dei calcoli con delle formule. Il punto importante è non omettere mai le unità di misura.

Svolgimento

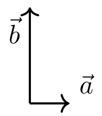
- $\Delta S = \mathcal{V}_i \cdot \Delta t = 1 \dfrac{m}{s} \cdot 4\,s = 4\,m$
- $a = \dfrac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} = \dfrac{\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i}{\Delta t} = \dfrac{4\,\frac{m}{s} - 1\,\frac{m}{s}}{4\,s} = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{m}{s^2}$
- $\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 + 1\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s = 80\,m + 4\,m = 84\,m$
- $E_{ci} = \frac{1}{2} m \mathcal{V}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,kg \cdot \left(1\,\frac{m}{s}\right)^2 = 1\,\dfrac{kg \cdot m^2}{s^2}$

Problema di: Introduzione alla fisica - vettori $I0029$

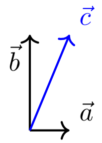
Testo *[I0029]* [2 4 1a]
Disegna due vettori lunghi $a = 5$ e $b = 12$, perpendicolari tra loro. Disegna e calcola la loro somma $\vec{c}$; disegna infine il vettore che annulla la loro somma. Ridisegna poi due vettori della stessa lunghezza di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, ma posizionati in modo che la loro somma risulti più lunga rispetto a $\vec{c}$.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente disegniamo due vettori e svolgiamo delle operazioni su di essi.

Svolgimento Il disegno dei due vettori è il seguente



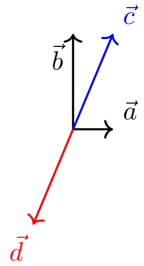
La loro somma la si disegna con il metodo del parallelogrammo



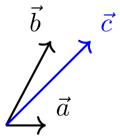
Essendo i due vettori posti perpendicolarmente, la loro somma la calcolo con il teorema di Pitagora

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$$

Il vettore che annulla la somma $\vec{a} + \vec{b}$ è il vettore opposto e uguale a $\vec{c}$ che disegno in rosso

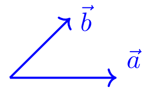


Per riposizionare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in modo che la somma risulti più lunga, è sufficiente ridurre il valore dell'angolo tra i due vettori, come mostrato nel seguente disegno.



Problema di: Introduzione alla fisica - vettori $I0030$

Testo *[I0030]* [3 3 1a]
Calcola il modulo della somma di un vettore $|\vec{a}| = 10$ e di un vettore $\left|\vec{b}\right| = 8$ posti ad un angolo $\alpha = 45°$ tra loro.



Spiegazione Per sommare i due vettori è necessario scomporre uno dei due sulle direzioni parallela e perpendicolare all'altro vettore.

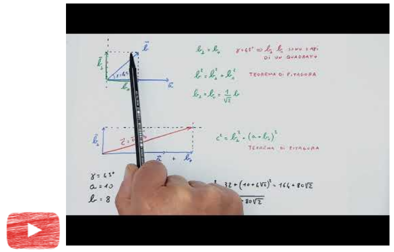
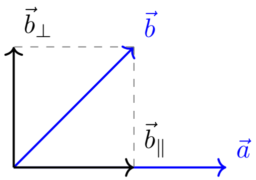


Fig. 3.3: *Guarda il video youtu.be/gXoXaDMpp54*

Svolgimento Prendiamo il vettore $\vec{b}$. Trovandosi a $\alpha = 45°$ rispetto all'altro, le due componenti cercate saranno uguali

$$b_{||} = b_{\perp}$$



Quindi

$$b^2 = b_{||}^2 + b_{\perp}^2 = 2b_{||}^2$$

$$b_{||} = 4\sqrt{2} = 5,66$$

Possiamo ora sommare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b_{\parallel}}$ e sommare il risultato con $\vec{b_{\perp}}$ per ottenere il vettore $\vec{c}$

$$c = \sqrt{b_{\perp}^2 + \left(a + b_{\parallel}\right)^2} = 16,65$$

Problema di: Introduzione alla fisica - vettori $I0030a$

Testo *[I0030a]* [3 3 1a]
Calcola il modulo della somma di un vettore $|\vec{a}| = 10$ e di un vettore $\left|\vec{b}\right| = 8$ posti ad un angolo $\alpha = 135°$ tra loro.

Spiegazione Per sommare i due vettori è necessario scomporre uno dei due sulle direzioni parallela e perpendicolare all'altro vettore.

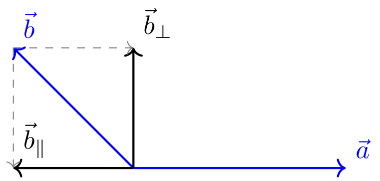
Svolgimento Prendiamo il vettore $\vec{b}$. Trovandosi a $\alpha = 135°$ rispetto all'altro, le due componenti cercate saranno uguali

$$b_{\parallel} = b_{\perp}$$

Quindi

$$b^2 = b_{\parallel}^2 + b_{\perp}^2 = 2b_{\parallel}^2$$

$$b_{\parallel} = 4\sqrt{2} = 5,66$$



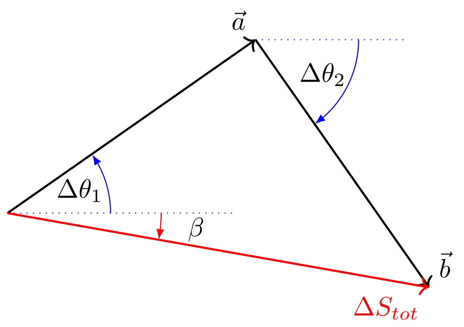
Possiamo ora sommare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b_{\parallel}}$ e sommare il risultato con $\vec{b_{\perp}}$ per ottenere il vettore $\vec{c}$

$$c = \sqrt{b_{\perp}^2 + \left(a - b_{\parallel}\right)^2} = 7,13$$

Problema di: Vettori - $I0031$

Testo *[I0031]* [3 1 2a]
Rispetto alla direzione est, una persona si sposta di $\Delta S = 12\,m$ ad un angolo $\Delta\theta_1 = +35°$ (cioè in senso antiorario nel disegno), e successivamente di altri $\Delta S_2 = 12\,m$ ad un angolo di $\Delta\theta_2 = -55°$ (cioè in senso orario nel disegno). Di quanto, e a quale angolo rispetto al nord, si è spostata in tutto la persona?

Spiegazione Disegnati i due vettori, notando che hanno la stessa lunghezza, si deve lavorare dal punto di vista geometrico. Il triangolo formato dai due vettori e dal vettore spostamento toale ha infatti precise caratteristiche.



Svolgimento

Il triangolo formato dai tre vettori è rettangolo e isoscele.

$$\Delta S_{tot} = \sqrt{(12\,)^2 + (12\,)^2} = 17\,m$$

GLi angoli alla base sono uguali e misurano $\alpha = 45°$ quindi rispetto all'est di riferimento lo spostamento totale è inclinato di

$$\beta = +35° - 45° = -10°$$

(cioè in senso orario nel disegno).

Problema di: Vettori - $I0032$

Testo *[I0032]* [2 2½ 1a]
Ad un vettore diagonale lungo $\vec{a} = 13$ è sommato un vettore orizzontale $\vec{b}$, in modo tale che il vettore somma sia un vettore verticale lungo $\vec{c} = 12$. Quanto vale il modulo di $\vec{b}$?

Spiegazione Per come è scritto il testo, il vettore $\vec{a}$ ha come sue componenti perpendicolari due vettori lunghi b e $c = 12$.

Svolgimento Dalle indicazioni del testo, si deve fare il disegno dei vettori in questione. Il vettore $\vec{a}$ ha come sue componenti perpendicolari due vettori lunghi b e $c = 12$. Infatti se

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

allora

$$\vec{a} = \vec{c} + \left(-\vec{b}\right)$$

Se ne deduce che

$$b = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

Problema di: Vettori - $I0033$

Testo *[I0033]* [1½ 2 1a]
Un tuo amico afferma che per calcolare il periodo di un pendolo di lunghezza L che oscilla sulla superficie terrestre dove l'accelerazione di gravità è g bisogna utilizzare la formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$. Come puoi dimostrare che il tuo amico sbaglia?

Spiegazione Condizione necessaria ma non sufficiente affinché una formula possa essere corretta è che l'analisi dimensionale sia corretta. L'unità di misura del termine a sinistra dell'uguale deve essere omogenea con l'unità di misura a destra dell'uguale.

Svolgimento Nella formula indicata dall'amico, l'unità di misura a sinistra dell'uguale è quella di un tempo $[T]$. A destra dell'uguale, invece, abbiamo la radice quadrata di un'accelerazione $\frac{[L]}{[T]^2}$ diviso una distanza $[L]$. Quindi

$$[T] \neq \sqrt{\frac{[L]}{[T]^2} \cdot \frac{1}{[L]}}$$

$$[T] \neq \frac{1}{[T]}$$

L'analisi dimensionale conferma che la formula non può essere corretta.

Problema di: Vettori - $I0034$

Testo *[I0034]* [1½ 1 1a]
Un'auto, che come tutti i corpi sulla Terra subisce l'accelerazione di gravità, si sta muovendo verso nord alla velocità $V = 50\,\frac{km}{h}$. Come sono tra loro le direzioni dei due vettori? Di quanti gradi deve ruotare la macchina per dirigersi in verso opposto? Quali dei due vettori ha modulo maggiore?

Spiegazione Un esercizio per il quale è necessario conoscere quali siano le caratteristiche di un vettore. cui

Svolgimento L'accelerazione di gravità è verticale e l'auto di muove in orizzontale. I due vettori sono quindi perpendicolari. Per invertire il verso della velocità l'auto deve ruotare di $180°$

I due vettori non sono tra loro omogenei, quindi non possono essere confrontati. Non ha significato la domanda su quale dei due vettori sia maggiore.

Problema di: Laboratorio - $Lab0001$

Testo *[Lab0001]* [2½ 5 1a]

Su Marte misuri cinque volte il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $L = 98,5\,cm \pm 0,5\,cm$, ottenendo i valori indicati in tabella. Calcola l'accelerazione di gravità di Marte.

T_1	$3,23\,s$	$3,22\,s$
$3,22\,s$	$3,23\,s$	$3,24\,s$

Spiegazione La fisica del pendolo ci dice che

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La misura di L e di T permette di calcolare g. Le incertezze di misura su L e su T si propagano di conseguenza sul risultato di g

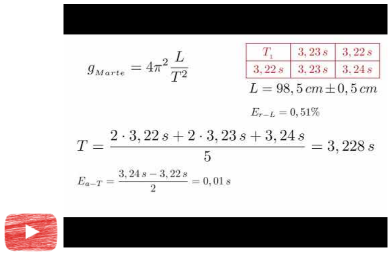


Fig. 3.4: *Guarda il video youtu.be/bLPug0YSvic*

Svolgimento Cominciamo con il calcolare il valore del periodo di oscillazione del pendolo con i relativi errori

$$T = \frac{2\cdot 3,22\,s + 2\cdot 3,23\,s + 3,24\,s}{5} = 3,228\,s$$

$$E_{a-T} = \frac{3,24\,s - 3,22\,s}{2} = 0,01\,s$$

Possiamo quindi scrivere

$$T = 3,228\,s \pm 0,010\,s$$

e calcolare l'errore relativo.

$$E_{r-T} = \frac{0,010\,s}{3,228\,s} = 0,0031$$

$$E_{r-T} = 0,31\%$$

Calcoliamo adesso l'errore di misura su L. Dal momento che

$$L = 98,5\,cm \pm 0,5\,cm$$

avremo che

$$E_{r-L} = \frac{0,005\,m}{0,985\,m} = 0,0051$$

$$E_{r-L} = 0,51\%$$

Calcoliamo adesso il valore di g ed il suo errore relativo

$$g_{Marte} = 4\pi^2\frac{L}{T^2} = 3,732\,\frac{m}{s^2}$$

Visto che le due misure sono state tra loro divise, avremo che

$$E_{r-g} = E_{r-L} + 2\cdot E_{r-T} = 0,0112$$

$$E_{r-g} = 1,12\%$$

e quindi

$$E_{a-g} = E_{r-g}\cdot g_{Marte} = 0,0113\cdot 3,732\,\frac{m}{s^2}$$

$$E_{a-g} = 0,042\,\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione di gravità su Marte misurata da te è quindi

$$g_{Marte} = 3,732\,\frac{m}{s^2} \pm 0,042\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0002$

Testo *[Lab0002]* [1 1 1a]
Hai misurato con un cronometro la durata dell'oscillazione di un pendolo ottenendo i seguenti risultati: $T_0 = 12,4\,s$, $T_1 = 12,3\,s$, $T_2 = 12,3\,s$, $T_3 = 12,6\,s$, $T_4 = 12,6\,s$, $T_5 = 12,2\,s$, $T_6 = 12,4\,s$. Calcola il periodo di oscillazione di quel pendolo indicando gli errori di misura assoluto e relativo.

Spiegazione Per misurare una grandezza fisica spesso è opportuno ripetere la misura molte volte per avere un'idea chiara non solo del valore della grandezza, ma soprattutto delle incertezze sperimentali sulla misuta effettuata.

Svolgimento Per prima cosa calcoliamo il valore medio delle misure ottenute:

$$T_{med} = \frac{T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{7} = 12,4\,s$$

L'incertezza sperimentale la si calcola ora scrivendo:

$$Err_{ass} = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = 0,2\,s$$

Il risultato della misura è quindi

$$T = 12,4\,s \pm 0,2\,s$$

Con un errore relativo

$$E_{rel} = \frac{0,2\,s}{12,4\,s} = 0,016 = 1,6\%$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0003$

Testo *[Lab0003]* [2½ 4 1a]
Per misurare la velocità di un'auto con un errore relativo $E_{r-V} = 2\%$, cronometriamo il tempo impiegato a percorrere la distanza $\Delta S = 20,0\,m \pm 0,1\,m$. Quale incertezza relativa deve avere il cronometro? Se l'auto viaggia a circa $V = 10\,\frac{m}{s}$, quale incertezza assoluta ha la misura?

Spiegazione Ogni misura ha sempre un certo livello di incertezza. La misura della velocità si ottiene dividendo la misura della distanza percorsa per il tempo trascorso: $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. L'errore relativo sulla velocità sarà la somma degli errori relativi sullo spostamento e sul tempo.

Svolgimento Considerando che $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ allora avremo

$$E_{r-V} = E_{r-\Delta S} + E_{r-\Delta t}$$

$$E_{r-\Delta t} = E_{r-V} - \frac{0,1\,m}{20,0\,m} = 1,5\%$$

L'incertezza del cronometro deve quindi essere al massimo

$$E_{a-\Delta t} = E_{r-\Delta t} \cdot \Delta t = E_{r-\Delta t} \cdot \frac{\Delta S}{V} = 1,5\% \cdot \frac{20\,m}{10\,\frac{m}{s}} = 0,03\,s$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0004$

Testo *[Lab0004]* [1 1 1a]
Su di una bilancia vengono messi tre oggetti la cui massa risulta: $m_1 = (54 \pm 1)\ kg$,$m_2 = (22,8 \pm 0,1)\ kg$ e $m_3 = (2,48 \pm 0,01)\ kg$. Scrivi la misura della massa complessiva di tali oggetti indicando l'errore di misura.

Spiegazione Quando si realizza una misura è sempre presente un errore di misura. Se non viene indicato si assume essere di un'unità sull'ultima cifra diversa da zero del valore misurato.

Svolgimento Scriviamo i tre valori di massa misurati e la loro somma:

$$\begin{cases} m_1 = 54\,kg \pm 1\,kg \\ m_2 = 22,8\,kg \pm 0,1\,kg \\ m_3 = 2,48\,kg \pm 0,01\,kg \end{cases} \Leftrightarrow m_{tot} = 79,28\,kg \pm 1,11\,kg$$

Visto il valore dell'errore, il modo più saggio di scriverlo è

$$m_{tot} = 79,3\,kg \pm 1,1\,kg$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0005$

Testo *[Lab0005]* [2 3 1a]
Un cilindro graduato contiene un volume $V_i = 250\,cm^3 \pm 1\,cm^3$ di acqua. Dopo averci immerso un oggetto di massa $m = 1,12\,kg \pm 0,01\,kg$, il cilindro segna un volume $V_f = 375\,cm^3 \pm 1\,cm^3$. Calcola volume e densità dell'oggetto con gli opportuni errori di misura.

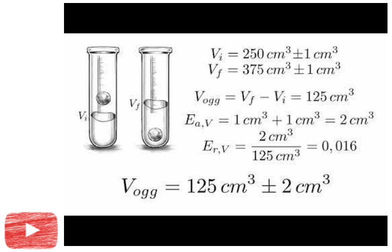


Fig. 3.5: *Guarda il video youtu.be/3e3aF8zQEgE*

Spiegazione Questo problema vogliamo misurare la densità di un oggetto tramite immersione in un liquido. Noi ne conosciamo la massa e ne misuriamo il volume. Nel cilindro graduato c'è un certo quantitativo di liquido; immergendo l'oggetto il livello del liquido sale. L'unica cosa da sapere è cosa sia la densità di un materiale, definita come il rapporto tra massa e volume di un qualunque oggetto fatto di quel materiale

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Visto che la densità di un oggetto dipende solo dal materiale di cui è fatto, è sufficiente confrontare le tabelle dei materiali per sapere il tipo di materiale.

Il volume dell'oggetto lo si ricava per differenza tra i livelli dei liquidi dopo e prima dell'immersione. La densità la calcoliamo con la formula

Svolgimento Il volume si ricava per differenza

$$V_{ogg} = V_f - V_i = 125\,cm^3$$

$$E_{a,V} = 1\,cm^3 + 1\,cm^3 = 2\,cm^3$$

$$E_{r,V} = \frac{2\,cm^3}{125\,cm^3} = 0,016$$

per cui

$$V_{ogg} = 125\,cm^3 \pm 2\,cm^3$$

La massa è

$$m = 1,12\,kg \pm 0,01\,kg$$

L'errore relativo sulla massa è

$$E_{r,m} = \frac{0,01\,kg}{1,12\,kg} = 0,009$$

La densità dell'oggetto vale

$$\rho_{ogg} = \frac{m}{V} = \frac{1,12\,kg}{125\,cm^3} = 0,00896\,\frac{kg}{cm^3}$$

$$\rho_{ogg} = 8,96\,\frac{g}{cm^3}$$

L'errore relativo sulla densità, essendo stata calcolata facendo la *divisione* di due grandezze, si calcola sommando gli errori relativi delle due grandezze.

$$E_{r,\rho} = E_{r,m} + E_{r,V} = 0,009 + 0,016 = 0,025$$

possiamo ora calcolare l'errore assoluto sulla densità

$$E_{a,\rho} = E_{r,\rho} \cdot \rho_{ogg} = 0,025 \cdot 8,96\,\frac{g}{cm^3} = 0,22\,\frac{g}{cm^3}$$

La misura della densità dell'oggetto sarà quindi

$$\rho_{ogg} = 8,96\,\frac{g}{cm^3} \pm 0,22\,\frac{g}{cm^3}$$

dove l'errore è stato opportunamente arrotondato.

Problema di: Misure di laboratorio - $Lab0006$

Testo [Lab0006] [1½ 1 1a]
L'altezza di due scatole una sull'altra è $h_{tot} = 54.7\,cm \pm 0,1\,cm$, e la prima è alta $h_1 = 24,3\,cm \pm 0,1\,cm$. Calcola l'altezza della seconda scatola con il suo errore di misura.

Spiegazione Il problema chiede di calcolare errore assoluto e relativo sulla differenza tra due grandezze

Svolgimento

$$h_{tot} = h_1 + h_2$$

$$h_2 = h_{tot} - h_1 = 30,4\,cm$$

$$Err_{ass} = 0,1\,cm + 0,1\,cm = 0,2\,cm$$

$$Err_{rel} = \frac{Err_{ass}}{h_2} = \frac{0,2\,cm}{30,4\,cm} = 0,0658$$

Problema di: Misure - $Lab0007$

Testo *[Lab0007]* [1 2 1a]
Misurate con un righello lo spessore di una moneta da 1 euro. Indica come ridurre l'errore a $0,1\,mm$ utilizzando lo stesso strumento.

Spiegazione Eseguire una misura è un procedimento non banale che deve essere fatto con attenzione. Non basta trovare un risultato, bisogna soprattutto saper stimare in modo adeguato gli errori di misura.

Svolgimento Per prima cosa utilizziamo una singola moneta. Sul righello vediamo indicati un po' più di 2 millimetri, quindi l'altezza vale

$$h = 2,5\,mm \pm 0,5\,mm$$

se adesso prendiamo una pila di 10 monete sul righello vediamo indicati un po' più di 23 millimetri.

$$h_{10} = 23,5\,mm \pm 0,5\,mm$$

$$h = 2,35\,mm \pm 0,05\,mm$$

Otteniamo quindi una precisione 10 volte maggiore.

Problema di: Laboratorio - $Lab0008$

Testo *[Lab0008]* [2 3 1a]
Hai misurato il diametro di base e l'altezza di un cilindro ottenendo $d = 20\,mm \pm 1\,mm$ e $h = 50\,mm \pm 1\,mm$. Calcolane il volume con la relativa incertezza. *[La formula per il volume è $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$]*

Spiegazione Per calcolare il volume del cilindro semplicemente dovete utilizzare la formula giusta. La parte complessa del lavoro è stabilire il valore dell'errore di misura sul volume. Per farlo prima dovremo evidenziare gli errori assoluti e relativi sulle singole misure prese con il righello.

Svolgimento Per prima cosa calcoliamo il volume del cilindro

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = 3,14159 \cdot 100\,mm^2 \cdot 50\,mm = 15708\,mm^3$$

Calcoliamo adesso l'errore relativo sulle due misure fatte col righello

$$E_{rel-d} = \frac{E_{a-d}}{d} = \frac{1\,mm}{20\,mm} = 0,05 = 5\,\%$$

$$E_{rel-h} = \frac{E_{a-h}}{h} = \frac{1\,mm}{50\,mm} = 0,02 = 2\,\%$$

Nella formula per calcolare il volume del cilindro si moltiplica il diametro per se stesso ed ancora per l'altezza

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d \cdot d}{2 \cdot 2}\right) \cdot h$$

quindi l'errore relativo sul volume sarà la somma degli errori relativi di queste grandezze

$$E_{rel-V} = E_{rel-d} + E_{rel-d} + E_{rel-h} = 0,12 = 12\%$$

quindi l'errore assoluto sul volume vale

$$E_a = E_{rel-V} \cdot V = 1885\,mm^3$$

Il risultato finale da scrivere sarà quindi

$$V = 15708\,mm^3 \pm 1885\,mm^3$$

che può essere più saggiamente scritto

$$V = 15,7\,cm^3 \pm 1,9\,cm^3$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0008a$

Testo [Lab0008a] [2 6 1a]
Hai misurato con un righello i tre spigoli di un parallelepipedo, ottenendo $a = 20\,mm \pm 1\,mm$, $b = 40\,mm \pm 1\,mm$, e $h = 10\,mm \pm 1\,mm$.Calcolane il volume con gli errori assoluto e relativo.

Spiegazione Per calcolare il volume del parallelepipedo semplicemente dovete utilizzare la formula giusta. La parte complessa del lavoro è stabilire il valore dell'errore di misura sul volume. Per farlo prima dovremo evidenziare gli errori assoluti e relativi sulle singole misure prese con il righello. Poi propagare l'errore sul valore del volume.

Svolgimento Per prima cosa calcoliamo il volume del parallelepipedo

$$V = a \cdot b \cdot h = 20\,mm \cdot 40\,mm \cdot 10\,mm = 8000\,mm^3$$

Calcoliamo adesso l'errore relativo sulle tre misure fatte col righello

$$E_{rel-a} = \frac{E_{a,a}}{a} = \frac{1\,mm}{20\,mm} = 0,05 = 5\,\%$$
$$E_{rel-b} = \frac{E_{a,b}}{b} = \frac{1\,mm}{40\,mm} = 0,025 = 2,5\,\%$$
$$E_{rel-h} = \frac{E_{a,h}}{h} = \frac{1\,mm}{10\,mm} = 0,1 = 10\,\%$$

Nella formula per calcolare il volume del parallelepipedo si moltiplicano le misure dei tre spigoli quindi l'errore relativo sul volume sarà la somma degli errori relativi di queste grandezze, e di conseguenza calcoliamo l'errore assoluto

$$E_{rel-_V} = E_{rel-a} + E_{rel-b} + E_{rel-h} = 0,0175 = 17,5\%$$

$$E_a = E_{rel-_V} \cdot V = 1400\,mm^3$$

Il risultato finale da scrivere sarà quindi

$$V = 8000\,mm^3 \pm 1400\,mm^3$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0008b$

Testo *[Lab0008b]* [2 7 1a]
Hai misurato con un righello la base e l'altezza di un rettangolo ottenendo $b = 10,0\,cm \pm 0,1\,cm$ e $h = 5,0\,cm \pm 0,1\,cm$. Calcola l'area ed il perimetro del rettangolo indicandone gli errori di misura.

Spiegazione Il calcolo dell'area e del perimetro è un conto banale; questo esercizio punta sulla corretta stima degli errori di misura su tali grandezze.

Svolgimento Cominciamo a calcolarci area e perimetro del rettangolo.

$$A = b \cdot h = 50\,cm^2$$

$$P = 2(b+h) = 30\,cm$$

Passiamo adesso alla stima degli errori di misura. Gli errori assoluti sulle due misure ci sono già stati dati dal testo del problema.

$$E_{a-base} = 0,1\,cm$$

$$E_{a-alt} = 0,1\,cm$$

Possiamo quindi calcolare gli errori relativi sulle misure della base e dell'altezza del rettangolo.

$$E_{r-base} = \frac{0,1\,cm}{10,0\,cm} = 0,01 = 1\%$$

$$E_{r-alt} = \frac{0,1\,cm}{5,0\,cm} = 0,02 = 2\%$$

Il calcolo dell'errore sul perimetro prevede che si sommino gli errori assoluti di base ed altezza, visto che per calcolare il perimetro si deve cominciare a calcolare la *somma* dei suoi lati. La somma dei due lati va poi moltiplicata per 2 per avere il valore del perimetro; per questo motivo moltiplico per 2 anche il valore dell'errore assoluto.

$$E_{a-perim} = 2 \cdot (0,1\,cm + 0,1\,cm) = 0,4\,cm$$

Il calcolo dell'errore sull'area prevede che si sommino gli errori relativi di base ed altezza, visto che per calcolare l'area si deve calcolare il *prodotto* dei suoi lati

$$E_{r-area} = 0,01 + 0,02 = 0,03$$

$$E_{a-area} = A \cdot 0,03 = 1,5\,cm^2$$

Problema di: Laboratorio - $Lab0009$

Testo *[Lab0009]* [1 4 1a]
Se stai misurando il periodo T di un pendolo utilizzando un cronometro (portata $P = 10\,h$; precisione $E = 0,01\,s$) azionato dalla tua mano, quanto vale l'errore di misura che fai sulla singola misurazione? Come puoi fare, facendo solo una misura, a migliorarne la precisione fino a $E_a = 0,02\,s$

Spiegazione La misura del periodo del pendolo è come tutte le misure affetta da errore. Essendo il cronometro azionato dalla mano, l'errore che si compie è legato ai riflessi del corpo umano. La scelta di un'opportuna tecnica di misura permette di ridurre l'errore che si compie.

Svolgimento Nel fare la misura del periodo del pendolo il cronometro viene azionato due volte, quindi l'errore assoluto sulla misura è pari ad doppio del tempo di reazione dei riflessi umani

$$E_a = 2 \cdot 0,1\,s = 0,2\,s$$

L'errore di misura dello strumento, essendo piccolo rispetto all'imprecisione dovuta ai riflessi umani, non viene tenuto in considerazione.

Per migliorare la misura, invece di misurare con il cronometro la durata di una oscillazione, possiamo misurare la durata di dieci oscillazioni. In questo modo avremo che

$$T_{10} = 10T \pm 0,2\,s$$

dividendo per 10 avremo la durata di una oscillazione

$$T_1 = \frac{10T}{10} \pm \frac{0,2\,s}{10} = T \pm 0,02$$

ottenendo così una stima della durata di una oscillazione.

Problema di: Misure - $Lab0010$

Testo *[Lab0010]* [1 1 1a]
Un libro di 500 pagine, misurato con un righello, è spesso $h = 3,5\,cm \pm 0,1\,cm$. Quanto è spessa ogni singola pagina? Calcola l'errore assoluto e relativo sulla misura della singola pagina.

Spiegazione La misura fatta con il righello ha una certa precisione. Dividendo per il numero di pagine, anche la relativa precisione cambia.

Svolgimento Lo spessore di una singola pagina risulta essere:

$$h_1 = \frac{h}{500} = 0,0070\,cm \pm 0,0002\,cm$$

L'errore relativo è:

$$E_r = \frac{E_a}{Mis} = \frac{0,0002}{0,0070} = 2,86\%$$

Problema di: Misure - $Lab0011$

Testo *[Lab0011]* [2 2 1a]
Vogliamo determinare la velocità media di un carrello che si trova nella posizione $S_i = 11,33\,m$ all'istante $t_i = 18\,s$, e si trova nella posizione $S_f = 12,53\,m$ all'istante $t_f = 33\,s$. Sapendo che misuriamo le posizioni con una precisione di $E_{as} = 1\,cm$ e i tempi con una precisione $E_{at} = 1\,s$, determina la velocità media del carrello con l'opportuno errore di misura.

Spiegazione Per calcolare l'errore sulla velocità è prima necessario calcolare gli errori sullo spostamento e sull'intervallo di tempo.

Svolgimento Lo spostamento fatto dal carrello è

$$\Delta S = S_f - S_i = 1,20\,m$$

L'errore assoluto sullo spostamento sarà la somma degli errori assoluti delle due posizioni

$$E_{a,\Delta S} = 1\,cm + 1\,cm = 2\,cm = 0,02\,m$$

L'errore relativo sullo spostamento sarà

$$E_{r,\Delta S} = \frac{0,02\,m}{1,20\,m} = \frac{1}{60}$$

L'intervallo di tempo tra le due misure è

$$\Delta t = t_f - t_i = 15\,s$$

L'errore assoluto su tale intervallo di tempo sarà la somma degli errori assoluti dei due orari

$$E_{a,\Delta t} = 1\,s + 1\,s = 2\,s$$

L'errore relativo sull'intervallo di tempo sarà

$$E_{r,\Delta t} = \frac{2\,s}{15\,s} = \frac{8}{60}$$

Il calcolo della velocità media sarà

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 0,08\,\frac{m}{s}$$

L'errore relativo sulla velocità è

$$E_{r,\mathcal{V}} = \frac{8}{60} + \frac{1}{60} = \frac{3}{20} = 15\%$$

L'errore assoluto sulla misura è

$$E_{a,\mathcal{V}} = \frac{3}{20} \cdot 0,08\,\frac{m}{s} = 0,012\,\frac{m}{s}$$

Il risultato finale è quindi

$$\mathcal{V}_m = 0,080\,\frac{m}{s} \pm 0,012\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Misure - $Lab0012$

Testo *[Lab0012]* [2½ 3 1a]
Vogliamo determinare la pressione che esercita un cubo di legno di densità $\rho = 0,8\,\frac{g}{cm^3} \pm 0,1\,\frac{g}{cm^3}$ di lato $h = 10,0\,cm \pm 0,1\,cm$ sul banco su cui è appoggiato. L'accelerazione di gravità della Terra è $g = 9,81\,\frac{m}{s^2} \pm 0,01\,\frac{m}{s^2}$

Spiegazione Per calcolare l'errore sulla pressione è prima necessario trovarsi la formula per calcolare la pressione e poi calcolarsi gli errori su tutti i termini della formula.

Svolgimento La pressione esercitata dal cubo è

$$P = \frac{mg}{h^2} = \frac{\rho V g}{h^2} = \rho h g = 784,8\,Pa$$

L'errore relativo sulla densità è $E_{r,\rho} = \frac{1}{8} = 0,125$ L'errore relativo sull'accelerazione di gravità è $E_{r,g} = \frac{0,01}{9,81} = 0,001$ L'errore relativo sul lato è $E_{r,\rho} = \frac{0,1}{10,0} = 0,01$

L'errore relativo sulla pressione è quindi

$$E_{r,P} = 0,136$$

L'errore assoluto sulla pressione è quindi

$$E_{a,P} = 0,136 \cdot 784,8\,Pa = 106,7$$

La pressione vale quindi

$$P = 7,8\,hPa \pm 1,1\,hPa$$

Cinematica: soluzioni Scheda 4

Problema di: Misure - $IC0001$

Testo *[IC0001]* [2★ 2⏳ 1a📖]
Un oggetto è fatto da due cubi di lato $L = 80\,mm$ di legni differenti, rispettivamente di densità $\rho_1 = 0,7\,\frac{g}{cm^3}$ e $\rho_2 = 0,5\,\frac{g}{cm^3}$. I due cubi sono attaccati per una delle facce. Indica su di un opportuno sistema di riferimento dove si trova il baricentro dell'oggetto.

Spiegazione Per determinare la posizione del baricentro di un oggetto è necessario fissare prima un sistema di riferimento e successivamente applicare la formuletta per il calcolo delle coordinate del baricentro.

Svolgimento Utilizziamo come sistema di riferimento un asse x la cui origine si trova nel punto medio tra i baricentri dei due cubi. Le coordinate dei baricentri dei due cubi risultano quindi essere $x_1 = -\frac{L}{2} = -4\,cm$ e $x_2 = +\frac{L}{2} = 4\,cm$

I volumi dei due cubi valgono

$$V = L^3 = 512\,cm^3$$

Le masse dei due cubi valgono

$$m_1 = \rho_1 \cdot V = 358,4\,g$$

$$m_2 = \rho_2 \cdot V = 256\,g$$

La posizione del baricentro risulta quindi essere

$$x_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{-409,6\,g \cdot cm}{614,4\,g} = -\frac{2}{3}\,cm \sim -0,67\,cm$$

Problema di: Posizione - $IC0010$

Testo *[IC0010]* [1½★ 1½⏳ 1a📖]
Tre cubi omogenei di lato $l = 10\,cm$ e di massa $m_1 = 9\,kg$, $m_2 = 5\,kg$, $m_3 = 2\,kg$, sono posti nell'ordine uno sopra all'altro. A quale altezza si trova il baricentro del sistema?

Spiegazione Il baricentro di un sistema di corpi è il centro delle masse del sistema. I tre cubi hanno stessa forma e volume, ma masse differenti in quanto fatti di materiali differenti. Il baricentro di ogni cubo si trova nel centro geometrico del cubo stesso, quindi per trovare il baricentro del sistema basta utilizzare l'opportuna formuletta.

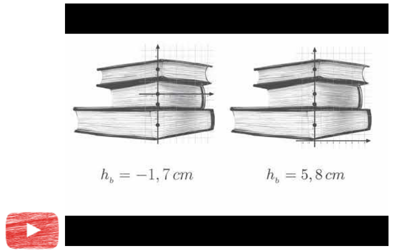


Fig. 4.1: *Guarda il video youtu.be/IJHMqtdsfCE*

Svolgimento Le altezze dei baricentri dei singoli cubi sono

$$y_1 = 5\,cm$$

$$y_2 = 15\,cm$$

$$y_3 = 25\,cm$$

Il baricentro del sistema si trova all'altezza

$$y_b = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{45\,kg\,cm + 75\,kg\,cm + 50\,kg\,cm}{16\,kg} = 10,625\,cm$$

Problema di: Baricentro - $IC0010a$

Testo *[IC0010a]* [1½ 1½ 1a]
Tre libri sono posizionati uno sull'altro. I libri hanno rispettivamente massa $m_1 = 1\,hg$, $m_2 = 2\,hg$, $m_3 = 3\,hg$ ed hanno tutti lo stesso spessore $S = 3\,cm$. A che altezza si trova il baricentro del sistema?

Spiegazione In questo problema abbiamo un sistema formato da tre oggetti distinti posti uno sull'altro. Il baricentro del sistema sarà la media pesata sulla massa, delle posizioni dei baricentri dei singoli oggetti.

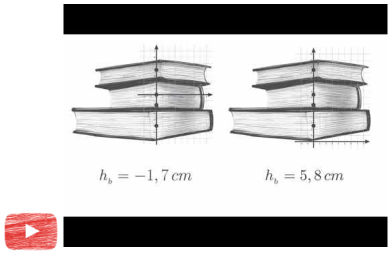


Fig. 4.2: *Guarda il video youtu.be/IJHMqtdsfCE*

Svolgimento La posizione dei baricentri dei singoli oggetti è:

$$h_1 = 1,5\,cm$$

$$h_2 = 4,5\,cm$$

$$h_3 = 7,5\,cm$$

Quindi l'altezza da terra del baricentro del sistema sarà

$$h_b = \frac{h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$h_b = \frac{1,5\,hg \cdot cm + 9\,hg \cdot cm + 22,5\,hg \cdot cm}{6\,hg} = 5,5\,cm$$

Problema di: Baricentro - $IC0010b$

Testo *[IC0010b]* [1½ 1½ 1a]
Tre libri sono posizionati uno sull'altro. I libri hanno rispettivamente massa $m_1 = 5\,hg$, $m_2 = 3\,hg$, $m_3 = 2\,hg$. I primi due libri hanno lo stesso spessore $S_1 = 5\,cm$ e $S_2 = 5\,cm$, mentre l'ultimo ha uno spessore $S_3 = 3\,cm$. A che altezza si trova il baricentro del sistema?

Spiegazione In questo problema abbiamo un sistema formato da tre oggetti distinti posti uno sull'altro. Il baricentro del sistema sarà la media pesata sulla massa, delle posizioni dei baricentri dei singoli oggetti.

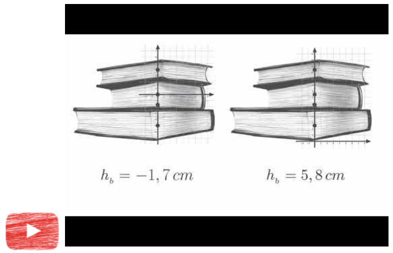


Fig. 4.3: *Guarda il video youtu.be/IJHMqtdsfCE*

Svolgimento Dal momento che il problema chiede l'altezza del baricentro dal luogo dove sono appoggiati i libri, scegliamo di mettere il sistema di riferimento sul lato inferiore del primo libro.

La posizione dei baricentri dei singoli oggetti è:

$$h_1 = 2,5\,cm$$

$$h_2 = 7,5\,cm$$

$$h_3 = 11,5\,cm$$

Quindi l'altezza da terra del baricentro del sistema sarà

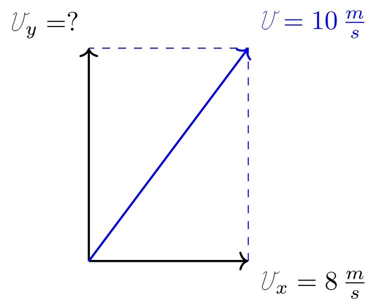
$$h_b = \frac{h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$h_b = \frac{12,5\,hg \cdot cm + 22,5\,hg \cdot cm + 23\,hg \cdot cm}{10\,hg} = 5,8\,cm$$

Problema di: Vettori - $IC0018$

Testo *[IC0018]* [1 1 1a]
Una barca attraversa un fiume muovendosi in diagonale con velocità $U = 10\,\frac{m}{s}$. La barca si muove contemporaneamente lungo la direzione della corrente con velocità $U_x = 8\,\frac{m}{s}$ e lungo la direzione tra le due sponde. Con quale velocità si sta avvicinando alla sponda opposta? Disegna tale vettore.

Spiegazione La barca si muove in diagonale tra una sponda e l'altra. Il suo movimento può quindi essere scomposto nella somma di due movimenti: il primo lungo la direzione del fiume, ed il secondo nella direzione tra una sponda e l'altra.



Svolgimento Le due componenti del vettore $\vec{U}$ sono tra loro perpendicolari, quindi possiamo utilizzare il teorema di Pitagora

$$U_y = \sqrt{U^2 - U_x^2} = \sqrt{100\,\frac{m^2}{s^2} - 64\,\frac{m^2}{s^2}} = 6\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0015ban$

Testo *[C0015ban]* [0 9 1a]
Esercizi banali di Cinematica:

1. Moto rettilineo uniforme

   (a) Quanto spazio percorre in un tempo $\Delta t = 70\,s$ un oggetto che si muove con velocità costante $V = 80\,\frac{m}{s}$? *[$\Delta S = 5600\,m$]*

   (b) Quanto spazio percorre in un tempo $\Delta t = 70\,s$ un oggetto che si muove con velocità costante $V = 80\,\frac{Km}{h}$? *[$\Delta S = 1555,6\,m$]*

   (c) Quanto tempo impiega un pallone da calcio ad arrivare in porta se calciato ad una velocità $V = 25\,\frac{m}{s}$ da una distanza $\Delta S = 30\,m$? *Ipotizziamo che il pallone viaggi sempre alla stessa velocità lungo il suo tragitto.* *[$\Delta t = 1,2\,s$]*

2. Moto uniformemente accelerato

   (a) Quanto spazio percorre in un tempo di $\Delta t = 5\,s$ un oggetto che si muove con un'accelerazione costante $a = 2\,\frac{m}{s^2}$ e che parte con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 5\,\frac{m}{s}$ nella stessa direzione e nello stesso verso dell'accelerazione? *[$\Delta S = 50\,m$]*

   (b) Un oggetto viene fatto cadere dal tetto di una casa partendo da fermo. Se arriva a terra dopo un tempo $\Delta t = 3\,s$, quanto è alta la casa? *[$h = 44,1\,m$]*

   (c) Un oggetto viene fatto cadere dentro un pozzo partendo da fermo. Se arriva al fondo del pozzo dopo un tempo $\Delta t = 4\,s$, quanto è profondo il pozzo? *[$h = 78,4\,m$]*

3. Moto circolare uniforme

   (a) Un oggetto ruota con una frequenza $\nu = 4\,Hz$ lungo un percorso circolare di raggio $r = 2\,m$. Quale accelerazione centripeta subisce? *[$a_c = 1263,3\,\frac{m}{s^2}$]*

   (b) Un oggetto si muove di moto circolare uniforme con velocità $V = 50\,\frac{m}{s}$ lungo un percorso circolare di raggio $r = 2\,m$. Con quale velocità angolare ω si sta muovendo? Quanto tempo impiega a fare un giro? *[$\omega = 25\,\frac{rad}{s}$; $\Delta t = 0,25\,s$]*

   (c) Un pilota di Formula1 subisce in curva accelerazioni laterali di circa 4g. Se sta facendo curve ad una velocità $V = 150\,\frac{Km}{h}$, quanto vale il raggio della curva? *[$r = 44,3\,m$]*

Spiegazione In questo esercizio ho raccolto tutte quelle domande *banali* che possono essere fatte su questo argomento. Per *banale* si intende un problema nel quale la domanda consiste semplicemente nel fornire dei dati da inserire in una formula. Non è quindi richiesta alcuna particolare capacità di ragionamento, ne particolari doti matematiche. Questo esercizio serve unicamente ad aquisire dimestichezza con l'esecuzione dei conti numerici con le unità di misura.

Svolgimento

1. Moto rettilineo uniforme

   (a)
   $$\Delta S = V \cdot \Delta t = 80\,\frac{m}{s} \cdot 70\,s = 5600\,m$$

   (b)
   $$\Delta S = V \cdot \Delta t = 80\,\frac{km}{h} \cdot 70\,s = 80\,\frac{1000\,m}{3600\,s} \cdot 70\,s = 1555,6\,m$$

   (c) Usando la formula inversa
   $$\Delta t = \frac{\Delta S}{\mathcal{V}} = \frac{30\,m}{25\,\frac{m}{s}} = 1,2\,s$$

2. Moto uniformemente accelerato

   (a)
   $$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 + 5\,\frac{m}{s} \cdot 5\,s = 50\,m$$

   (b)
   $$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 9\,s^2 + 0\,\frac{m}{s} \cdot 3\,s = 44,1\,m$$

(c)
$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t = \frac{1}{2}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 16\,s^2 + 0\,\frac{m}{s}\cdot 4\,s = 78,4\,m$$

3. Moto circolare uniforme

(a)
$$a_c = 4\pi^2\nu^2 r = 4\cdot(3,14)^2\cdot 16\,Hz^2\cdot 2\,m = 1263,3\,\frac{m}{s^2}$$

(b)
$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{50\,\frac{m}{s}}{2\,m} = 25\,\frac{rad}{s}$$
$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 2\,m}{50\,\frac{m}{s}} = 0,25\,s$$

(c)
$$r = \frac{V^2}{a_c} = \frac{\left(\frac{150}{3,6}\cdot\frac{m}{s}\right)^2}{4\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 44,3\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0001$

Testo *[C0001]* [2 2 1a]
Un'automobile viaggia alla velocità costante $V_1 = 120\,\frac{km}{h}$ per un tempo $\Delta t_1 = 2\,h$; successivamente si ferma per un tempo $\Delta t = 1\,h$, ed infine riparte viaggiando alla velocità costante $V_2 = 90\,\frac{km}{h}$ per un tempo $\Delta t_2 = 4\,h$. A quale velocità media ha viaggiato l'automobile?

Spiegazione Il percorso del ciclista è suddiviso in due fasi, in ognuna delle quali si muove di moto rettilineo uniforme. Indipendentemente da questo, per il calcolo della velocità media serve conoscere lo spazio complessivamente percorso dall'auto, ed il tempo totale da essa impiegato a percorrerlo.

Svolgimento La lunghezza del primo tratto vale
$$\Delta S_1 = V_1\cdot\Delta t_1 = 240\,km$$
La lunghezza del secondo tratto vale
$$\Delta S_2 = V_2\cdot\Delta t_2 = 360\,km$$
La velocità media tenuta dall'automobile sul percorso complessivo vale:
$$V_{media} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2} = \frac{240\,km + 360\,km}{2\,h + 1\,h + 4\,h} = 85,71\,\frac{km}{h}$$
Questo calcolo tiene anche conto del fatto che la macchina è stata ferma per un certo periodo di tempo.

Esercizi concettualmente identici

1. Una persona percorre un tratto di strada lungo $\Delta S_1 = 50\,metri$ in un tempo $\Delta t_1 = 20\,secondi$; successivamente percorre un secondo tratto lungo $\Delta S_2 = 30\,metri$ in un tempo $\Delta t_2 = 15\,secondi$. Quale velocità media ha tenuto nel primo tratto? Quale nel secondo tratto? Quale su tutto il percorso? [$V_{m1} = 2.5\,\frac{m}{s}$; $V_{m2} = 2\,\frac{m}{s}$; $V_{mt} = 2.286\,\frac{m}{s}$]

2. Un ciclista affronta una salita lunga $\Delta S_1 = 10\,km$ in un tempo $\Delta t_1 = 2\,h$ e la successiva discesa lunga $\Delta S_2 = 30\,km$ in un tempo $\Delta t_1 = 0.5\,h$. Quale velocità media ha tenuto in salita? Quale in discesa? Quale sull'intero percorso?
[$\mathcal{V}_{ms} = 5\,\frac{km}{h}$; $\mathcal{V}_{md} = 60\,\frac{km}{h}$; $\mathcal{V}_{mt} = 16\,\frac{km}{h}$]

Problema di: Cinematica - $C0001a$

Testo *[C0001a]* [1 1 1a]
Una persona percorre un tragitto $\Delta S_a = 100\,m$ in un tempo $\Delta t_a = 20\,s$; poi si ferma per un tempo $\Delta t_b = 10\,s$ e infine percorre un tragitto $\Delta S_c = 50\,m$ in un tempo $\Delta t_c = 25\,s$. Calcola la velocità media tenuta nei tratti ΔS_a e ΔS_c. Calcola la velocità media complessiva.

Spiegazione In questo problema non è possibile specificare in quale tipo di moto stia viaggiando la persona; è però possibile calcolare la velocità media tenuta dalla persona in un certo tratto. Attenzione a non fare il classico errore di confondere la velocità media con la media delle velocità.

Svolgimento Nel primo tratto la velocità media vale

$$\mathcal{V}_{m-a} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{100\,m}{20\,s} = 5\,\frac{m}{s}$$

Nel secondo tratto la velocità media vale

$$\mathcal{V}_{m-c} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{50\,m}{25\,s} = 2\,\frac{m}{s}$$

Complessivamente, contando quindi anche la pausa tenuta dalla persona tra i due tragitti, avremo che

$$\mathcal{V}_{m-abc} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{100\,m + 50\,m}{20\,s + 10\,s + 25\,s} = 2,73\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0002$

Testo *[C0002]* [2 2 2a]
Un'automobile viaggia alla velocità costante $\mathcal{V}_1 = 120\,\frac{km}{h}$ e deve superare un camion che viaggia alla velocità costante $\mathcal{V}_2 = 90\,\frac{km}{h}$. Sapendo che il camion è lungo $l_2 = 11\,m$ e che la macchina è lunga $l_1 = 4\,m$, quanto tempo dura il sorpasso? *[disegna la posizione dell'auto all'inizio e alla fine del sorpasso]*

Spiegazione Viaggiando sia l'automobile che il camion a velocità costante l'unica equazione che ci serve è quella del moto rettilineo uniforme. Per eseguire il sorpasso, la macchina deve percorrere un tratto di strada pari alla somma tra la lunghezza della macchina e del camion; la macchina avrà, rispetto al camion, una velocità relativa pari alla differenza tra la veocità dell'auto e quella del camion.

Svolgimento dalla legge del moto rettilineo uniforme avremo

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{\mathcal{V}_{rel}} = \frac{l_1 + l_2}{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2} = \frac{15\,m}{30\,\frac{km}{h}} = \frac{15\,m}{30\,\frac{1000\,m}{3600\,s}} = 1,8\,secondi$$

Problema di: Cinematica - $C0004$

Testo *[C0004]* [3 3 1a]
Una automobile, partendo da ferma, percorre un tratto di strada ΔS_1 muovendosi per un tempo $\Delta t_1 = 10\,s$ con un'accelerazione $a = 1,2\,\frac{m}{s^2}$. Successivamente percorre un tratto di strada ΔS_2 con velocità costante per un tempo $\Delta t_2 = 30\,s$. Quanto è lungo il tratto di strada complessivamente percorso dalla macchina? A quale velocità media ha viaggiato la macchina?

Spiegazione L'automobile si muove inizialmente di moto uniformemente accelerato partendo da ferma fino ad una certa velocità alla fine del primo tratto. Poi mantiene tale velocità costante nel secondo tratto di strada (moto rettilineo uniforme). La lunghezza del tratto di strada complessivamente percorso è pari alla somma delle lunghezze dei due tratti percorsi.

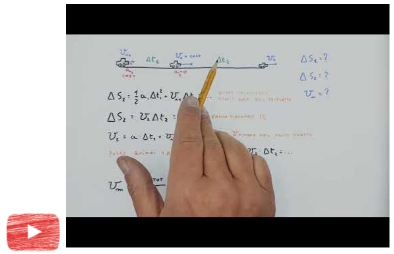


Fig. 4.4: *Guarda il video youtu.be/Xr0IPGKAEes*

Svolgimento Con le equazioni del moto uniformemente accelerato possiamo calcolare quanto è lungo il primo tratto di strada e quale velocità raggiunge l'automobile.

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + \mathcal{V}_i \Delta t_1$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,2\,\frac{m}{s^2} \cdot 100\,s^2 + 0\,m = 60\,m$$

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i + \Delta \mathcal{V} = \mathcal{V}_i + a \cdot \Delta t_1$$

$$\mathcal{V}_f = 0\,\frac{m}{s} + 1,2\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = 12\,\frac{m}{s}$$

Raggiunta questa velocità, l'auto si muove con velocità costante e quindi di moto rettilineo uniforme:

$$\Delta S_2 = \mathcal{V}_f \cdot \Delta t_2 = 12\,\frac{m}{s}\cdot 30\,s = 360\,m$$

Il tratto di strada complessivamente percorso sarà dato dalla somma dei due tratti di strada, e la velocità media tenuta sarà:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 420\,m$$

$$\mathcal{V}_{media} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{420\,m}{40\,s}$$

$$\mathcal{V}_{media} = 10,5\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0004a$

Testo *[C0004a]* [3 3 1a]
Un'auto parte con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 1\,\frac{m}{s}$ e percorre un tratto di strada ΔS_1 in un tempo $\Delta t_1 = 10\,s$ con accelerazione $a = 1,2\,\frac{m}{s^2}$ nel verso nel moto. Percorre poi un tratto di strada ΔS_2 con velocità costante in un tempo $\Delta t_2 = 30\,s$. Quanta strada ha percorso l'auto nel primo e nel secondo tratto? A quale velocità media ha viaggiato?

Spiegazione L'automobile si muove inizialmente di moto uniformemente accelerato partendo con una certa velocità iniziale, fino ad una certa velocità alla fine del primo tratto. Poi mantiene tale velocità costante nel secondo tratto di strada (moto rettilineo uniforme). La lunghezza del tratto di strada complessivamente percorso è pari alla somma delle lunghezze dei due tratti percorsi.

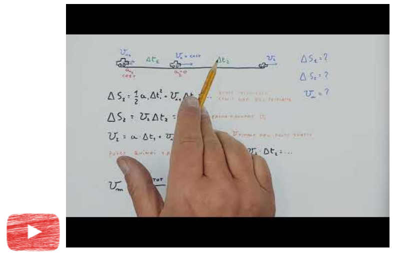


Fig. 4.5: *Guarda il video youtu.be/Xr0IPGKAEes*

Svolgimento Con le equazioni del moto uniformemente accelerato possiamo calcolare quanto è lungo il primo tratto di strada e quale velocità raggiunge l'automobile.

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2}a\Delta t_1^2 + \mathcal{V}_i\Delta t_1$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1,2\,\frac{m}{s^2}\cdot 100\,s^2 + 10\,m = 70\,m$$

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i + \Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_i + a\cdot\Delta t_1$$

$$V_f = 1\,\frac{m}{s} + 1,2\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = 13\,\frac{m}{s}$$

Raggiunta questa velocità, l'auto si muove con velocità costante e quindi di moto rettilineo uniforme:

$$\Delta S_2 = V_f \cdot \Delta t_2 = 13\,\frac{m}{s}\cdot 30\,s = 390\,m$$

Il tratto di strada complessivamente percorso sarà dato dalla somma dei due tratti di strada, e la velocità media tenuta sarà:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 460\,m$$

$$V_{media} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{460\,m}{40\,s}$$

$$V_{media} = 11,5\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0004b$

Testo *[C0004b]* [3 3 1a]
Un'auto parte con velocità iniziale $V_i = 20\,\frac{m}{s}$ e percorre un tratto di strada ΔS_1 in un tempo $\Delta t_1 = 10\,s$ con accelerazione $a = 1,2\,\frac{m}{s^2}$ opposta al verso nel moto. Percorre poi un tratto di strada ΔS_2 con velocità costante per un tempo $\Delta t_2 = 30\,s$. Quanta strada ha complessivamente percorso l'auto? A quale velocità media ha viaggiato?

Spiegazione L'automobile si muove inizialmente di moto uniformemente accelerato partendo con una certa velocità iniziale, fino ad una certa velocità alla fine del primo tratto. Essendo l'accelerazione opposta alla velocità iniziale, la macchina sta frenando. Poi mantiene tale velocità costante nel secondo tratto di strada (moto rettilineo uniforme). La lunghezza del tratto di strada complessivamente percorso è pari alla somma delle lunghezze dei due tratti percorsi.

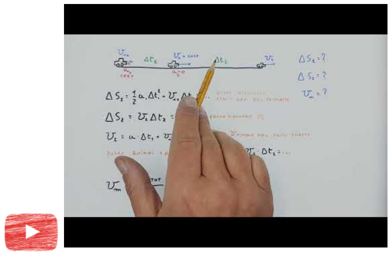


Fig. 4.6: *Guarda il video youtu.be/Xr0IPGKAEes*

Svolgimento Con le equazioni del moto uniformemente accelerato possiamo calcolare quanto è lungo il primo tratto di strada e quale velocità raggiunge l'automobile.

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + V_i \Delta t_1$$

$$\Delta S_1 = -\frac{1}{2}\cdot 1,2\,\frac{m}{s^2}\cdot 100\,s^2 + 200\,m = 140\,m$$

$$V_f = V_i + \Delta V = V_i + a\cdot\Delta t_1$$

$$V_f = 20\,\frac{m}{s} - 1,2\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = 8\,\frac{m}{s}$$

Raggiunta questa velocità, l'auto si muove con velocità costante e quindi di moto rettilineo uniforme:

$$\Delta S_2 = V_f \cdot \Delta t_2 = 8\,\frac{m}{s^2}\cdot 30\,s = 240\,m$$

Il tratto di strada complessivamente percorso sarà dato dalla somma dei due tratti di strada, e la velocità media tenuta sarà:

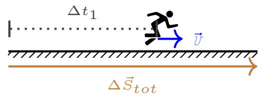
$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 380\,m$$

$$V_{media} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{380\,m}{40\,s}$$

$$V_{media} = 9,5\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0005$

Testo *[C0005]* [1 1 1a]



Un atleta sta correndo una gara sulla distanza $\Delta S_{tot} = 10000\,m$ viaggiando a velocità costante $V = 5\,\frac{m}{s}$ Se ha già corso per un tempo $\Delta t_1 = 8\,min$ quanti metri gli mancano al traguardo?

Spiegazione L'atleta si sta muovendo di moto rettilineo uniforme in quanto la sua velocità è costante. Calcolandoci quanti metri ha già percorso, per differenza possiamo trovare quanti metri mancano al traguardo

Svolgimento Prima di tutto convertiamo il tempo di gara in secondi

$$\Delta t_1 = 8\,min = 480\,s$$

Lo spazio già percorso dall'atleta è

$$\Delta S_1 = V \cdot \Delta t_1 = 5\,\frac{m}{s}\cdot 480\,s = 2400\,m$$

La distanza ancora da percorrere è

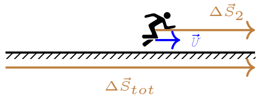
$$\Delta S_2 = \Delta S_{tot} - \Delta S_1 = 10000\,m - 2400\,m = 7600\,m$$

Esercizi concettualmente identici

1. Ipotizziamo che un centometrista corra i $100\,m$ della sua gara ad una velocità costante $V = 9.9\,\frac{m}{s}$; quanto dista dal traguardo dopo un tempo $\Delta t = 3\,s$ dalla partenza? [$\Delta S_r = 70,3\,m$]

Problema di: Cinematica - $C0005a$

Testo *[C0005a]* [1 1 1a]



Un atleta corre una gara lunga $\Delta S_{tot} = 10000\,m$ alla velocità $V = 4\,\frac{m}{s}$. Sapendo che al traguardo manca $\Delta S_2 = 4000\,m$, da quanto tempo la gara è iniziata?

Spiegazione L'atleta si sta muovendo di moto rettilineo uniforme in quanto la sua velocità è costante. Calcolandoci quanti metri ha già percorso, e successivamente quanto tempo è stato impiegato a percorrerli.

Svolgimento La distanza già percorsa è

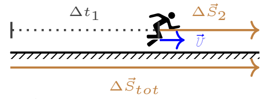
$$D = \Delta S_{tot} - \Delta S_2 = 10000\,m - 4000\,m = 6000\,m$$

Essa è stata percorsa in un tempo

$$\Delta t = \frac{D}{V} = 1500\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0005b$

Testo *[C0005b]* [1 1 1a]



Un atleta corre una gara alla velocità costante $V = 4\frac{m}{s}$. Sapendo che al traguardo manca $\Delta S_2 = 3800\,m$, e che la gara è iniziata da $\Delta t = 5\,min$, quanti metri è lunga tutta la gara?

Spiegazione Nel testo del problema viene specificato che l'atleta si muove con velocità costante, e quindi di moto rettilineo uniforme. Sapendo da quanto tempo è iniziata la gara e sapendo la velocità dell'atleta ci si può calcolare la distanza già percorsa. Sapendo poi la distanza rimanente, possiamo calcolare la lunghezza totale della gara.

Svolgimento La distanza già percorsa dall'atleta è

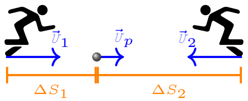
$$\Delta S_1 = V \cdot \Delta t = 4\,\frac{m}{s} \cdot 5\,min = 4\,\frac{m}{s} \cdot 300\,s = 1200\,m$$

La lunghezza totale della gara è quindi

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1200\,m + 3800\,m = 5000\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0006$

Testo *[C0006]* [2★ 2⌛ 1a📖]



In una partita di calcio un attaccante si dirige verso il difensore avversario con velocità $V_1 = 6\,\frac{m}{s}$; il pallone è tra i due giocatori e si muove verso il difensore con velocità $V_p = 2\,\frac{m}{s}$; il difensore si muove verso il pallone con velocità $V_2 = 5\,\frac{m}{s}$. L'attaccante dista dal pallone $\Delta S_1 = 4\,m$; il pallone dista dal difensore $\Delta S_2 = 8\,m$. Chi arriva prima sul pallone?

Spiegazione In questo esercizio ci sono due giocatori che si muovono verso un oggetto anch'esso in movimento. Ognuno dei due giocatori si avvicina al pallone con una velocità data dalla composizione delle velocità del giocatore e del pallone. Per stabilire chi arriva prima sul pallone bisogna stabilire chi impiega meno tempo a raggiungerlo.

Svolgimento Il pallone si muove allontanandosi dall'attaccante, quindi la velocità con cui l'attaccante **si avvicina** al pallone è minore della velocità con cui l'attaccante si muove rispetto al terreno.

La velocità con cui l'attaccante **si avvicina** al pallone vale

$$V_{1p} = V_1 - V_p = 4\,\frac{m}{s}$$

Il pallone si muove invece verso il difensore avvicinandosi ad esso. La velocità con cui il difensore ed il pallone **si avvicinano** è quindi maggiore della velocità con cui il difensore si muove rispetto al terreno.

La velocità con cui il difensore **si avvicina** al pallone vale

$$V_{2p} = V_2 + V_p = 7\,\frac{m}{s}$$

Il tempo impiegato dall'attaccante a raggiungere il pallone vale

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_{1p}} = \frac{4\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 1\,s$$

Il tempo che impiegherebbe il difensore a raggiungere il pallone vale

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_{2p}} = \frac{8\,m}{7\,\frac{m}{s}} = 1,14\,s$$

Per questo motivo l'attaccante arriva prima.

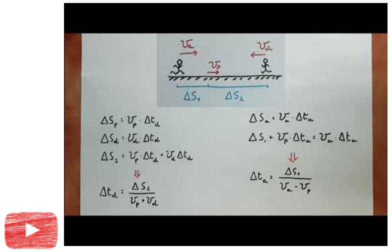


Fig. 4.7: *Guarda il video youtu.be/Q0THC2G7r4o*

Esercizi concettualmente identici

1. Due ciclisti si stanno dirigendo verso il traguardo della corsa. Il ciclista in testa viaggia ad una velocità $V_1 = 65\,\frac{km}{h}$, quello che lo segue viaggia ad una velocità $V_2 = 70\,\frac{km}{h}$. Con quale velocità l'inseguitore si sta avvicinando al ciclista davanti a lui? *[$V_{rel} = 5\,\frac{km}{h}$]*

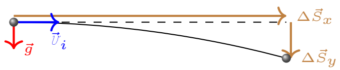
2. In un incidente stradale due auto si scontrano frontalmente. Entrambe viaggiavano ad una velocità $V = 45\,\frac{km}{h}$. A quale velocità relativa è avvenuto lo scontro? *[$V_{rel} = 90\,\frac{km}{h}$]*

3. In un incidente stradale due auto si tamponano. L'auto che viene tamponata viaggiava ad una velocità $V = 45\,\frac{km}{h}$, l'altra viaggiava ad una velocità $V = 65\,\frac{km}{h}$. A quale velocità relativa è avvenuto lo scontro? *[$V_{rel} = 20\,\frac{km}{h}$]*

4. Un treno che viaggia alla velocità $V = 30\,\frac{km}{h}$ passa in stazione senza fermarsi. Sul treno un passeggero sta camminando alla velocità $V = 30\,\frac{km}{h}$ nello stesso verso in cui si muove il treno. Le persone in stazione, guardando il passeggero attraverso i vetri, a quale velocità lo vedono muoversi? *[$V_{rel} = 60\,\frac{km}{h}$]*

Problema di: Cinematica - $C0008$

Testo *[C0008]* [2 2 1a]



Un fucile spara in orizzontale un proiettile con velocità iniziale $V_{ix} = 800\,\frac{m}{s}$ contro un bersaglio distante $\Delta S_x = 160\,m$. Di quanti centimetri sotto la linea di tiro verrà colpito il bersaglio?

Spiegazione Un proiettile in volo si muove di moto parabolico, cioè di moto rettilineo uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale. Mentre il proiettile si muove in avanti, contemporaneamente cade verso il basso.

Svolgimento Nello svolgimento di questo problema, indicheremo con una x a pedice tutte le grandezze fisiche che hanno a che fare con il movimento in orizzontale, ed indicheremo con una y a pedice tutte le grandezze che hanno a che fare con il movimento in verticale.

Il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme in orizzontale

$$\Delta S_x = V_{ix}\Delta t$$

dove con Δt si intende il tempo di volo del proiettile dal fucile al bersaglio

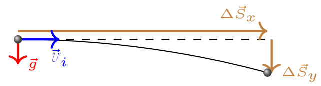
$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{V_{ix}} = \frac{160\,m}{800\,\frac{m}{s}} = 0,2\,s$$

Dobbiamo chiederci adesso di quanto cade un oggetto in quell'intervallo di tempo. Ricordiamoci che il proiettile veniva sparato *orizzontalmente* e quindi la componente verticale della veocità del proiettile vale zero.

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}g\Delta t^2 + V_{iy}\Delta t = \frac{1}{2}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 0,04\,s^2 = 0,196\,m = 19,6\,cm$$

Problema di: Cinematica - $C0008a$

Testo *[C0008a]* [2 2 1a]



Un fucile spara un proiettile orizzontalmente con velocità $V_{ix} = 800\,\frac{m}{s}$; il bersaglio viene colpito $\Delta S_y = 19,6\,cm$ sotto la linea di tiro. Quanto si trova distante il bersaglio?

Spiegazione Un proiettile in volo si muove di moto parabolico, cioè di moto rettilineo uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale. Mentre il proiettile si muove in avanti, contemporaneamente cade verso il basso.

Svolgimento Nello svolgimento di questo problema, indicheremo con una x a pedice le grandezze fisiche relative al moto in orizzontale, e una y a pedice le grandezze relative al moto in verticale.

Il proiettile si muove di moto uniformemente accelerato in verticale, quindi

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}g\Delta t^2 + V_{iy}\Delta t$$

dove con Δt si intende il tempo di volo del proiettile dal fucile al bersaglio. La velocità iniziale in verticale è nulla in quanto il proiettile è stato sparato in orizzontale

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}g\Delta t^2$$

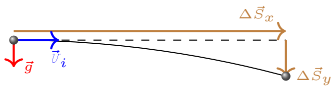
$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta S_y}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,196\,m}{9,8\,\frac{m}{s^2}}} = 0,2\,s$$

Il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme in orizzontale. Utilizzando l'equazione del moto corrispondente avremo la risposta al problema.

$$\Delta S_x = V_{ix}\Delta t = 800\,\frac{m}{s}\cdot 0,2\,s = 160\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0008b$

Testo *[C0008b]* [2 2 1a]



Un fucile spara orizzontalmente un proiettile con velocità iniziale $V_{ix} = 800\,\frac{m}{s}$ contro un bersaglio posto alla distanza $\Delta S_x = 400\,m$. Quanti millimetri sotto la linea di tiro viene colpito il bersaglio?

Spiegazione Il proiettile si muove di moto parabolico, cioè contemporaneamente di moto rettilineo uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale. Mentre il proiettile si muove in avanti, contemporaneamente cade. Quindi si tratta di sapere di quanto cade nel tempo che impiega il proiettile a raggiungere il bersaglio

Svolgimento Considerando il moto rettilineo uniforme in orizzontale, calcoliamo in quanto tempo il proiettile raggiunge il bersaglio:

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{V_{ix}} = \frac{400\,m}{800\,\frac{m}{s}} = 0,5\,s$$

Calcoliamo adesso di quanto cade il proiettile nell'intervallo di tempo appena trovato. Teniamo presente che la velocità iniziale in verticale $V_{iy} = 0$; infatti il proiettile veniva sparato orizzontalmente.

$$\Delta S_y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_{iy} \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,25\,s^2 = 1,225\,m = 1225\,mm$$

Problema di: Cinematica - $C0009$

Testo *[C0009]* [2 2 1a]

Un oggetto si trova ad una certa altezza e viene sparato verso l'alto con una velocità iniziale $V_i = 4\,\frac{m}{s}$. Sapendo che arriverà a terra dopo un tempo $\Delta t = 2\,sec$, quanto si trovava in alto?

Spiegazione In questo esercizio è facile capire che l'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato dal momento che agisce l'accelerazione di gravità. Bisogna però stare attenti alla scelta del sistema di riferimento e mantenere i conti coerenti con tale scelta. Se scegliamo di posizionare il sistema di riferimento rivolto verso l'alto, allora tutti i vettori verso l'alto devono essere scritti nelle formule con il segno positivo e tutti i vettori verso il basso con il segno negativo.

Svolgimento Per sapere l'altezza iniziale dell'oggetto, sapendo che da tale altezza arriva fino a terra, sarà sufficiente calcolare il suo spostamento ΔS, tenendo presente che tale spostamento, essendo un vettore verso il basso, risulterà di valore negativo.

$$\Delta S = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_i \Delta t$$
$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \left(-9,8\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot 4\,s^2 + 4\,\frac{m}{s} \cdot 2\,s$$
$$\Delta S = -19,6\,m + 8\,m = -11,6\,m$$

L'oggetto ha quindi percorso un certo tragitto (si è mosso verso l'alto per poi ricadere) ma si è spostato di $11,6\,m$ dal punto di partenza fino a terra. L'oggetto si trovava quindi all'altezza di $11,6\,m$

Problema di: Cinematica - $C0010$

Testo *[C0010]* [3 3 1a]
Un tennista durante il servizio colpisce orizzontalmente la pallina all'altezza $h_i = 2\,m$ imprimendole una velocità iniziale $\mathcal{U}_{ix} = 30\,\frac{m}{s}$. Sapendo che la rete nel punto più alto è alta $h_r = 1,07\,m$ e che tale rete si trova alla distanza $\Delta S_x = 11,89\,m$ dalla riga di fondo, calcola quanti centimetri la pallina passa sopra la rete.

Spiegazione La pallina, lanciata orizzontalmente verso la rete, si muove di moto parabolico, cioè di moto rettilineo uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale. mentre la pallina di sposta verso la rete, contemporaneamente cade; sapendo di quanto cade rispetto all'altezza iniziale dalla quale è partita, possiamo stabilire se passa sopra la rete o no.

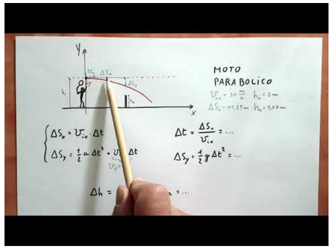


Fig. 4.8: *Guarda il video youtu.be/NZ6cNuR5Wv4*

Svolgimento Cominciamo con l'analizzare il moto rettilineo uniforme in orizzontale

$$\Delta S_x = \mathcal{U}_{ix}\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{\mathcal{U}_{ix}} = \frac{11,89\,m}{30\,\frac{m}{s}} = 0,396\,s$$

Durante questo intervallo di tempo la pallina cade di

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}g\Delta t^2 + \mathcal{U}_{iy}\Delta t = \frac{1}{2}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(0,396\,s)^2 = 0,77\,m = 77\,cm$$

Quindi la pallina passa sopra la rete all'altezza da terra

$$h_2 = h_i - \Delta S_y = 1,23\,m = 123\,cm$$

e quindi $16\,cm$ sopra la rete

Problema di: Cinematica - $C0012$

Testo *[C0012]* [2 2 1a]
Due automobili percorrono a velocità costante due strade che si incrociano. La prima dista dall'incrocio $\Delta S_1 = 600\,m$ e viaggia a velocità $\mathcal{V}_1 = 30\,\frac{m}{s}$. La seconda dista dall'incrocio $\Delta S_2 = 800\,m$. A quale velocità deve viaggiare la seconda automobile affinché si scontri con la prima?

Spiegazione Per prima cosa osserviamo che le due automobili viaggiano a velocità costante e quindi si muovono di moto rettilineo uniforme. Questo ci permette di stabilire che l'unica formula da utilizzare è quella del moto uniforme $\Delta S = V \cdot \Delta t$. Osserviamo inoltre che affinchè le due auto si scontrino devono arrivare all'incrocio nello stesso istante, quindi il tempo impiegato dalla prima auto ad arrivare all'incrocio deve essere uguale al tempo impiegato dalla seconda auto.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare quanto tempo impiega la prima auto per arrivare all'incrocio

$$\Delta S_1 = \mathcal{V}_1 \Delta t_1$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{\mathcal{V}_1} = \frac{600\,m}{30\,\frac{m}{s}} = 20\,s$$

Sapendo che affinchè ci sia uno scontro le due auto devono impiegare lo stesso tempo per arrivare all'incrocio

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 = 20\,s$$

quindi la seconda automobile deve viaggiare alla velocità

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = \frac{800\,m}{20\,s} = 40\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0013$

Testo *[C0013]* [1 1 1a]
Se mi muovo in avanti di $\Delta S_1 = 600\,m$, e poi a destra di $\Delta S_2 = 800\,m$, quanti metri ho percorso? Di quanti metri mi sono spostato rispetto al punto di partenza? Disegna i due spostamenti e lo spostamento totale.

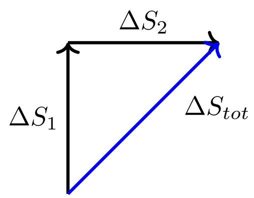
Spiegazione La grandezza fisica chiamata *Spostamento* è una grandezza vettoriale, cioè ha tre caratteristiche (modulo, direzione e verso) e si può rappresentare con un vettore. In questo problema i due vettori spostamento sono perpendicolari tra loro, quindi il vettore somma altro non è se non l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che per cateti ha i due vettori indicati dal problema. Ovviamente il modulo dello spostamento totale è la distanza tra il punto di partenza ed il punto di arrivo, e non è da confondersi con il numero di metri percorsi. Il numero di metri percorsi è la lunghezza del percorso seguito.

Svolgimento La lunghezza del percorso fatto (cioè il numero di metri percorsi) è la somma delle lunghezza dei due spostamenti

$$\Delta l_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1400\,m$$

Lo spostamento totale è la somma vettoriale dei due spostamenti e vale

$$\Delta S_{tot} = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = \sqrt{360000\,m^2 + 640000\,m^2} = 1000\,m$$



Problema di: Cinematica - $C0013a$

Testo *[C0013a]* [1 1 1a]
Se mi muovo verso nord di $\Delta S_1 = 600\,m$, e poi verso est di $\Delta S_2 = 300\,m$, ed infine verso sud di $\Delta S_3 = 200\,m$, quanti metri ho percorso? Di quanti metri mi sono spostato rispetto al punto di partenza? Disegna i tre spostamenti e lo spostamento totale.

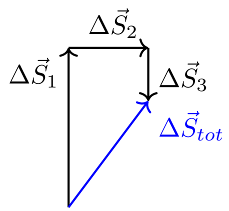
Spiegazione La grandezza fisica chiamata *Spostamento* è una grandezza vettoriale, cioè ha tre caratteristiche (modulo, direzione e verso) e si può rappresentare con un vettore che parte dal punto di partenza ed arriva nel punto di arrivo.

Svolgimento La lunghezza del percorso fatto (cioè il numero di metri percorsi) è la somma delle lunghezza dei tre spostamenti

$$L_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1100\,m$$

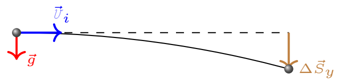
Lo spostamento totale è la somma vettoriale dei tre spostamenti. Per calcolarla dobbiamo osservare che lo spostamento richiesto è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti rispettivamente $a = \Delta S_2 = 300\,m$ e $b = \Delta S_1 - \Delta S_3 = 400\,m$

$$\Delta S_{tot} = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} = \sqrt{90000\,m^2 + 160000\,m^2} = 500\,m$$



Problema di: Cinematica - $C0014$

Testo *[C0014]* [1 2 1a]



Un cannone spara orizzontalmente un proiettile con velocità iniziale $\vec{v}_{ix} = 200\,\frac{m}{s}$. Dopo un tempo $\Delta t = 2\,s$ colpisce il bersaglio. Quanto distante si trova il bersaglio in linea orizzontale? Quanto più in basso rispetto all'altezza del cannone?

Spiegazione Il proiettile sparato dal cannone si muove di moto parabolico; mentre il proiettile avanza, contemporaneamente cade. Per risolvere il problema è necessario analizzare il moto rettilineo uniforme in orizzontale e il moto uniformemente accelerato in verticale.

Svolgimento Cominciamo con l'analizzare il moto rettilineo uniforme in orizzontale

$$\Delta S_x = v_{ix}\Delta t = 200\,\frac{m}{s} \cdot 2\,s = 400\,m$$

Tenendo conto che il proiettile è stato sparato in orizzontale, per cui $v_{iy} = 0$, durante l'intervallo di tempo il proiettile cade di

$$\Delta S_y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + v_{iy}\Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 19,6\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0016$

Testo *[C0016]* [2 3 1a]
Due oggetti vengono lanciati con una velocità iniziale $V_i = 5\,\frac{m}{s}$, uno verso il basso e l'altro verso l'alto. Entrambi arrivano a terra dopo un tempo $\Delta t = 4\,s$. Quanto si trovavano in alto?

Spiegazione In questo problema due oggetti vengono lanciati con la stessa velocità in due direzioni opposte. Dal momento che arrivano entrambi a terra contemporaneamente, se ne deduce che quello lanciato verso il basso doveva trovarsi più in alto. La particolarità di questo esercizio è che i dati numerici del problema sono gli stessi per entrambi gli oggetti, ma le due situazioni sono di fatto differenti.

Svolgimento L'altezza a cui si trovano i due oggetti coincide con lo spostamento che fanno.

Per il primo oggetto:

$$h_a = \Delta S_a = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_{i-a} \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 + 5\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s = 98,4\,m$$

Per il secondo oggetto:

$$h_b = \Delta S_b = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_{i-b} \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 - 5\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s = 58,4\,m$$

In questo caso il valore della velocità iniziale viene messo negativo in quanto è un vettore opposto ai vettori spostamento ed accelerazione, i quali sono stati messi positivi.

Problema di: Cinematica - $C0017$

Testo *[C0017]* [2 2 2a]
Un pallone viene lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $V_i = 10\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo non si è spostato?

Spiegazione In questo problema sul moto uniformemente accelerato viene chiesto di trovare in quanto tempo l'oggetto in questione ha fatto un certo spostamento. dal momento che il tempo, nell'equazione oraria del moto uniformemente accelerato, compare al secondo grado, allora per risolvere il problema serve saper risolvere le equazioni di secondo grado.

Svolgimento L'equazione del moto uniformemente accelerato è:

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + V_i \Delta t$$

altrimenti scrivibile come

$$\frac{1}{2} a \Delta t^2 + V_i \Delta t - \Delta S = 0$$

Risolvendo l'equazione in funzione del tempo avremo che:

$$\Delta t_{1,2} = \frac{-V_i \pm \sqrt{V_i^2 + 2a\Delta S}}{a}$$

Lo spostamento fatto dall'oggetto è zero, $\Delta S = 0$, quindi

$$\Delta t_1 = 0 \qquad \Delta t_2 = \frac{-2V_i}{a} = \frac{-2 \cdot 10\,\frac{m}{s}}{-9,8\,\frac{m}{s^2}} = 2,04\,s$$

Il valore dell'accelerazione di gravità è stato messo negativo in quanto diretta dalla parte opposta rispetto alla velocità iniziale. Guardiamo i valori ottenuti: la prima soluzione indica che l'oggetto non si è spostato nel momento stesso della partenza... e questa è la soluzione ovvia. Il secondo risultato riguarda il caso in cui l'oggetto, lanciato in aria, nel ricadere a terra per un singolo istante si trova nella posizione iniziale, e quindi in quell'istante il suo spostamento è nullo.

Problema di: Cinematica - $C0018$

Testo *[C0018]* [2 2 1a]
Un'auto da corsa alla fine di una gara dista dal traguardo $\Delta S_{1t} = 700\,m$ e viaggia a velocità costante $\mathcal{V}_1 = 90\,\frac{m}{s}$; una seconda auto dista dal traguardo $\Delta S_{2t} = 500\,m$ e viaggia a velocità costante $\mathcal{V}_2 = 50\,\frac{m}{s}$. Chi vince la gara? Dopo quanto tempo l'auto più veloce sorpassa quella più lenta?

Spiegazione In questo problema entrambe le auto viaggiano a velocità costante, quindi si muovono di moto rettilineo uniforme. L'unica formula da usare sarà quindi $\Delta S = V \cdot \Delta t$.

Svolgimento Alla prima domanda si risponde stabilendo quale automobile impiega meno tempo ad arrivare al traguardo.

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{\mathcal{V}_1} = \frac{700\,m}{90\,\frac{m}{s}} = 7,78\,s$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{\mathcal{V}_2} = \frac{500\,m}{50\,\frac{m}{s}} = 10\,s$$

Vince quindi la prima macchina, in quanto, anche se più lontana, ci impiega meno tempo a raggiungere il traguardo.

La macchina più veloce si sta avvicinando a quella più lenta, da lei distante

$$\Delta S_{rel} = S_1 - S_2 = 200\,m$$

con una velocità relativa

$$\mathcal{V}_{rel} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = 40\,\frac{m}{s}$$

Il sorpasso avverrà dopo un tempo

$$\Delta t_{sorp} = \frac{\Delta S_{rel}}{\mathcal{V}_{rel}} = \frac{200\,m}{40\,\frac{m}{s}} = 5\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0020$

Testo *[C0020]* [1 1 1a]
Se in macchina eseguo una frenata con accelerazione $a = 6\,\frac{m}{s^2}$, quanto vale e verso dove e diretta la somma tra l'accelerazione che percepisco e l'accelerazione di gravità?

Spiegazione In questo problema abbiamo una persona che subisce due accelerazioni. L'accelerazione totale sarà semplicemente la somma vettoriale delle due accelerazioni subite.

Svolgimento La prima accelerazione che la persona subisce è l'accelerazione di gravità verticale verso il basso del valore $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$

La seconda accelerazione che la persona subisce è causata dal movimento dell'auto. Visto che l'auto frena con accelerazione $a = 6\,\frac{m}{s^2}$ indietro rispetto al movimento dell'auto, allora la persona all'interno dell'ato deve percepire un'accelerazione uguale in valore ma rivolta in avanti rispetto al movimento dell'auto.

I due vettori accelerazione sono tra loro perpendicolari, quindi

$$a_{tot} = \sqrt{g^2 + a^2} = 11,5\,\frac{m}{s^2}$$

ed è diretta diagonalmente in avanti verso il basso, come si può constatare effettuando la somma con il metodo grafico.

Problema di: Cinematica - $C0020a$

Testo *[C0020a]* [1 1 1a]
Una macchina accelera in avanti con un'accelerazione $a = 6\,\frac{m}{s^2}$. Quanto vale e verso dove e diretta la somma tra l'accelerazione che il passeggero percepisce l'accelerazione di gravità?

Spiegazione In questo problema abbiamo una persona che subisce due accelerazioni. L'accelerazione totale sarà semplicemente la somma vettoriale delle due accelerazioni subite.

Svolgimento La prima accelerazione che la persona subisce è l'accelerazione di gravità verticale verso il basso del valore $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$

La seconda accelerazione che la persona subisce è causata dal movimento dell'auto. Visto che l'auto accelera in avanti con accelerazione $a = 6\,\frac{m}{s^2}$, allora la persona all'interno dell'auto deve percepire un'accelerazione uguale in valore ma rivolta indietro rispetto al movimento dell'auto.

I due vettori accelerazione sono tra loro perpendicolari, quindi

$$a_{tot} = \sqrt{g^2 + a^2} = 11,5\,\frac{m}{s^2}$$

ed è diretta diagonalmente indietro verso il basso, come si può constatare effettuando la somma con il metodo grafico.

Problema di: Cinematica - $C0021$

Testo *[C0021]* [2 3 1a]
Una moto si muove con velocità costante $\mathcal{V}_1 = 72\,\frac{km}{h}$ inseguendo un'auto che si muove con velocità costante $\mathcal{V}_2 = 54\,\frac{km}{h}$. L'auto è partita dalla stessa posizione della moto, $\Delta t = 10\,min$ prima della moto. Quanti metri di distanza ci sono tra l'auto e la moto dopo il tempo Δt? Dopo quanto tempo, da quando la moto è partita, essa raggiunge l'auto?

Spiegazione In questo problema abbiamo due corpi che si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. La moto insegue l'auto e, visto che si muove più velocemente, prima o poi la raggiunge.

Svolgimento Sappiamo che all'istante iniziale l'auto ha $\Delta t = 10\,min$ di vantaggio sulla moto, quindi l'auto ha già percorso

$$\Delta S = \mathcal{V}_{auto}\Delta t = 54\,\frac{km}{h} \cdot 10\,min = 54\,\frac{km}{h} \cdot \frac{1\,h}{6} = 9\,km$$

e questo valore è il vantaggio dell'auto sulla moto.

La moto si avvicina all'auto con una velocità relativa

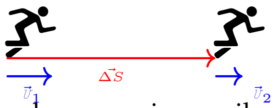
$$\mathcal{V}_{rel} = \mathcal{V}_{moto} - \mathcal{V}_{auto} = 18\,\frac{km}{h}$$

Quindi la moto raggiunge l'auto dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{\mathcal{V}_{rel}} = \frac{9\,km}{18\,\frac{km}{h}} = 0,5\,h = 30\,min$$

Problema di: Cinematica - $C0022$

Testo *[C0022]* [1½ 1 1a]



Due persone si rincorrono rispettivamente alla velocità costante $V_1 = 5\,\frac{m}{s}$ e $V_2 = 3\,\frac{m}{s}$, e distano inizialmente $\Delta S = 12\,m$. Dopo quanto tempo il più veloce raggiunge il più lento?

Spiegazione In questo problema abbiamo due persone che si muovono entrambe di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. La persona più veloce insegue la più lenta raggiungendola.

Svolgimento La persona veloce si avvicina a quella lenta con una velocità relativa

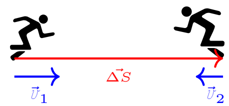
$$V_{rel} = V_1 - V_2 = 2\,\frac{m}{s}$$

Quindi lo raggiunge dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{V_{rel}} = \frac{12\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 6\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0022a$

Testo *[C0022a]* [1½ 1 1a]



Due persone, distanti tra loro $\Delta S = 12\,m$, corrono una verso l'altra con velocità costanti $V_1 = 5\,\frac{m}{s}$ e $V_2 = 3\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo si scontrano?

Spiegazione In questo problema abbiamo due corpi che si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. i due corpi di dirigono uno verso l'altro fino a scontrarsi.

Svolgimento Ognuna delle due persone vede l'altra venirle addosso con una velocità relativa

$$V_{rel} = V_1 + V_2 = 8\,\frac{m}{s}$$

Quindi si scontrano dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{V_{rel}} = \frac{12\,m}{8\,\frac{m}{s}} = 1,5\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0022b$

Testo *[C0022b]* [1½ 1 1a]
Dopo quanto tempo si scontrano due auto, distanti tra loro $\Delta S = 2\,km$, se entrambe viaggiano una contro l'altra a velocità costante $V = 80\,\frac{km}{h}$?

Spiegazione In questo problema due auto viaggiano con velocità costante una contro l'altra. Il moto è quindi moto rettilineo uniforme.

Svolgimento Le due auto si avvicinano alla velocità

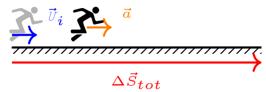
$$\mathcal{V}_{rel} = \mathcal{V} + \mathcal{V} = 160\,\frac{km}{h}$$

Il tempo che impiegheranno quindi a scontrarsi è

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{\mathcal{V}_{rel}} = \frac{2\,km}{160\,\frac{km}{h}} = 0,0125\,h$$

Problema di: Cinematica - $C0023$

Testo *[C0023]* [1 2 1a]



Un atleta deve correre una gara lunga $\Delta S_{tot} = 60\,m$. Partendo con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 4\,\frac{m}{s}$, ha già corso per un tempo $\Delta t = 3\,s$ con un'accelerazione costante $a = 0,5\,\frac{m}{s^2}$. Quanti metri mancano al traguardo?

Spiegazione In questo problema l'atleta ha già percorso un certo tratto di strada. Per sapere quanti metri mancano al traguardo è necessario calcolarsi quanti metri ha già percorso e sottrarre questo valore alla lunghezza complessiva della gara. Sapendo che l'atleta si muove con accelerazione costante, se ne deduce che si muove di moto uniformemente accelerato; questa informazione è determinante per sapere quali formule utilizzare per calcolarsi quanti metri ha già percorso.

Svolgimento La strada che l'atleta ha già percorso vale:

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot 0,5\,\frac{m}{s^2} \cdot 9\,s^2 + 4\,\frac{m}{s} \cdot 3\,s = 14,25\,m$$

La strada che deve ancora percorrere vale:

$$\Delta S_{mancante} = \Delta S_{tot} - \Delta S = 60\,m - 14,25\,m = 45,75\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0024$

Testo *[C0024]* [1 2 1a]
Giorgio percorre $\Delta S_1 = 7\,hm$ e successivamente si muove per un tempo $\Delta t_1 = 3\,min$ alla velocità $\mathcal{V}_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Marco percorre una distanza $\Delta S_2 = 0,6\,Miglia$ e successivamente si muove per un tempo $\Delta t_2 = 0,1\,h$ alla velocità $\mathcal{V}_2 = 2\,\frac{m}{s}$. Chi ha percorso più strada?

Spiegazione In questo problema due persone si muovono... basta calcolare per entrambe quanta strada hanno fatto.

Svolgimento La distanza che ha percorso Giorgio vale:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \mathcal{V}_1 \cdot \Delta t_1$$

$$\Delta S = 7\,hm + 4\,\frac{m}{s} \cdot 3\,min = 700\,m + 4\,\frac{m}{s} \cdot 180\,s = 1420\,m$$

La distanza che ha percorso Marco vale:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \mathcal{V}_1 \cdot \Delta t_1$$

$$\Delta S = 0,6\,Miglia + 2\,\frac{m}{s} \cdot 0,1\,h = 0,6 \cdot 1600\,m + 2\,\frac{m}{s} \cdot 0,1 \cdot 3600\,s = 1680\,m$$

Marco ha fatto un po' più di strada.

Problema di: Cinematica - $C0025$

Testo *[C0025]* [3 4 2a]
Un oggetto viene lanciato verso l'alto da un'altezza $h_i = 30\,m$ con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 5\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo arriva a terra?

Spiegazione In questo problema sul moto uniformemente accelerato viene chiesto di trovare in quanto tempo l'oggetto in questione ha fatto un certo spostamento. dal momento che il tempo, nell'equazione oraria del moto uniformemente accelerato, compare al secondo grado, allora per risolvere il problema serve saper risolvere le equazioni di secondo grado.

Svolgimento Consideriamo il sistema di riferimento con l'origine nel terreno e rivolto verso l'alto.

L'equazione del moto uniformemente accelerato è:

$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_i\Delta t$$

altrimenti scrivibile come

$$\frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_i\Delta t - \Delta S = 0$$

Risolvendo l'equazione in funzione del tempo avremo che:

$$\Delta t_{1,2} = \frac{-\mathcal{V}_i \pm \sqrt{\mathcal{V}_i^2 + 2a\Delta S}}{a}$$

In questo esercizio lo spostamento richiesto all'oggetto è $\Delta S = -30\,m$; l'accelerazione di gravità è $a = g = -9,8\,\frac{m}{s^2}$.

$$\Delta t_1 = -2,02\,s$$

$$\Delta t_2 = 3,04\,s$$

Da notare che il valore dell'accelerazione di gravità è stato messo negativo in quanto diretta dalla parte opposta rispetto al verso del sistema di riferimento. Guardiamo adesso i valori ottenuti: la soluzione positiva è la risposta al problema; il risultato negativo afferma che nel suo movimento l'oggetto si trovava a terra in un certo istante nel passato. Visto che l'oggetto all'istante iniziale si muoveva verso l'alto, questo vuol dire in effetti che proveniva da un punto più un basso.

Problema di: Cinematica - $C0026$

Testo *[C0026]* [1 1 1a]
Un oggetto viene lasciato cadere, partendo da fermo, in un pozzo, e ne tocca il fondo dopo un tempo $\Delta t = 2\,s$. Quanto è profondo il pozzo?

Spiegazione In questo problema sul moto uniformemente accelerato viene chiesto di trovare di quanto si è spostato l'oggetto in questione nell'intervallo di tempo indicato. E' sufficiente applicare la formula del moto uniformemente accelerato.

Svolgimento L'equazione del moto uniformemente accelerato è:

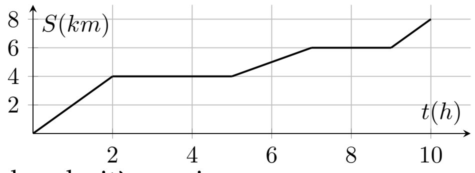
$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + V_i \Delta t$$

L'accelerazione in questione è l'accelerazione di gravità.

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 + 0 = 19,6\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0029$

Testo [C0029] [1 2 1a]



Un corpo si muove come indicato dal seguente grafico *spazio-tempo*. Indica: la massima distanza dal punto di partenza, il numero di ore complessivo in cui è stato fermo, la velocità media complessiva, la velocità massima.

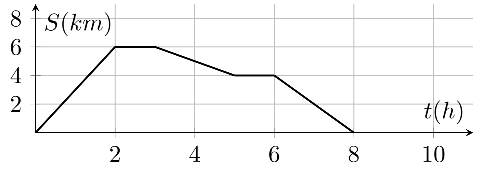
Spiegazione Un grafico *spazio-tempo* indica la distanza di un corpo, in funzione del tempo, dal punto di riferimento. Linee rette indicano velocità costanti; linee verso l'alto indicano che il corpo si allontana dal punto di riferimento; linee orizzontali indicano che il corpo è fermo. La pendenza della retta indica la velocità del corpo.

Svolgimento

- La massima distanza la si ha alla fine del quinto tratto con $\Delta S_{max} = 8\,km$
- I tratti orizzontali del grafico durano $\Delta t_{fermo} = \Delta t_2 + \Delta t_4 = 5\,h$
- La velocità media complessiva la troviamo con $V_m = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{8\,km}{10\,h} = 0,8\,\frac{km}{h}$
- La velocità massima del corpo la si ha nel quinto tratto in quanto è il più ripido. In quel tratto il corpo percorre $\Delta S_5 = 2\,km$ in un tempo $\Delta t_5 = 1\,h$ e quindi avremo una velocità $V_5 = \frac{\Delta S_5}{\Delta t_5} = 2\,\frac{km}{h}$

Problema di: Cinematica - $C0029a$

Testo [C0029a] [1 2 1a]



Un corpo si muove come indicato dal seguente grafico *spazio-tempo*. Indica: la massima distanza dal punto di partenza, il numero di ore complessivo in cui è stato fermo, la velocità media complessiva, la velocità massima.

Spiegazione Un grafico *spazio-tempo* indica la distanza di un corpo, in funzione del tempo, dal punto di riferimento. Linee rette indicano velocità costanti; linee verso l'alto indicano che il corpo si allontana dal punto di riferimento; linee orizzontali indicano che il corpo è fermo. La pendenza della retta indica la velocità del corpo.

Svolgimento

- La massima distanza la si ha alla fine del primo tratto con $\Delta S_{max} = 6\,km$
- I tratti orizzontali del grafico durano $\Delta t_{fermo} = \Delta t_2 + \Delta t_4 = 2\,h$
- La velocità scalare media nel percorso di ritorno la troviamo con

  $$V_m = \frac{\Delta S_{0\,h\to 8\,h}}{\Delta t_{0\,h\to 8\,h}} = \frac{6\,km + 6\,km}{8\,h} = 1,5\,\frac{km}{h}$$

  La velocità media vettoriale è invece nulla, visto che il corpo, essendo ritornato al punto di partenza, non si è spostato

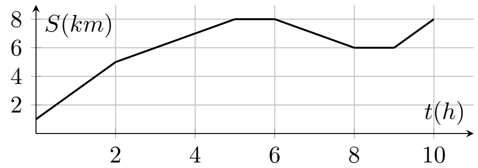
  $$V_m = \frac{\left|\Delta \vec{S}_{tot}\right|}{\Delta t_{tot}} = 0$$

- La velocità massima del corpo la si ha nel primo tratto in quanto è il più ripido. In quel tratto il corpo percorre $\Delta S_1 = 6\,km$ in un tempo $\Delta t_1 = 2\,h$ e quindi avremo una velocità $V_1 = \frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} = 3\,\frac{km}{h}$

Problema di: Cinematica - $C0029b$

Testo *[C0029b]* [1 2 1a]

Un corpo si muove come indicato dal seguente grafico *spazio-tempo*. Indica: la massima distanza dal punto di partenza, il numero di ore complessivo in cui è stato fermo, la velocità media complessiva, la velocità massima.



Spiegazione Un grafico *spazio-tempo* indica la distanza di un corpo, in funzione del tempo, dal punto di riferimento. Linee rette indicano velocità costanti; linee verso l'alto indicano che il corpo si allontana dal punto di riferimento; linee orizzontali indicano che il corpo è fermo. La pendenza della retta indica la velocità del corpo.

Svolgimento

- La massima distanza la si ha alla fine del secondo tratto con $\Delta S_{max} = 8\,km$
- I tratti orizzontali del grafico durano $\Delta t_{fermo} = \Delta t_3 + \Delta t_5 = 2\,h$
- La velocità media scalare nel percorso complessivo la troviamo con

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_{0\,h \to 8\,h}}{\Delta t_{0\,h \to 8\,h}} = \frac{11\,km}{10\,h} = 1,1\,\frac{km}{h}$$

- La velocità massima del corpo la si ha nel primo tratto e nell'ultimo in quanto sono i più ripidi. In quei tratti il corpo percorre $\Delta S_1 = 4\,km$ in un tempo $\Delta t_1 = 2\,h$ e quindi avremo una velocità $\mathcal{V}_1 = \frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} = 2\,\frac{km}{h}$

Problema di: Cinematica - $C0030$

Testo *[C0030]* [2 2 1a]

Una bicicletta viaggia per un tempo $\Delta t_1 = 2\,h$ alla velocità $\mathcal{V}_1 = 20\,\frac{km}{h}$ e successivamente per un tempo $\Delta t_2 = 3\,h$ alla velocità $\mathcal{V}_2 = 30\,\frac{km}{h}$. Quale velocità media ha tenuto?

Spiegazione La bicicletta percorre due tratti di strada differenti a due velocità differenti. Dal momento che per calcolare una velocità media devo calcolarmi la lunghezza del percorso totale e la durata del percorso totale, devo prima calcolarmi le distanze percorse dalla bicicletta.

Svolgimento La lunghezza del primo percorso è

$$\Delta S_1 = \mathcal{V}_1 \cdot \Delta t_1 = 20\,\frac{km}{h} \cdot 2\,h = 40\,km$$

La lunghezza del secondo percorso è

$$\Delta S_2 = \mathcal{V}_2 \cdot \Delta t_2 = 30\,\frac{km}{h} \cdot 3\,h = 90\,km$$

La velocità media su tutto il percorso vale

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{130\,km}{5\,h} = 26\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Cinematica - $C0030a$

Testo *[C0030a]* [2 2 1a]
Un ciclista affronta una salita lunga $\Delta S_1 = 10\,km$ ad una velocità media $V_{m1} = 10\,\frac{m}{s}$ e la successiva discesa lunga $\Delta S_2 = 30\,km$ in un tempo $\Delta t_2 = 40\,min$. In quanto tempo ha percorso il tratto in salita? Quale velocità media ha tenuto in discesa? Quale sull'intero percorso?

Spiegazione Il percorso del ciclista è suddiviso in due fasi, ognuna delle quali vede il ciclista muoversi di moto rettilineo uniforme. Indipendentemente da questo, per il calcolo della velocità media serve conoscere lo spazio complessivamente percorso dal ciclista, ed il tempo totale da egli impiegato a percorrerlo.

Svolgimento Il tempo impiegato dal ciclista a percorrere il primo tratto vale

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{10000\,m}{10\,\frac{m}{s}} = 1000\,s$$

La velocità media tenuta nel primo tratto vale

$$V_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = \frac{30000\,m}{40 \cdot 60\,s} = 12,5\,\frac{m}{s}$$

La velocità media tenuta dall'automobile sul percorso complessivo vale:

$$V_{media} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{10\,km + 30\,km}{1000\,s + 40 \cdot 60\,s} = 11,76\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0030b$

Testo *[C0030b]* [2 2 1a]
Un ciclista affronta una salita lunga $\Delta S_1 = 21\,km$ alla velocità media $V_{m1} = 7\,\frac{m}{s}$ e la successiva discesa lunga $\Delta S_2 = 30\,km$ alla velocità media $V_{m2} = 15\,\frac{m}{s}$. In quanto tempo ha percorso la salita? In quanto tempo ha percorso la discesa? Calcola la velocità media sull'intero percorso.

Spiegazione In questo esercizio abbiamo un ciclista che si muove di moto rettilineo uniforme per ognuno dei vari tratti di strada.

Svolgimento Per il tempo impiegato in salita avremo:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{21000\,m}{7\,\frac{m}{s}} = 3000\,s$$

Per il tempo impiegato in discesa avremo:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_2} = \frac{30000\,m}{15\,\frac{m}{s}} = 2000\,s$$

Lavelocità media su tutto il percorso sarà

$$V_m = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{51000\,m}{5000\,s} = 10,2\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0034$

Testo *[C0034]* [2 2 1a]

Un fucile spara un proiettile orizzontalmente con velocità $\mathcal{V}_{ix} = 200\,\frac{m}{s}$; il bersaglio si trova $2\,cm$ sotto la linea di tiro e viene colpito nel centro. Quanto si trova distante il bersaglio?

Spiegazione Un proiettile in volo si muove di moto parabolico, cioè di moto rettilineo uniforme in orizzontale e di moto uniformemente accelerato in verticale. Mentre il proiettile si muove in avanti, contemporaneamente cade verso il basso.

Svolgimento Nello svolgimento di questo problema, indicheremo con una x a pedice tutte le grandezze fisiche che hanno a che fare con il movimento in orizzontale, ed indicheremo con una y a pedice tutte le grandezze che hanno a che fare con il movimento in verticale.

Il proiettile viene sparato *orizzontalmente* e quindi la componente verticale della veocità del proiettile vale zero. Il moto di caduta è un moto uniformemente accelerato, quindi

$$\Delta S_y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + \mathcal{V}_{iy}\Delta t$$

$$\Delta S_y = \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

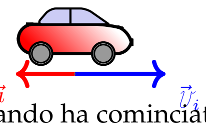
$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta S_y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,02\,m}{9,8\,\frac{m}{s^2}}} = 0,0639\,s$$

Il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme in orizzontale

$$\Delta S_x = \mathcal{V}_{ix}\Delta t = 200\,\frac{m}{s} \cdot 0,0639\,s = 12,78\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0036$

Testo *[C0036]* [3 2 1a]



Un'automobile sta viaggiando alla velocità $\mathcal{V}_i = 36\,\frac{km}{h}$ e comincia a frenare con accelerazione costante $a = 0.5\,\frac{m}{s^2}$. Dopo quanto tempo si ferma? Quanto spazio ha percorso da quando ha cominciato a frenare?

Spiegazione Questo problema parla di un'automobile che si muove con accelerazione costante, quindi di moto uniformemente accelerato. Il problema si risolverà utilizzando le equazioni del moto uniformemente accelerato. Sarà importante ricordarsi di convertire l'unità di misura della velocità per poi eseguire i conti. Fate attenzione ai segni da assegnare alle grandezze fisiche.

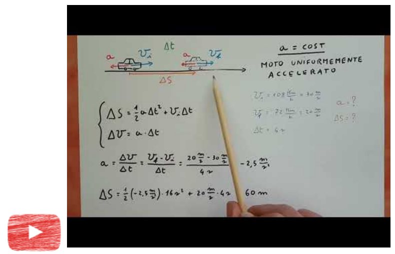


Fig. 4.9: *Guarda il video youtu.be/2splm7qyhj8*

Svolgimento Cominciamo con il convertire il valore della velocità:

$$\mathcal{V}_i = 36\,\frac{km}{h} = 36\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s}$$

Le equazioni del moto uniformemente accelerato sono:

$$\Delta\mathcal{V} = a\Delta t \qquad \Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + \mathcal{V}_i \Delta t$$

dalla prima equazione possiamo ricavare la durata della frenata

$$\Delta t = \frac{\Delta\mathcal{V}}{a} = \frac{\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i}{a} = \frac{0\,\frac{m}{s} - 10\,\frac{m}{s}}{-0,5\,\frac{m}{s^2}} = 20\,s$$

il segno meno dato all'accelerazione indica che essa è opposta alla velocità iniziale dell'automobile, ed è per questo motivo che l'automobile sta rallentando.

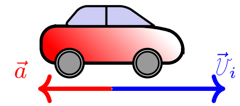
Utilizzando adesso la seconda equazione

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \left(-0,5\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot 400\,s^2 + 10\,\frac{m}{s} \cdot 20\,s = 100\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0036a$

Testo *[C0036a]* [3 2 1a]

Un'automobile ha inizialmente velocità $V_i = 108\,\frac{km}{h}$ e comincia a rallentare fino alla velocità $V_f = 72\,\frac{km}{h}$. Questo avviene in un tempo $\Delta t = 4\,sec$. Calcola l'accelerazione dell'auto e indicane il verso. Quanta strada ha fatto l'auto durante la frenata?



Spiegazione Questo problema parla di un'automobile che si muove con accelerazione costante, quindi di moto uniformemente accelerato. Il problema si risolverà utilizzando le equazioni del moto uniformemente accelerato. Sarà importante ricordarsi di convertire l'unità di misura della velocità per poi eseguire i conti.

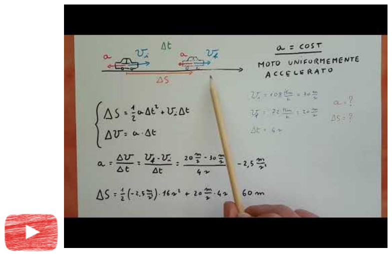


Fig. 4.10: *Guarda il video youtu.be/2splm7qyhj8*

Svolgimento Cominciamo con il convertire i valori delle velocità:

$$V_i = 108\,\frac{km}{h} = 108\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 30\,\frac{m}{s}$$

$$V_f = 72\,\frac{km}{h} = 72\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 20\,\frac{m}{s}$$

Le equazioni del moto uniformemente accelerato sono:

$$\Delta V = a\Delta t \qquad \Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t$$

dalla prima equazione possiamo ricavare l'accelerazione subita dall'automobile

$$a = \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i}{\Delta t} = \frac{20\,\frac{m}{s} - 30\,\frac{m}{s}}{4\,s} = \frac{-10\,\frac{m}{s}}{4\,s} = -2,5\,\frac{m}{s^2}$$

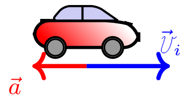
il segno meno indica che l'accelerazione è opposta alla velocità iniziale dell'automobile, ed è per questo motivo che l'automobile sta rallentando.

Utilizzando adesso la seconda equazione

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \left(-2,5\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot 16\,s^2 + 30\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s = 100\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0037$

Testo *[C0037]* [2 1 1a]
Un oggetto si muove con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$, e subisce un'accelerazione costante $a = 2\,\frac{m}{s^2}$, nella stessa direzione della velocità ma con verso opposto, per un tempo $\Delta t = 3\,s$. Quale sarà la sua velocità finale?



Spiegazione In questo esercizio il corpo si muove con accelerazione costante, e quindi di moto uniformemente accelerato.

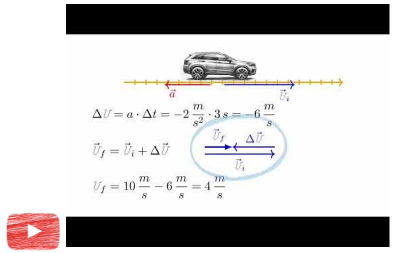


Fig. 4.11: *Guarda il video youtu.be/zseY4w9faZI*

Svolgimento Indichiamo positivi i valori dei vettori con verso uguale alla velocità iniziale dell'oggetto. La variazione di velocità causata dalla presenza dell'accelerazione è

$$\Delta \mathcal{V} = a \cdot \Delta t = -2\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = -6\,\frac{m}{s}$$

cioè un vettore opposto alla velocità iniziale del corpo.

La velocità finale sarà

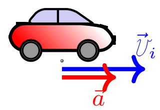
$$\vec{\mathcal{V}}_f = \vec{\mathcal{V}}_i + \Delta \vec{\mathcal{V}}$$

cioè

$$\mathcal{V}_f = 10\,\frac{m}{s} - 6\,\frac{m}{s} = 4\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0037a$

Testo *[C0037a]* [2 1 1a]
Un oggetto si sta muovendo con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$ e subisce un'accelerazione costante $a = 2\,\frac{m}{s^2}$, nella stessa direzione della velocità e con lo stesso verso, per un tempo $\Delta t = 3\,s$. Quale sarà la sua velocità finale?



Spiegazione In questo esercizio il corpo si muove con accelerazione costante, e quindi di moto uniformemente accelerato.

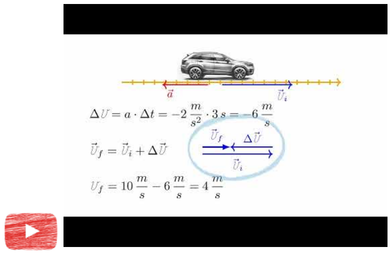


Fig. 4.12: *Guarda il video youtu.be/zseY4w9faZI*

Svolgimento La variazione di velocità causata dalla presenza dell'accelerazione è

$$\Delta \mathcal{V} = a \cdot \Delta t = 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = 6\,\frac{m}{s}$$

nella stessa direzione e verso dell'accelerazione. La velocità finale sarà

$$\vec{\mathcal{V}}_f = \vec{\mathcal{V}}_i + \Delta\vec{\mathcal{V}}$$

cioè

$$\mathcal{V}_f = 10\,\frac{m}{s} + 6\,\frac{m}{s} = 16\,\frac{m}{s}$$

Il segno più è stato messo in quanto la variazione di velocità è un vettore con lo stesso verso della velocità iniziale del corpo.

Problema di: Cinematica - $C0038$

Testo *[C0038]* [3 3 2a]
Un treno sta percorrendo a velocità costante $\mathcal{V} = 160\,\frac{km}{h}$ una linea ferroviaria. All'istante $t_i = 900\,s$ il treno si trova a $S_i = 50\,km$ dal punto di riferimento. Dove si troverà il treno all'istante $t_1 = 1800\,s$? Dove si troverà quando sarà trascorso in tempo $\Delta t = 1,5\,h$ dopo l'istante t_1?

Spiegazione In questo esercizio parliamo di moto rettilineo uniforme in quanto la velocità è stata definita costante. L'unica formula da utilizzare sarà l'equazione oraria del moto.

Svolgimento Cominciamo con lo scrivere l'equazione del moto $\Delta S = v \cdot \Delta t$ per cui

$$S_f - S_i = v \cdot (t_f - t_i)$$

Se l'asse cartesiano su cui avviene il movimento lo indichiamo con la lettera x, la generica posizione x al tempo t la indichiamo con

$$x_f - x_i = v \cdot (t_f - t_i)$$

$$x - x_i = v \cdot (t - t_i)$$

$$x = 160\,\frac{km}{h} \cdot (t - 0,25\,h) + 50\,km$$

$$x = 160\,\frac{km}{h} \cdot t + 10\,km$$

All'istante t_1 il treno si troverà nella posizione

$$x_1 = 160\,\frac{km}{h} \cdot 0,5\,h + 10\,km = 90\,km$$

All'istante $t_2 = t_1 + \Delta t = 7200\,s$ il treno si troverà nel punto

$$x_2 = 160\,\frac{km}{h} \cdot 2\,h + 10\,km = 370\,km$$

Problema di: Cinematica - $C0039$

Testo *[C0039]* [2½ 3 1a]
Un cannone spara un proiettile con una velocità iniziale $V_i = 500\,\frac{m}{s}$; nel punto di massima altezza il proiettile ha velocità $V_f = 300\,\frac{m}{s}$. Quanto vale il modulo della variazione di velocità? Quanto tempo ha impiegato il proiettile a raggiungere il punto di massima altezza?

Spiegazione In questo problema si parla di un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è l'accelerazione di gravità $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$. Per sapere di quanto varia il vettore velocità è necessario disegnare i vettori $\vec{V}_i$ e $\vec{V}_f$ e sottrarli tra loro. Il tempo impiegato lo si trova poi facilmente utilizzando la definizione di accelerazione

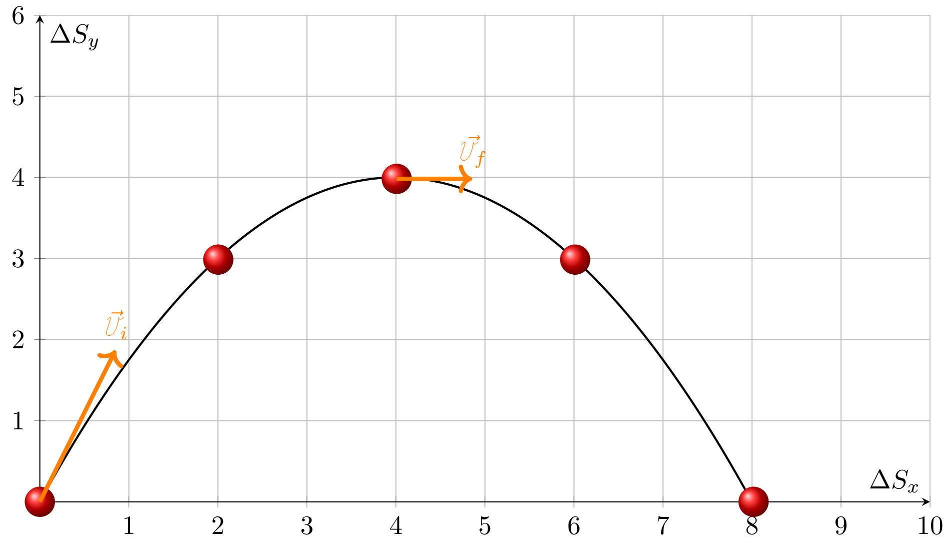
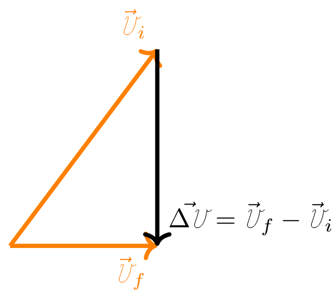


Fig. 4.13: *Traiettoria di un proiettile che si muove di moto parabolico. In arancione è rappresentato il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria del proiettile.*

Svolgimento Un moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale con un moto uniformemente accelerato in verticale. La componente orizzontale della velocità è quindi costante. Nel punto di massima altezza la $\vec{V}_f$ è quindi la componente orizzontale di $\vec{V}_i$. E' evidente che la variazione di velocità corrisponde alla componente verticale della velocità iniziale



$$\Delta\vec{V} = -\vec{V}_{iy} = \vec{V}_f - \vec{V}_i$$

Ne segue che il modulo della variazione di velocità lo si calcolerà

$$\Delta V = \sqrt{\left|V_f^2 - V_i^2\right|} = 400\,\frac{m}{s}$$

Il tempo impiegato a raggiungere il punto di massima altezza lo si trova con

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{g} = \frac{400\,\frac{m}{s}}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 40,8\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0040$

Testo *[C0040]* [1 1 1a]
Se un ascensore si muove con accelerazione $a = 2\,\frac{m}{s^2}$ verso l'alto, calcola la somma dell'accelerazione di gravità e dell'accelerazione dovuta al moto dell'ascensore, percepite dala persona al suo interno.

Spiegazione In questo esercizio si chiede di determinare quanto vale l'accelerazione percepitra dalla persona all'iterno del sistema di riferimento dell'ascensore. Visto che l'acensore subisce un'accelerazione, la persona all'interno percepisce un'acceletrazione opposta, che si va a sommare con l'accelerazione di gravità.

Svolgimento L'accelerazione percepita dalla persona è

$$a = 9,8\,\frac{m}{s^2} + 2\,\frac{m}{s^2} = 11\,\frac{m}{s^2}$$

verso il basso

Problema di: Cinematica - $C0040a$

Testo *[C0040a]* [1 1 1a]
Se un ascensore si muove con accelerazione $a = 2\,\frac{m}{s^2}$ verso il basso, calcola la somma dell'accelerazione di gravità e dell'accelerazione dovuta al moto dell'ascensore, percepite dala persona al suo interno.

Spiegazione In questo esercizio si chiede di determinare quanto vale l'accelerazione percepita dalla persona all'interno del sistema di riferimento dell'ascensore. Visto che l'ascensore subisce un'accelerazione, la persona all'interno percepisce un 'accelerazione opposta, che si va a sommare con l'accelerazione di gravità.

Svolgimento L'accelerazione percepita dalla persona è

$$a = 9,8\,\frac{m}{s^2} - 2\,\frac{m}{s^2} = 7\,\frac{m}{s^2}$$

verso il basso

Problema di: Cinematica - $C0042$

Testo *[C0042]* [3 4 2a]
Un cannone spara un proiettile con una velocità iniziale $V_i = 500\,\frac{m}{s}$; nel punto di massima altezza il proiettile ha velocità $V_h = 300\,\frac{m}{s}$. Quanto vale il modulo della velocità V_f del proiettile al momento dell'impatto al suolo? Quanto vale il modulo della variazione di velocità? Quanto tempo ha impiegato il proiettile a raggiungere il punto di impatto al suolo?

Spiegazione In questo problema si parla di un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è l'accelerazione di gravità $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$. Per sapere di quanto varia il vettore velocità è necessario disegnare i vettori $\vec{V}_i$ e $\vec{V}_f$ e sottrarli tra loro. Il tempo impiegato lo si trova poi facilmente utilizzando la definizione di accelerazione

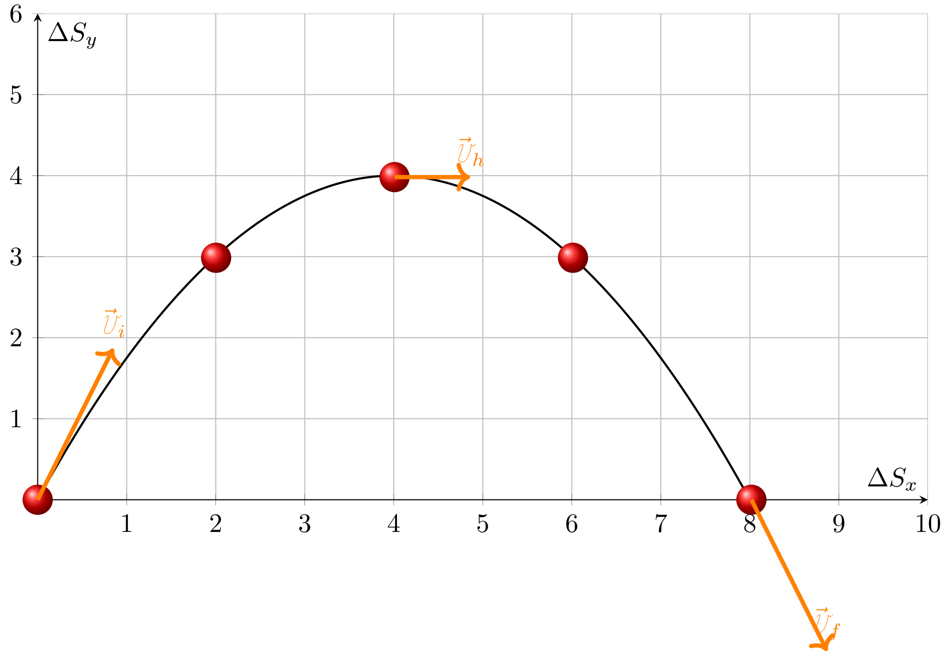
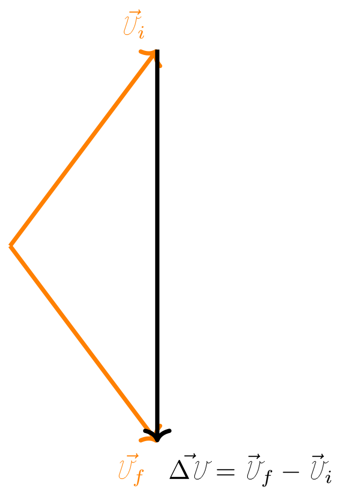


Fig. 4.14: *Traiettoria di un proiettile che si muove di moto parabolico. In arancione è rappresentato il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria del proiettile.*

Svolgimento Un moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale con un moto uniformemente accelerato in verticale. La componente orizzontale della velocità è quindi costante. Nel punto di massima altezza la $\vec{V}_h$ è quindi la componente orizzontale di $\vec{V}_i$ e di $\vec{V}_f$. Inoltre sappiamo che la velocità finale del proiettile deve esserein modulo uguale alla velocità iniziale. La differenza è nel verso della componente



verticale della velocità.

$$V_f = V_i = 500\,\frac{m}{s}$$

E' evidente che la variazione di velocità corrisponde al doppio della componente verticale della velocità finale

$$\Delta\vec{V} = 2\vec{V}_{fy} = \vec{V}_f - \vec{V}_i$$

Ne segue che il modulo della variazione di velocità lo si calcolerà

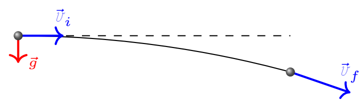
$$\Delta V = 2\sqrt{V_f^2 - V_h^2} = 800\,\frac{m}{s}$$

Il tempo impiegato a raggiungere il punto di massima altezza lo si trova con

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{g} = \frac{800\,\frac{m}{s}}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 81,6\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0043$

Testo *[C0043]* [2½ 2 1a]
Un cannone spara orizzontalmente un proiettile con una velocità iniziale $V_{ix} = 100\,\frac{m}{s}$. Quanto vale il modulo della velocità V_f del proiettile dopo un tempo $\Delta t = 15\,s$?



Spiegazione In questo problema si parla di un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è l'accelerazione di gravità $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$. Per sapere quanto vale il vettore velocità finale è necessario disegnare i vettori $\vec{V}_{ix}$ e $\vec{V}_y$ e sommarli tra loro.

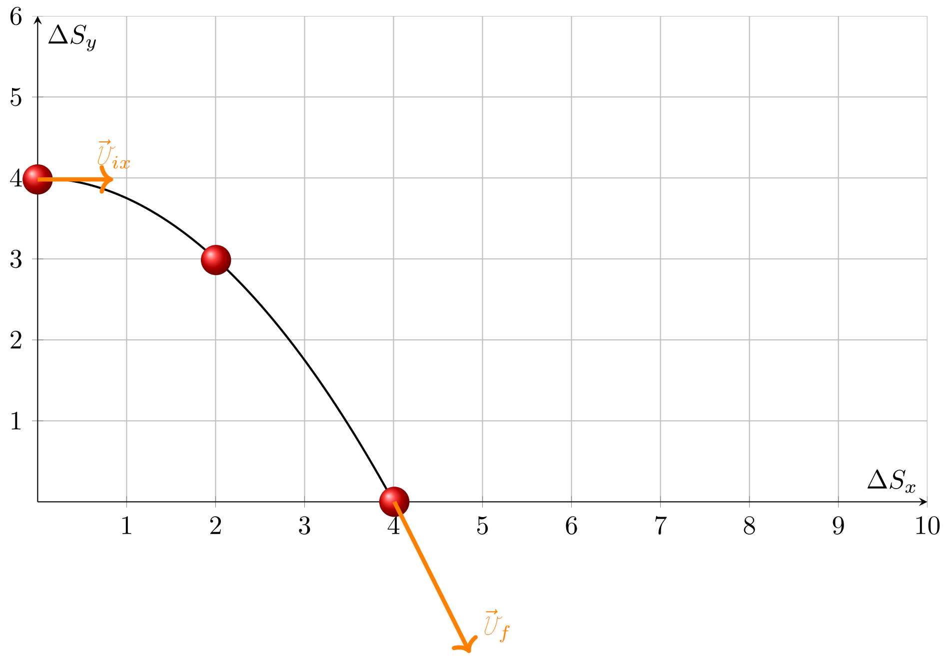
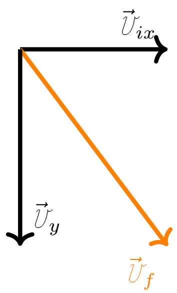


Fig. 4.15: *Traiettoria di un proiettile che si muove di moto parabolico. In arancione è rappresentato il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria del proiettile.*

Svolgimento Un moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale con un moto uniformemente accelerato in verticale. La componente orizzontale della velocità è quindi costante. Sappiamo che



$$V_y = V_{iy} + \Delta V = 0 + a \cdot \Delta t$$

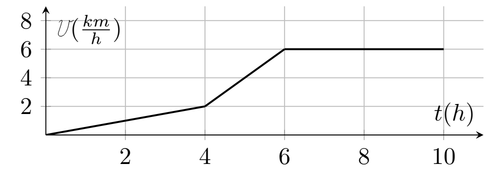
E' evidente che la velocità finale è data da

$$V_f = \sqrt{V_{ix}^2 + V_y^2} = \sqrt{V_{ix}^2 + (g \cdot \Delta t)^2}$$

$$V_f = \sqrt{100^2\,\frac{m^2}{s^2} + \left(9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 15\,s\right)^2} = 178\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0044a$

Testo *[C0044a]* [3 4 2a]
Un corpo si muove come indicato dal seguente grafico *velocità-tempo*. Indica: la velocità massima, il numero di ore in cui l'oggetto ha velocità costante, l'accelerazione massima, la distanza percorsa, la velocità media.



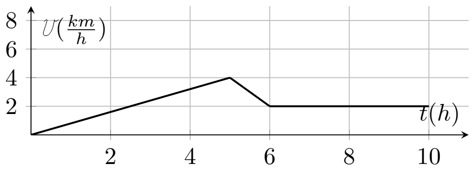
Spiegazione Un grafico *velocità-tempo* indica la velocità di un corpo in movimento in funzione del tempo. Linee rette indicano accelerazioni costanti. La pendenza della retta indica l'accelerazione del corpo. Le linee verso l'alto indicano accelerazioni positive (nello stesso verso della velocità); le linee verso il basso indicano accelerazioni negative (con verso opposto della velocità); linee orizzontali indicano che il corpo ha accelerazione nulla e quindi velocità costante. Lo spostamento effettuato corrisponde all'area racchiusa sotto la curva.

Svolgimento

- Il maggior valore assunto nel grafico è $V_{max} = 6\,\frac{km}{h}$
- L'oggetto ha avuto velocità costante tra l'istante $t_1 = 6\,h$ e l'istante $t_2 = 10\,h$ quando cioè il grafico è una retta orizzontale; quindi $\Delta t = 4\,h$
- L'accelerazione massima la si ha quando il grafico ha la massima pendenza, cioè tra gli istanti $t_1 = 4\,h$ e $t_2 = 6\,h$ e vale
$$a_{max} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = 2\,\frac{km}{h^2}$$
- La distanza percorsa corrisponde all'area racchiusa sotto la curva, cioè:
$$\Delta S = \frac{\left(0\,\frac{km}{h} + 2\,\frac{km}{h}\right) \cdot 4\,h}{2} + \frac{\left(2\,\frac{km}{h} + 6\,\frac{km}{h}\right) \cdot 2\,h}{2} + 6\,\frac{km}{h} \cdot 4\,h = 36\,km$$
- La velocità media sarà quindi
$$V_m = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{36\,km}{10\,h} = 3,6\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Cinematica - $C0044b$

Testo *[C0044b]* [3 4 2a]
Un corpo si muove come indicato dal seguente grafico *velocità-tempo*. Indica: la velocità massima, il numero di ore in cui l'oggetto ha velocità costante, l'accelerazione massima, la distanza percorsa, la velocità media.



Spiegazione Un grafico *velocità-tempo* indica la velocità di un corpo in movimento in funzione del tempo. Linee rette indicano accelerazioni costanti. La pendenza della retta indica l'accelerazione del corpo. Le linee verso l'alto indicano accelerazioni positive (nello stesso verso della velocità); le linee verso il basso indicano accelerazioni negative (con verso opposto della velocità); linee orizzontali indicano che il corpo ha accelerazione nulla e quindi velocità costante. Lo spostamento effettuato corrisponde all'area racchiusa sotto la curva.

Svolgimento

- Il maggior valore assunto nel grafico è $\mathcal{V}_{max} = 4\,\frac{km}{h}$
- L'oggetto ha avuto velocità costante tra l'istante $t_1 = 6\,h$ e l'istante $t_2 = 10\,h$ quando cioè il grafico è una retta orizzontale; quindi $\Delta t = 4\,h$
- L'accelerazione massima la si ha quando il grafico ha la massima pendenza, cioè tra gli istanti $t_1 = 5\,h$ e $t_2 = 6\,h$ e vale
$$a_{max} = \frac{\Delta \mathcal{V}_2}{\Delta t_2} = -2\,\frac{km}{h^2}$$
- La distanza percorsa corrisponde all'area racchiusa sotto la curva, cioè:
$$\Delta S = \frac{\left(0\,\frac{km}{h} + 4\,\frac{km}{h}\right)\cdot 5\,h}{2} + \frac{\left(4\,\frac{km}{h} + 2\,\frac{km}{h}\right)\cdot 1\,h}{2} + 2\,\frac{km}{h}\cdot 4\,h = 21\,km$$
- La velocità media sarà quindi
$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{21\,km}{10\,h} = 2,1\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Cinematica - $C0045$

Testo *[C0045]* [4 5 2a]
Un'automobile esce da un parcheggio partendo da ferma con una accelerazione costante. Contemporaneamente un camion le si sta avvicinando, e si trova $S_{ic} = 30\,m$ dietro di lei viaggiando alla velocità $\mathcal{V}_c = 20\,\frac{m}{s}$. Con quale accelerazione deve muoversi l'auto per non essere tamponata dal camion?

Spiegazione In questo problema conosciamo la posizione e la velocità di due mezzi nell'istante iniziale. Possiamo quindi utilizzare le equazioni orarie del moto per sapere se i due mezzi occuperanno la stessa posizione nello stesso istante.

Svolgimento Consideriamo come istante iniziale $t_i = 0\,s$. Indichiamo con l'indice c il camion e con l'indice a l'automobile. Avremo:

$$S_c = \mathcal{V}_c \cdot t + S_{ci}$$
$$S_a = \frac{1}{2}\cdot a \cdot t^2 + \mathcal{V}_{ai}\cdot t$$

Lo scontro non avviene se
$$S_a > S_c$$

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 + \mathcal{V}_{ai}\cdot t > \mathcal{V}_c \cdot t + S_{ci}$$
$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 - \mathcal{V}_c\cdot t - S_{ci} > 0$$

$$a\cdot t^2 - 2\mathcal{V}_c\cdot t - 2S_{ci} > 0$$

$$t^2 - \frac{2\mathcal{V}_c}{a}\cdot t - \frac{2S_{ci}}{a} > 0$$

I due mezzi non si scontrano se
$$\frac{\Delta}{4} = \frac{\mathcal{V}_c^2}{a^2} + \frac{2S_{ci}}{a} < 0$$

Sapendo che l'accelerazione dell'auto deve essere positiva e che $S_{ic} < 0$

$$V_c^2 < -2S_{ci}a$$

$$a > \frac{V_c^2}{-2S_{ci}} = \frac{400\,\frac{m^2}{s^2}}{60\,m} = 6,67\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0046$

Testo *[C0046]* [2 3 2a]
Un proiettile viene lanciato dal tetto di un palazzo, con una velocità iniziale $V_i = 15\,\frac{m}{s}$ inclinata verso l'alto rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha = 30°$, verso un palazzo di uguale altezza distante $\Delta S_x = 40\,m$. Quanti metri sotto al tetto viene colpito il secondo palazzo?

Spiegazione Il proiettile si muove di moto uniformemente accelerato. Con i dati si può ricavare il calore delle componenti verticale ed orizzontale della velocità.

Svolgimento Le due componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale sono

$$\begin{cases} V_{ix} = V_i \cos\alpha = 13\,\frac{m}{s} \\ V_{iy} = V_i \sin\alpha = 7,5\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Il problema chiede di calcolare lo spostamento verticale del proiettile quando ha raggiunto il secondo palazzo. Il tempo che ci impiega è

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{V_i \cos\alpha} = \frac{40\,m}{13\,\frac{m}{s}} = 3,08\,s$$

Ora possiamo calcolare lo spostamento verticale

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_{iy}\Delta t = \frac{1}{2}\cdot\left(-9,8\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot 9,47\,s^2 + 7,5\,\frac{m}{s}\cdot 3,08\,s = -23,28\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0047$

Testo *[C0047]* [2 2 1a]
Due automobili si muovono perpendicolarmente tra loro partendo dalla stessa posizione con velocità costanti rispettivamente $V_a = 12\,\frac{m}{s}$ e $V_b = 16\,\frac{m}{s}$ Quanto distano tra loro dopo un tempo $\Delta t = 5\,s$?

Spiegazione In questo problema due auto viaggiano con velocità costante in direzioni perpendicolari tra loro. Il moto è quindi moto rettilineo uniforme. La distanza tra loro sarà quindi il segmento che unisce le loro posizioni. Questo segmento è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono gli spostamenti dal punto di partenza.

Svolgimento Lo spostamento delle due auto vale:

$$\Delta S_a = V_a \cdot \Delta t = 60\,m$$

$$\Delta S_b = V_b \cdot \Delta t = 80\,m$$

La distanza tra le due auto varrà

$$L = \sqrt{\Delta S_a^2 + \Delta S_b^2} = 100\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0047a$

Testo *[C0047a]* [2 2 1a]
Due automobili si trovano affiancate su due strade parallele, viaggiando entrambe a velocità costante $V = 6\,\frac{m}{s}$ in verso opposto. Le due strade distano tra loro $d = 5\,m$. A quale distanza si trovano dopo $\Delta t = 1\,s$?

Spiegazione Moto rettilineo uniforme su due percorsi paralleli ad una certa distanza tra loro.

Svolgimento Scomponendo il problema su due assi, possiamo affermare che sull'asse perpendicolare alla strada la distanza delle due auto è costante e vale

$$\Delta S_y = d$$

Sull'asse orizzontale le auto si trovavano nello stesso punto, e dopo $\Delta t = 1\,s$ si trovano alla distanza $\Delta S_x = (V_1 + V_2)\,\Delta t = 12\,m$

La distanza tra le due auto risulta

$$r = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}\,\frac{m}{s} = 13\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0048$

Testo *[C0048]* [3 4 2a]

Un automobilista sta viaggiando alla velocità $V_i = 90\,\frac{km}{h}$. Ad un certo punto si accorge di un ostacolo sulla strada alla distanza $d = 140\,m$. A causa dei tempi di reazione, comincia a frenare dopo un tempo $\Delta t_1 = 0,2\,s$ e impiega un tempo $\Delta t_2 = 10\,s$ per fermarsi. Colpirà l'ostacolo?

Spiegazione In questo esercizio, l'auto si muove di moto rettilineo uniforme nel tempo in cui l'autista si accorge che deve frenare. Successivamente l'auto di muove di moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Prima di cominciare a frenare, l'auto percorrerà un tragitto

$$\Delta S_1 = V_i \cdot \Delta t_1 = 90\,\frac{km}{h} \cdot 0,2\,s = 25\,\frac{m}{s} \cdot 0,2\,s = 5\,m$$

L'auto comincia adesso a frenare. Indicando con ΔV_2 la variazione di velocità avuta dall'auto nella fase di decelerazione, l'accelerazione con cui l'auto frena è

$$a = \frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = \frac{(0-25)\,\frac{m}{s}}{10\,s} = -2,5\,\frac{m}{s^2}$$

L'auto quindi percorre un tragitto

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} a \Delta t_2^2 + V_i \Delta t_2$$

$$\Delta S_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2.5\,\frac{m}{s^2} \cdot 100\,s^2 + 25\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s = 125\,m$$

L'auto quindi, dal momento in cui l'autista si accorge dell'ostacolo, fino al momento in cui si ferma, percorre in tutto

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 130\,m$$

Quindi l'auto riesce a fermarsi prima di colpire l'ostacolo.

Problema di: Cinematica - $C0049$

Testo *[C0049]* [3½ 4 3a]

Dalla terrazza di un palazzo, alta $S_{i1} = 40\,m$ da terra, viene lanciato un oggetto verso il basso con velocità iniziale $V_{i1} = 5\,\frac{m}{s}$. Contemporaneamente viene lanciato da terra un secondo oggetto con velocità iniziale verso l'alto pari a $V_{i2} = 15\,\frac{m}{s}$. A quale altezza da terra si scontrano?

Spiegazione Entrambi gli oggetti si muovono di moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Gli oggetti si scontreranno nell'istante in cui si troveranno nella stessa posizione. Quindi

$$S_1 = S_2$$

$$-\frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_{i2} \Delta t = -\frac{1}{2} g \Delta t^2 - V_{i1} \Delta t + S_{i1}$$

$$V_{i2} \Delta t = -V_{i1} \Delta t + S_{i1}$$

Quindi i due oggetti si scontrano dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{S_{i1}}{(V_{i2} + V_{i1})} = 2\,s$$

La posizione degli oggetti dopo sue secondi di volo è quindi

$$S_2 = -\frac{1}{2} g \Delta t^2 + V_{i2} \Delta t = -19,6\,m + 30\,m = 10,4\,m$$

Ovviamente la scelta dell'equazione del moto del secondo oggetto è del tutto equivalente alla scelta dell'equazione del moto del primo oggetto.

Problema di: Dinamica - $C0050$

Testo *[C0050]* [3 ⭐ 3 ⏳ 2a 📖]
Un'auto di massa $m = 700\,kg$, mentre percorre una curva di raggio $r = 20\,m$ con velocità iniziale $V_i = 6\,\frac{m}{s}$, accelera costantemente in modo da arrivare dopo un tempo $\Delta t = 4\,s$ alla velocità $V_f = 10\,\frac{m}{s}$. Quanto vale la sua accelerazione complessiva nell'istante finale?

Spiegazione L'auto sta facendo un percorso circolare ed è quindi soggetta ad una accelerazione centripeta che dipende dalla velocità ed ad un'accelerazione tangenziale che fa incremnentare il modulo della velocità tangenziale. Ovviamente, istante per istante, la velocità tangenziale aumenta e di conseguenza aumenta anche l'accelerazione centripeta necessaria per mantenere l'auto lungo la traiettoria della curva. Istante per istante l'accelerazione sarà la somma vettoriale delle due accelerazioni.

Svolgimento L'accelerazione tangenziale è

$$a_t = \frac{\Delta V}{\Delta t} = 1\,\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione centripeta nell'istante finale sarà

$$a_{c-f} = \frac{V_f^2}{r} = 5\,\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione complessiva sarà quindi

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{26}\,\frac{m}{s^2} = 5,1\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0051$

Testo *[C0051]* [2 ⭐ 2 ⏳ 1a 📖]
Un pendolo in un ascensore fermo oscilla con periodo $T_0 = 1\,s$. Calcola il suo periodo mentre l'ascensore si muove con accelerazione $a = 1,2\,\frac{m}{s^2}$ verso l'alto.

Spiegazione Sull'ascensore in moto accelerato verso l'alto, l'accelerazione percepita è maggiore e quindi il periodo di oscillazione risulta minore

Svolgimento Dalla formula del periodo del pendolo semplice avremo

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

da cui

$$l = \frac{gT_0^2}{4\pi^2}$$

Il periodo del pendolo del pendolo sull'ascensore in accelerazione verso l'alto risulta

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g+a}$$

$$T^2 = \frac{g}{g+a}T_0^2$$

$$T = \sqrt{\frac{g}{g+a}}T_0 = \sqrt{\frac{9,8\,\frac{m}{s^2}}{11\,\frac{m}{s^2}}} \cdot 1\,s = 0,944\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0051a$

Testo *[C0051]* [2 2 1a]
Un pendolo in un ascensore fermo oscilla con periodo $T_0 = 1\,s$. Calcola il suo periodo mentre l'ascensore si muove con accelerazione $a = 1,2\,\frac{m}{s^2}$ verso il basso.

Spiegazione Sull'ascensore in moto accelerato verso l'alto, l'accelerazione percepita è maggiore e quindi il periodo di oscillazione risulta minore

Svolgimento Dalla formula del periodo del pendolo semplice avremo

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

da cui

$$l = \frac{gT_0^2}{4\pi^2}$$

Il periodo del pendolo del pendolo sull'ascensore in accelerazione verso l'alto risulta

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g-a}$$

$$T^2 = \frac{g}{g-a} T_0^2$$

$$T = \sqrt{\frac{g}{g+a}} T_0 = \sqrt{\frac{9,8\,\frac{m}{s^2}}{8,6\,\frac{m}{s^2}}} \cdot 1\,s = 1,14\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0051b$

Testo *[C001b]* [2 2 1a]
Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo semplice di lunghezza $l = 1\,m$ che si trova su di un treno che accelera con $a = 2\,\frac{m}{s^2}$

Spiegazione Il periodo di oscillazione di un pendolo dipende dall'accelerazione che subisce e dalla sua lunghezza. All'interno del treno l'accelerazione percepita è la somma vettoriale tra l'accelerazione di gravità e quella percepita all'interno del treno dovuta all'accelerazione del treno stesso. L'interno del treno è infatti un sistema di riferimento non inerziale.

Svolgimento L'accelerazіopne percepita all'interno del treno è data dalla somma dell'accelerazione di gravità verticale verso il basso e dell'accelerazione apparente orizzontale. Quindi l'accelerazione subita dal pendolo all'interno del sistema di riferimento è

$$a_p = \sqrt{g^2 + a^2} = 10\,\frac{m}{s^2}$$

Il periodo del pendolo sarà quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_p}} = 2\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0052$

Testo *[C0052]* [3 3 2a]
Un oggetto percorre quattro quinti di un tragitto alla velocità $\mathcal{V} = 12\,\frac{m}{s}$ e l'ultimo quinto del tragitto a metà di quella velocità. Quale velocità media ha tenuto?

Spiegazione La velocità media di un corpo è data dal rapporto tra lo spostamento effettuato ed il tempo impiegato ad effettuarlo

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}}$$

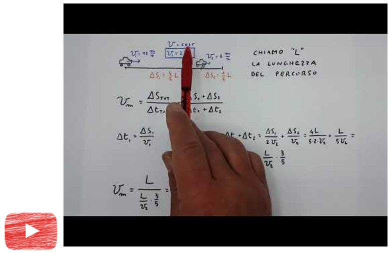


Fig. 4.16: *Guarda il video youtu.be/G0etnW8Z9Rc*

Svolgimento Il percorso in questione è diviso in due parti di cui una è il quadruplo dell'altra. Il percorso totale è quindi

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 4d + d$$

Il primo tratto di strada viene percorso in un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{4d}{\mathcal{V}}$$

ed il secondo tratto di strada in un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{d}{\frac{1}{2}\mathcal{V}} = \frac{2d}{\mathcal{V}}$$

A questo punto possiamo calcolare la velocità media

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{5d}{\frac{6d}{\mathcal{V}}} = \frac{5}{6}\mathcal{V}$$

$$\mathcal{V}_m = 10\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0053$

Testo *[C0053]* [2 2 2a]
Per costruire una base su Marte ($g_m = 3,711\,\frac{m}{s^2}$), alcuni fisici hanno pensato ad una stazione circolare rotante attorno ad un asse di rotazione verticale. Quale accelerazione centrifuga è necessaria affinché all'interno della stazione si percepisca un'accelerazione di gravità pari a quella della Terra?

Spiegazione L'accelerazione percepita all'interno della stazione è la somma vettoriale dell'accelerazione di gravità di Marte con l'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione della stazione.

Svolgimento Considerando che l'accelerazione centrifuga è perpendicolare all'accelerazione del pianeta avremo che

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_m^2} = \sqrt{9,807\,\frac{m}{s^2} - 3,711\,\frac{m}{s^2}} = 9,078\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0054$

Testo *[C0054]* [3 4 2a]
Un cannone spara un proiettile con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 40\,\frac{m}{s}$ ad un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Determina, rispetto al punto di partenza, le coordinate del punto più alto della traiettoria del proiettile.

Spiegazione Un moto di un proiettile è un moto parabolico in quanto l'accelerazione è un vettore costante verticale. Il moto sarà quindi con accelerazione costante sull'asse verticale e con accelerazione nulla sull'asse orizzontale. Utilizzeremo quindi le equazioni del moto rettilineo uniforme in orizzontale e del moto uniformemente accelerato in verticale

Svolgimento Essendo un moto parabolico, le equazioni del moto saranno

$$\begin{cases} \Delta S_x = \mathcal{V}_{ix}\Delta t \\ \Delta S_y = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_{iy}\Delta t \\ \Delta \mathcal{V}_y = a\Delta t \end{cases}$$

L'equazione della traiettoria sarà quindi

$$\Delta S_y = \frac{a}{2\mathcal{V}_{ix}^2}\Delta S_x^2 + \frac{\mathcal{V}_{iy}}{\mathcal{V}_{ix}}\Delta S_x$$

Il vertice di questa parabola ha come coordinate

$$\Delta S_{xv} = -\frac{\mathcal{V}_{ix}\mathcal{V}_{iy}}{a}$$

e per l'ordinata avremo

$$\Delta S_{yv} = \frac{a}{2\mathcal{V}_{ix}^2} \cdot \frac{\mathcal{V}_{ix}^2\mathcal{V}_{iy}^2}{a^2} - \frac{\mathcal{V}_{iy}}{\mathcal{V}_{ix}} \cdot \frac{\mathcal{V}_{ix}\mathcal{V}_{iy}}{a}$$

$$\Delta S_{yv} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{V}_{iy}^2}{a} - \frac{\mathcal{V}_{iy}^2}{a}$$

$$\Delta S_{yv} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V_{iy}^2}{a}$$

Le velocità sono vettori nello stesso verso del sistema di riferimento e verranno inserite nelle formule con il segno positivo; l'accelerazione di gravità ha verso opposto a quello del sistema di riferimento e verrà inserita nelle formule con il segno negativo. Con i dati a disposizione avremo:

$$\begin{cases} V_{ix} = V_i \cos\alpha = 20\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \\ V_{iy} = V_i \sin\alpha = 20\,\frac{m}{s} \\ \Delta S_{xv} = \dfrac{400\sqrt{3}\,\frac{m^2}{s^2}}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 70,7\,m \\ \Delta S_{yv} = \dfrac{400\,\frac{m^2}{s^2}}{19,6\,\frac{m}{s^2}} = 20,4\,m \end{cases}$$

Problema di: Cinematica - $C0056$

Testo *[C0056]* [4 5 3a]
Un proiettile viene sparato con velocità iniziale $V = 100\,\frac{m}{s}$ con un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Quanto tempo il proiettile si è trovato ad una quota superiore a $h = 50\,m$ rispetto alla quota di partenza?

Spiegazione Questo è un problema sul moto parabolico, nel quale in realtà viene affrontata sola la parte riguardante il moto uniformemente accelerato in verticale. La richiesta prevede di identificare quando il proiettile si trova al di sopra di una certa quota, quindi tale richiesta verrà implementata con una disequazione.

Svolgimento L'equazione del moto del proiettile, ipotizzando che il proiettile parta nell'istante $t_0 = 0\,s$ è

$$\Delta S = \frac{1}{2}gt^2 + V\sin\alpha \cdot t$$

Per sapere in quale istante il proiettile supera la quota stabilita ed in quale istante scende al di sotto di tale quota basterà scrivere

$$\frac{1}{2}gt^2 + V\sin\alpha \cdot t > h$$

$$gt^2 + 2V\sin\alpha \cdot t - 2h > 0$$

Risolviamo la disequazione di secondo grado

$$\frac{\Delta}{4} = V^2\sin^2\alpha + 2gh$$

Essendo tutte grandezze positive sono sicuto che il Δ è positivo. Le due soluzioni dell'equazione associata saranno

$$t_{1,2} = \frac{-V\sin\alpha \pm \sqrt{V^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} = \frac{-V\sin\alpha}{g} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}}\right)$$

$$t_{1,2} = 5,1\,s \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 0,392}\right)$$

$$\begin{cases} t_1 = 1,1\,s \\ t_2 = 9,1\,s \end{cases}$$

Quindi

$$1,1\,s < t < 9,1\,s$$

$$\Delta t = 8\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0057$

Testo *[C0057]* [4 7 2a]
Un'auto viaggia a velocità costante $V_i = 90\,\frac{km}{h}$. Di colpo si trova davanti a lei un ostacolo alla distanza $d = 100\,m$. Tenuto conto che comincia a frenare dopo un tempo di reazione $\Delta t_r = 0,2\,s$, e che la frenata consiste in un'accelerazione $a = 2\,\frac{m}{s^2}$, con quale velocità urterà l'ostacolo?

Spiegazione Prima che l'autista cominci a frenare si muoverà di moto rettilineo uniforme. Da quando comincia a frenare si muoverà di moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Da quando l'autisca vede l'ostacolo fino a quando inizia a frenare, lo spazio percorso è

$$\Delta S_1 = V_i \cdot \Delta t = 90\,\frac{1000\,m}{3600\,s} \cdot 0,2\,s = 5\,m$$

A questo punto l'autista inizia la frenata ed il moto dell'auto è rappresentabile con

$$\begin{cases} \Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + V_i \Delta t \\ \Delta V = a \Delta t \end{cases}$$

In assenza di ostacoli l'auto percorrerebbe, fino a fermarsi, un tragitto così calcolabile:

$$\begin{cases} \Delta t_{arresto} = \dfrac{\Delta V}{a} = \dfrac{0 - V_i}{a} = -\dfrac{V_i}{a} = 12,5\,s \\ \\ \Delta S_{arresto} = \dfrac{1}{2} a \left(\dfrac{V_i}{a}\right)^2 - V_i \cdot \left(\dfrac{V_i}{a}\right) = -\dfrac{V_i^2}{a} = 312,5\,m \end{cases}$$

Risulta evidente che l'auto urterà l'ostacolo. Calcoliamo adesso la velocità dell'impatto.

Il tempo che l'auto impiega a raggiungere l'ostacolo è dato da

$$\Delta t = \frac{-V_i \pm \sqrt{V_i^2 + 2a\Delta S}}{a}$$

$$\Delta t = \frac{-25\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{625\,\frac{m^2}{s^2} - 2\cdot 2\,\frac{m}{s^2}\cdot 95\,m}}{-2\,\frac{m^2}{s^2}} = \begin{cases} 4,67\,s \\ 20,33\,s \end{cases}$$

La soluzione accettabile è quella che prevede un tempo inferiore a quello che comporta la fermata dell'auto. quindi

$$\Delta t_{impatto} = 4,67\,s$$

La velocità dell'impatto sarà quindi

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i + a\cdot\Delta t_{impatto} = \mathcal{V}_i - \mathcal{V}_i + \sqrt{\mathcal{V}_i^2 + 2a\Delta S} = \sqrt{\mathcal{V}_i^2 + 2a\Delta S} = 15,65\,\frac{m}{s} = 56,35\,\frac{km}{h}$$

Se considerassimo per esempio una velocità iniziale $\mathcal{V}_i' = 108\,\frac{km}{h} = 30\,\frac{m}{s}$ allora avremmo una velocità di impatto

$$\mathcal{V}_f' = 22,89\,\frac{m}{s} = 82,41\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Cinematica - $C0059$

Testo *[C0059]* [3 3 2a]
Due punte di un diapason oscillano con una frequenza $\nu = 440\,Hz$. L'ampiezza dell'oscillazione è $A = 10^{-4}\,m$. Con quale velocità si muovono quando sono nel loro punto di equilibrio?

Spiegazione Un semplice moto armonico.

Svolgimento La frequenza del moto armonico, con riferimento al relativo moto circolare, è data da

$$\nu = \frac{\mathcal{V}}{2\pi r}$$

dove r corrisponde all'ampiezza del moto armonico. Quindi

$$\nu = \frac{\mathcal{V}}{2\pi A}$$

$$\mathcal{V} = 2\pi A\nu = 0,276\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0060$

Testo *[C0060]* [3 ⭐ 3 ⌛ 2a 📖]
Un'astronave ha la forma di un toro di raggio $r = 30\,m$ messo in rotazione attorno al suo asse centrale. In tale astronave, gli astronauti all'interno percepiscono un'accelerazione di gravità simulata attraverso una rotazione con velocità angolare ω. Quanto deve valere ω affinché l'accelerazione di gravità percepita sia pari a quella terrestre?

Spiegazione Un semplice moto circolare uniforme. L'accelerazione di gravità simulata è di fatto l'accelerazione centrifuga

Svolgimento Eguagliando l'accelerazione centrifuga al valore dell'accelerazione di gravità avremo

$$g = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0,57\,\frac{giri}{sec}$$

Problema di: Cinematica - $C0062$

Testo *[C0062]* [2 ⭐ 2 ⌛ 2a 📖]
Una palla da tennis urta contro un muro con velocità $V = 20\,\frac{m}{s}$ ad un angolo $\alpha = 60°$ rispetto alla perpendicolare alla superficie del muro, e rimbalza con lo stesso angolo. L'urto dura un tempo $\Delta t = 0,01\,s$. Calcola l'accelerazione media subita dalla pallina.

Spiegazione In questo problema semplicemente si applica la definizione di accelerazione

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

Svolgimento L'accelerazione fa cambiare la sola componente della velocità perpendicolare al muro. Quindi

$$a = \frac{\Delta V_\perp}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 20\,\frac{m}{s} \cdot \cos(30°)}{0,01\,s} = 2000\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0062a$

Testo *[C0062a]* [2 2 2a]
Una palla da tennis urta contro un muro con velocità $\mathcal{V} = 20\,\frac{m}{s}$. Tale velocità a seguito dell'urto subisce una deviazione di $\Delta\theta = 90°$, senza modificare il modulo. L'urto dura un tempo $\Delta t = 0,05\,s$. Calcola l'accelerazione media subita dalla pallina.

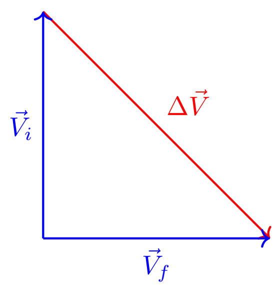
Spiegazione In questo problema semplicemente si applica la definizione di accelerazione

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\mathcal{V}}}{\Delta t}$$

Bisogna solo stare attenti a capire quanto vale la variazione di velocità, in quanto stiamo parlando di vettori e la velocità finale differisce da quella iniziale solo per la sua direzione.

Svolgimento La velocità iniziale e finale formano tra loro un angolo retto. Vista la geometria del problema, la variazione di velocità $\Delta\vec{V} = \vec{V}_f - \vec{V}_i$ forma con gli altri due vettori un triangolo rettangolo isoscele. Posso quindi trovare il suo valore con il teorema di Pitagora

$$\Delta V = \sqrt{2} \cdot V_i$$

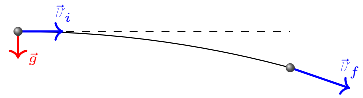


Calcolo infine l'accelerazione

$$a = \frac{\Delta\mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 20\sqrt{2}\,\frac{m}{s}}{0,05\,s} = 1131\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0063$

Testo *[C0063]* [2½ 3 1a]



Un oggetto è lanciato orizzontalmente con una velocità iniziale $\mathcal{V}_{ix} = 200\,\frac{m}{s}$. Quanto vale il modulo della velocità $\mathcal{V}_f$ del proiettile dopo un tempo $\Delta t = 5\,s$? Di quanto è sceso il proiettile?

Spiegazione In questo problema si parla di un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è l'accelerazione di gravità $g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$. Per sapere quanto vale il vettore velocità finale è necessario disegnare i vettori $\vec{\mathcal{V}}_{ix}$ e $\vec{\mathcal{V}}_y$ e sommarli tra loro. Lo spostamento dell'oggetto in verticale lo si trova con l'equazione del moto.

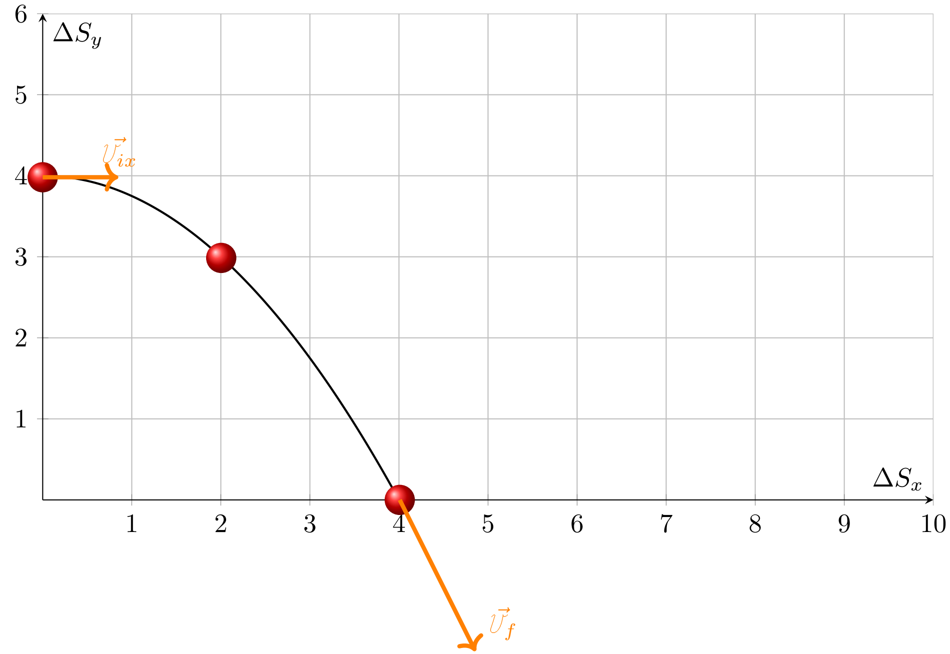
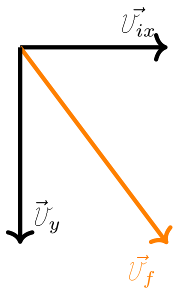


Fig. 4.17: *Traiettoria di un proiettile che si muove di moto parabolico. In arancione è rappresentato il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria del proiettile.*

Svolgimento Un moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale con un moto uniformemente accelerato in verticale. La componente orizzontale della velocità è quindi costante. Sappiamo che



$$\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_{iy} + \Delta\mathcal{V} = 0 + a \cdot \Delta t$$

E' evidente che la velocità finale è data da

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\mathcal{V}_{ix}^2 + \mathcal{V}_y^2} = \sqrt{\mathcal{V}_{ix}^2 + (g \cdot \Delta t)^2}$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{200^2\,\frac{m^2}{s^2} + \left(9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s\right)^2} = 206\,\frac{m}{s}$$

Lo spostamento in verticale del proiettile è dato da

$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_i\Delta t = \frac{1}{2} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s = 122,5\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0064$

Testo *[C0064]* [3 4 2a]
Una particella si muove di moto elicoidale con frequenza $\nu = 4\,hz$ e raggio $r = 2\,m$, attorno ad un asse γ. Sapendo che la velocità della particella è $\mathcal{V} = 70\,\frac{m}{s}$, di quanto si è spostata la particella lungo tale asse in un tempo $\Delta t = 10\,s$?

Spiegazione Un moto elicoidale è la composizione di un moto circolare uniforme su di un piano ed un moto rettilineo uniforme sull'asse perpendicolare a quel piano.

Svolgimento La velocità della particella è scomponibile in due componenti: quella parallela al piano e quella parallela all'asse. La prima è la velocità $\mathcal{V}_c$ del moto circolare, la seconda è la velocità $\mathcal{V}_r$ del moto rettilineo uniforme lungo l'asse. La velocità $\mathcal{V}_c$ è

$$\mathcal{V}_c = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu =$$

La velocità $\mathcal{V}_r$ è quindi

$$\mathcal{V}_r = \sqrt{\mathcal{V}^2 - \mathcal{V}_c^2} =$$

La distanza percorsa dalla particella lungo l'asse è quindi

$$\Delta S = \mathcal{V}_r\Delta t =$$

Problema di: Cinematica - $C0065$

Testo *[C0065]* [2 ⭐ 2 ⏳ 1a 📖]
Un'auto da corsa alla fine di una gara dista dal traguardo $\Delta S_{1t} = 600\,m$ e viaggia a velocità costante $V_1 = 80\,\frac{m}{s}$; una seconda auto dista dal traguardo $\Delta S_{2t} = 500\,m$ e viaggia a velocità costante $V_2 = 50\,\frac{m}{s}$. Quando l'auto che vince taglia il traguardo, a che distanza dal traguardo si trova l'auto che perde?

Spiegazione In questo problema entrambe le auto viaggiano a velocità costante, quindi si muovono di moto rettilineo uniforme. L'unica formula da usare sarà quindi $\Delta S = V \cdot \Delta t$.

Svolgimento Troviamo quale automobile impiega meno tempo ad arrivare al traguardo.

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{600\,m}{80\,\frac{m}{s}} = 7,5\,s$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_2} = \frac{500\,m}{50\,\frac{m}{s}} = 10\,s$$

Vince quindi la prima macchina, in quanto, anche se più lontana, ci impiega meno tempo a raggiungere il traguardo.

Se l'auto vincitrice taglia il traguardo dopo $\Delta t_1 = 7,5\,s$; in quello stesso tempo l'auto più lenta percorre

$$\Delta S_2 = V_2 \cdot \Delta t_1 = 50\,\frac{m}{s} \cdot 7,5\,s = 375\,m$$

L'auto dista quindi dal traguardo

$$d = \Delta S_{2t} - \Delta S_2 = 500\,m - 375\,m = 125\,m$$

Problema di: cinematica - $C0067$

Testo *[C0067]* [2 ⭐ 3 ⏳ 1a 📖]
Sulla Terra un pendolo ha periodo $T_{Terra} = 1\,s$. Quale periodo ha lo stesso pendolo sulla Luna, dove l'accelerazione di gravità è $g_{Luna} = 1,6\,\frac{m}{s^2}$?

Spiegazione Un pendolo si muove di moto periodico con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Svolgimento Il periodo del pendolo sulla Luna e sulla Terra può essere scritto come:

$$\begin{cases} T_{Terra} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{Terra}}} \\ T_{Luna} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{Luna}}} \end{cases}$$

da cui, dividendo la seconda per la prima

$$T_{Luna} = T_{Terra} \cdot \sqrt{\frac{g_{Terra}}{g_{Luna}}} = 2,5\,s$$

Problema di: cinematica - $C0068$

Testo *[C0068]* [3 3 2a]
Un proiettile di massa $m_1 = 20\,g$ si muove con velocità $\mathcal{V}_1 = 10\,\frac{m}{s}$ verso un oggetto fermo di massa $m_2 = 80\,g$. Con quale velocità si muove il baricentro del sistema?

Spiegazione In questo problema, utilizzando l'equazione del moto degli oggetti, si ottiene l'equazione del moto del baricentro e di conseguenza la sua velocità.

Svolgimento La posizione del baricentro del sistema è

$$X_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Utilizzando le equazioni del moto avremo

$$X_b = \frac{m_1\,(x_{1i} + \mathcal{V}_1 \Delta t) + m_2 x_{i2}}{m_1 + m_2}$$

$$X_b = \frac{m_1 \mathcal{V}_1}{m_1 + m_2}\Delta t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_{i2}$$

da cui si deduce che

$$\mathcal{V}_b = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathcal{V}_1 = 2\,\frac{m}{s}$$

Problema di: cinematica - $C0068a$

Testo *[C0068a]* [3 3 2a]
Un proiettile di massa $m_1 = 20\,g$ si muove con velocità $\mathcal{V}_1 = 10\,\frac{m}{s}$ verso un oggetto di massa $m_2 = 80\,g$ che si muove con velocità $\mathcal{V}_2 = 5\,\frac{m}{s}$ nello stesso verso. Con quale velocità si muove il baricentro del sistema?

Spiegazione In questo problema, utilizzando l'equazione del moto degli oggetti, si ottiene l'equazione del moto del baricentro e di conseguenza la sua velocità.

Svolgimento Lavoriamo in un sistema di riferimento orizzontale rivolto verso destra; metteremo i vettori verso destra con valore positivo e quelli verso sinistra con valore negativo.

La posizione del baricentro del sistema è

$$X_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Utilizzando le equazioni del moto avremo

$$X_b = \frac{m_1\,(x_{1i} + \mathcal{V}_1 \Delta t) + m_2\,(x_{2i} + \mathcal{V}_2 \Delta t)}{m_1 + m_2}$$

$$X_b = \frac{m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2}{m_1 + m_2}\Delta t + \frac{m_1 x_{i1} + m_2 x_{i2}}{m_1 + m_2}$$

da cui si deduce che

$$\mathcal{V}_b = \frac{m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2}{m_1 + m_2} = 6\,\frac{m}{s}$$

Problema di: cinematica - $C0068b$

Testo *[C0068b]* [3 3 2a]
Un proiettile di massa $m_1 = 20\,g$ si muove con velocità $\mathcal{V}_1 = 10\,\frac{m}{s}$ verso un oggetto di massa $m_2 = 80\,g$ che si muove con velocità $\mathcal{V}_2 = 5\,\frac{m}{s}$ nel verso opposto. Con quale velocità si muove il baricentro del sistema?

Spiegazione In questo problema, utilizzando l'equazione del moto degli oggetti, si ottiene l'equazione del moto del baricentro e di conseguenza la sua velocità.

Svolgimento Lavoriamo in un sistema di riferimento orizzontale rivolto verso destra; metteremo i vettori verso destra con valore positivo e quelli verso sinistra con valore negativo.

La posizione del baricentro del sistema è

$$X_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Utilizzando le equazioni del moto avremo

$$X_b = \frac{m_1\left(x_{1i} + \mathcal{V}_1 \Delta t\right) + m_2\left(x_{2i} + \mathcal{V}_2 \Delta t\right)}{m_1 + m_2}$$

$$X_b = \frac{m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2}{m_1 + m_2}\Delta t + \frac{m_1 x_{i1} + m_2 x_{i2}}{m_1 + m_2}$$

da cui si deduce che

$$\mathcal{V}_b = \frac{m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2}{m_1 + m_2}$$

Considerando che il secondo oggetto viaggia in direzione opposta al primo, avremo

$$\mathcal{V}_b = \frac{20\,g \cdot 10\,\frac{m}{s} - 80\,g \cdot 5\,\frac{m}{s}}{m_1 + m_2} = -2\frac{m}{s}$$

il che significa che il baricentro si muove nello stesso verso del secondo oggetto.

Problema di: Cinematica - $C0069$

Testo *[C0069]* [3 4 2a]
Determina la velocità di un corpo che si muove di moto elicoidale, di raggio $r = 4\,m$ e passo verticale $\Delta h = 2\,m$, sotto l'azione di un'accelerazione centripeta $a_c = 1\,\frac{m}{s^2}$.

Spiegazione La particella si muove di moto elicoidale, quindi di moto circolare uniforme su di un piano e rettilineo uniforme lungo l'asse di quel piano. In un periodo del moto circolare l'oggetto sale di un passo Δh. La velocità della particella ha due componenti. La prima è quella parallela all'asse del piano, ed è costante. La seconda è parallela al piano ed è quella coinvolta nel moto circolare uniforme.

Svolgimento La componente della velocità parallela al piano la si trova conoscendo l'accelerazione centripeta dell'oggetto.

$$a_c = \frac{\mathcal{V}_\parallel^2}{r}$$

$$\mathcal{V}_\parallel^2 = a_c \cdot r = 4\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{V}_\parallel = 2\,\frac{m}{s}$$

Il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi r}{\mathcal{V}_\parallel}$$

quindi la componente verticale della velocità è

$$\mathcal{V}_\perp = \frac{\Delta h}{T} = \frac{\Delta h \cdot \mathcal{V}_\parallel}{2\pi r}$$

$$\mathcal{V}_\perp^2 = \frac{\Delta h^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \mathcal{V}_\parallel^2$$

La velocità dell'oggetto è quindi

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_\perp^2 + \mathcal{V}_\parallel^2 = \mathcal{V}_\parallel^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta h^2}{4\pi^2 r^2}\right)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\parallel} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta h^2}{4\pi^2 r^2}\right)}$$

$$\mathcal{V} = 2\,\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{4\pi^2 16}\right)}$$

$$\mathcal{V} = 2\,\frac{m}{s} \cdot 1,006 = 2,012\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0070$

Testo *[C0070]* [1 2 1a]
Su di un campo di calcio rettangolare, di dimensioni $a = 70\,m$ e $b = 105\,m$, due atleti corrono da un vertice verso il vertice opposto. Il primo con velocità $\mathcal{V}_1 = 4\,\frac{m}{s}$ lungo il perimetro; il secondo con velocità $\mathcal{V}_2 = 5\,\frac{m}{s}$ lungo la diagonale. Quanto vantaggio, il termini di tempo, avrà l'atleta che arriva prima su quello che perde?

Spiegazione I due atleti si muovono di moto rettilineo uniforme, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Per il primo giocatore

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{\mathcal{V}_1} = \frac{175\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 43,75\,s$$

Per il secondo giocatore

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{\mathcal{V}_2} = \frac{126,2\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 25,24\,s$$

Quindi il secondo atleta arriva dopo un tempo

$$T = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 18,51\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0070a$

Testo *[C0070a]* [1 ★ 2 ⌛ 1a 📖]
Su di un campo quadrato, di lato $L = 70\,m$, due persone corrono da un vertice verso il vertice opposto. Il primo con velocità $U_1 = 4\,\frac{m}{s}$ lungo il perimetro; il secondo con velocità $U_2 = 5\,\frac{m}{s}$ lungo la diagonale. Calcola la lunghezza del percorso che fanno ed il tempo che ci impiegano. Quanto vantaggio, il termini di tempo, avrà l'atleta che arriva prima su quello che perde?

Spiegazione I due atleti si muovono di moto rettilineo uniforme, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Per il primo giocatore percorre due dei quattro lati del quadrato, quindi

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{U_1} = \frac{140\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 35\,s$$

Il secondo giocatore percorre la diagonale, quindi prima dobbiamo calcolarci la lunghezza della diagonale

$$\Delta S_2 = \sqrt{L^2 + L^2} \simeq 99\,m$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{U_2} = \frac{99\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 19,8\,s$$

Quindi il secondo atleta arriva dopo un tempo

$$T = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 15,2\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0070b$

Testo *[C0070b]* [1 ★ 2 ⌛ 1a 📖]
Su di un campo circolare, di raggio $r = 70\,m$, due atleti corrono da un punto verso il punto opposto sulla circonferenza. Il primo con velocità $U_1 = 4\,\frac{m}{s}$ lungo la circonferenza; il secondo con velocità $U_2 = 5\,\frac{m}{s}$ lungo il diametro. Disegna le due persone ed il percorso che fanno. Calcola la lunghezza del percorso che fanno. Calcola il tempo che impiegano ad arrivare. Quanto vantaggio, il termini di tempo, avrà l'atleta che arriva prima su quello che perde?

Spiegazione I due atleti si muovono con velocità in modulo costante, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Il primo giocatore percorre metà della circonferenza, quindi

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{U_1} = \frac{\pi \cdot 70\,m}{4\,\frac{m}{s}} \simeq 55\,s$$

Il secondo giocatore percorre il diametro della circonferenza, quindi

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{U_2} = \frac{2 \cdot 70\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 28\,s$$

Quindi il secondo atleta arriva dopo un tempo

$$T = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 27\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0070c$

Testo *[C0070c]* [1 2 1a]
Su di un campo quadrato, di lato $L = 20\,m$, due persone corrono da un vertice verso il vertice opposto. Il primo con velocità $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$ lungo il perimetro; il secondo con velocità V_2 lungo la diagonale arriva a destinazione impiegando lo stesso tempo del primo. Disegna le due persone ed il percorso che fanno. Calcola la lunghezza del percorso che fanno. Calcola il tempo che impiega il primo ad arrivare. Calcola la velocità del secondo.

Spiegazione I due atleti si muovono con velocità in modulo costante, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Il primo giocatore percorre metà del perimetro del quadrato, quindi

$$\Delta S_1 = 2L$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{2L}{V_1} = \frac{40\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 10\,s$$

Il secondo giocatore percorre la diagonale del quadrato impiegando lo stesso tempo, quindi

$$\Delta S_2 = \sqrt{L^2 + L^2} = 28,3\,m$$

$$V_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = \frac{\sqrt{L^2 + L^2}}{\Delta t_2} = \frac{28,3\,m}{10\,s} = 2,83\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0070d$

Testo *[C0070d]* [1 2 1a]
Su di un campo rettangolare, di lati $L = 10\,m$ e $H = 24\,m$, due persone corrono da un vertice verso il vertice opposto. Il primo con velocità $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$ lungo il perimetro; il secondo con velocità V_2 lungo la diagonale arriva a destinazione impiegando lo stesso tempo del primo. Disegna le due persone ed il percorso che fanno. Calcola la lunghezza del percorso che fanno. Calcola il tempo che impiega il primo ad arrivare. Calcola la velocità del secondo.

Spiegazione I due atleti si muovono con velocità in modulo costante, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Il primo giocatore percorre metà del perimetro del quadrato, quindi

$$\Delta S_1 = L + H = 34\,m$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{34\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 8,5\,s$$

Il secondo giocatore percorre la diagonale del quadrato impiegando lo stesso tempo, quindi

$$\Delta S_2 = \sqrt{L^2 + H^2} = 26\,m$$

$$V_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = \frac{26\,m}{8,5\,s} = 3,06\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0070e$

Testo *[C0070e]* [1 2 1a]
Un ragazzo cammina $\Delta S_1 = 8\,km$ verso nord e poi gira di $90°$ e cammina $\Delta S_2 = 15\,km$ verso est, viaggiando alla velocità $\mathcal{U}_a = 17\,\frac{km}{h}$. Un amico parte ed arriva negli stessi punti, ma muovendosi in linea retta e viaggiando alla velocità $\mathcal{U}_b = 5\,\frac{km}{h}$. Dopo quanto tempo arriva il primo rispetto al secondo?

Spiegazione I due atleti si muovono con velocità in modulo costante, percorrendo distanze differenti con velocità differenti. Calcolando quanto tempo impiegano ad arrivare dall'altra parte del campo possiamo indicare la risposta al quesito del problema.

Svolgimento Il primo giocatore percorre metà del perimetro del rettangolo, quindi

$$\Delta S_a = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 23\,km$$

$$\Delta t_a = \frac{\Delta S_a}{\mathcal{U}_a} = \frac{23\,km}{17\,\frac{km}{h}} = 1,35\,h$$

Il secondo giocatore percorre l'ipotenusa del rettangolo che si viene a formare disegnando i due percorsi, quindi

$$\Delta S_b = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = 17\,km$$

$$\Delta t_b = \frac{\Delta S_b}{\mathcal{U}_b} = \frac{17\,km}{5\,\frac{km}{h}} = 3,4\,h$$

Il primo arriva quindi

$$\Delta t_x = \Delta t_b - \Delta t_a = 2,05\,h$$

Problema di: Cinematica - $C0070f$

Testo *[C0070f]* [1 3 1a]
Un ragazzo cammina $\Delta S_1 = 8\,km$ verso nord e poi gira di $90°$ e cammina $\Delta S_2 = 15\,km$ verso est, infine gira di $90°$ e cammina $\Delta S_3 = 8\,km$ verso sud, il tutto viaggiando alla velocità $\mathcal{U}_a = 5\,\frac{km}{h}$. Un amico parte ed arriva negli stessi punti, ma muovendosi in linea retta e viaggiando alla velocità $\mathcal{U}_b = 10\,\frac{km}{h}$. Dopo quanto tempo arriva il primo rispetto al secondo?

Spiegazione Per rispondere alla domanda dobbiamo sapere in quanto tempo le due persone percorrono il loro rispettivo percorso. è necessario disegnare tale percorso.

Svolgimento Il primo ragazzo percorre in tutto $\Delta S_1 = 31\,km$ e quindi ci impiega un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{\mathcal{U}_1} = 6,2\,h$$

L'amico percorre invece una distanza pari a $\Delta S_2 = 15\,km$ e quindi ci impiega un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{\mathcal{U}_2} = 1,5\,h$$

Quindi il primo ragazzo arriva alla fine del percorso $\Delta t = 6,2\,h - 1,5\,h = 4,7\,h$

Problema di: Cinematica - $C0070g$

Testo *[C0070g]* [1 2 1a]
Su di un campo da calcio rettangolare di dimensioni $l = 100\,m$ e $h = 70\,m$, Marco e Luigi si muovono da un vertice del rettangolo a quello opposto. Marco si muove lungo il perimetro, mentre Luigi si muove lungo la diagonale del campo. Sapendo che Marco corre alla velocità $\mathcal{V}_M = 6\,\frac{m}{s}$ e che Luigi corre più lento alla velocità $\mathcal{V}_L = 5\,\frac{m}{s}$, chi arriva prima?

Spiegazione Marco percorre un certo tratto di strada ad una certa velocità. Luigi percorre un tratto di strada più corto viaggiando ad una velocità minore. Per sapere chi arriva prima a destinazione bisogna calcolare i tempi che ci impiegano.

Svolgimento La distanza percorsa da Marco è

$$\Delta S_M = l + h = 170\,m$$

La distanza percorsa da Luigi è pari alla lunghezza della diagonale del rettangolo

$$\Delta S_L = \sqrt{l^2 + h^2} \sim 122\,m$$

Il tempo impiegato da Marco è

$$\Delta t_M = \frac{\Delta S_M}{\mathcal{V}_M} = \frac{170\,m}{6\,\frac{m}{s}} = 28,3\,s$$

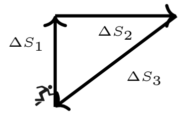
Il tempo impiegato da Luigi è

$$\Delta t_L = \frac{\Delta S_L}{\mathcal{V}_L} = \frac{122\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 24,2\,s$$

Luigi Arriva prima di Marco

Problema di: Cinematica - $C0071a$

Testo *[C0071a]* [2 2 1a]



Un ragazzo cammina lungo il perimetro di un triangolo rettangolo. Percorre il primo cateto lungo $\Delta S_1 = 30\,m$ alla velocità $\mathcal{V}_1 = 10\,\frac{m}{s}$, il secondo cateto lungo $\Delta S_2 = 40\,m$ alla velocità $\mathcal{V}_2 = 2\,\frac{m}{s}$, ed infine l'ipotenusa alla velocità $\mathcal{V}_3 = 5\,\frac{m}{s}$. Calcola la velocità media sull'intero tragitto.

Spiegazione Il ragazzo in questione fa tre tratti di strada a tre differenti velocità. La velocità media scalare la possiamo trovare facendo il rapporto tra la lunghezza del percorso fatto ed il tempo impiegato.

Svolgimento La lunghezza dell'ipotenusa del triangolo è

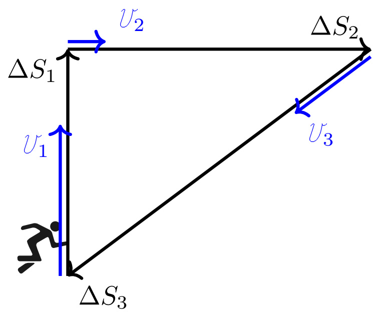
$$\Delta S_3 = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = \sqrt{900\,m^2 + 1600\,m^2} = 50\,m$$

I tempi impiegati a percorrere i tre lati del triangolo sono:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{\Delta S_1}{\mathcal{V}_1} = \dfrac{30\,m}{10\,\frac{m}{s}} = 3\,s \\ \Delta t_2 = \dfrac{\Delta S_2}{\mathcal{V}_2} = \dfrac{40\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 20\,s \\ \Delta t_3 = \dfrac{\Delta S_3}{\mathcal{V}_3} = \dfrac{50\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 10\,s \end{cases}$$

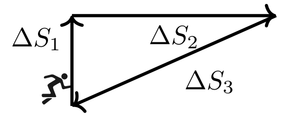
La velocità media scalare è quindi

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{120\,m}{33\,s} = \frac{40}{11}\,\frac{m}{s}$$



Problema di: Cinematica - $C0071b$

Testo *[C0071b]* [2 2 1a]
Un ragazzo cammina $\Delta S_1 = 5\,m$ verso nord, $\Delta S_2 = 12\,m$ verso est e poi torna indietro in linea retta. Il ragazzo viaggia a velocità $\mathcal{V}_1 = 2\,\frac{m}{s}$ lungo il primo tratto, $\mathcal{V}_2 = 3\,\frac{m}{s}$ lungo il secondo tratto, ed $\mathcal{V}_3 = 5\,\frac{m}{s}$ al ritorno. Calcola la sua velocità media.



Spiegazione La persona in questione fa un percorso di forma triangolare. IN particolare è un triangolo rettangolo. IL calcolo della velocità media si effettua sapendo la strada complessivamente fatta ed il tempo impiegato a farla.

Svolgimento La lunghezza dell'ipotenusa del triangolo è

$$\Delta S_3 = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = \sqrt{25\,m^2 + 144\,m^2} = 13\,m$$

I tempi impiegati a percorrere i tre lati del triangolo sono:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{\Delta S_1}{\mathcal{V}_1} = \dfrac{5\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 2,5\,s \\ \Delta t_2 = \dfrac{\Delta S_2}{\mathcal{V}_2} = \dfrac{12\,m}{3\,\frac{m}{s}} = 4\,s \\ \Delta t_3 = \dfrac{\Delta S_3}{\mathcal{V}_3} = \dfrac{13\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 2,6\,s \end{cases}$$

La velocità media scalare è quindi

$$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{30\,m}{9,1\,s} = 3,3\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0072$

Testo *[C0072]* [2 1 1a]
Una palla da tennis urta perpendicolarmente contro un muro con velocità $\mathcal{V} = 20\,\frac{m}{s}$ e rimbalza tornando indietro. L'urto dura un tempo $\Delta t = 0,01\,s$. Calcola l'accelerazione media subita dalla pallina.

Spiegazione In questo problema semplicemente si applica la definizione di accelerazione

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\mathcal{V}}}{\Delta t}$$

Svolgimento L'accelerazione fa cambiare la sola componente della velocità perpendicolare al muro. Quindi

$$a = \frac{\Delta \mathcal{V}_\perp}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 20\,\frac{m}{s}}{0,01\,s} = 4000\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0073$

Testo *[C0073]* [2 3 2a]
Un proiettile è lanciato con un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 50\,\frac{m}{s}$. Calcola la sua gittata (la distanza alla quale il proiettile cade).

Spiegazione In questo problema si applicano le equazioni del moto parabolico. Calcolato il tempo di volo, si ricava la distanza orizzontale percorsa.

Svolgimento Cominciamo con il trovare i valori delle componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{ix} = \mathcal{V}_i \cos\alpha = 25\sqrt{2}\,\frac{m}{s} \\ \mathcal{V}_{ix} = \mathcal{V}_i \sin\alpha = 25\sqrt{2}\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Il tempo di volo lo si ricava dal moto uniformemente accelerato in verticale imponendo che lo spostamento in verticale sia nullo

$$\Delta S = \frac{1}{2} g \Delta t^2 + \mathcal{V}_{iy} \Delta t$$
$$0 = \left(\frac{1}{2} g \Delta t + \mathcal{V}_{iy}\right) \Delta t$$

Questa equazione ha due soluzioni:

$$\Delta t_1 = 0$$
$$\Delta t_2 = \frac{-2\mathcal{V}_{iy}}{g} = 7,22\,s$$

La prima rappresenta il tempo trascorso dalla partenza del proiettile alla partenza per proiettile; la seconda il tempo trascorso dalla partenza del proiettile all'istante di impatto al suolo. In entrambi i casi lo spostamento in verticale risulta infatti nullo.

La distanza percorsa in orizzontale, chiamata *gittata*, è

$$\Delta S_x = \mathcal{V}_{ix} \Delta t_2 = \frac{-2\mathcal{V}_{ix}\mathcal{V}_{iy}}{g} = 1020,41\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0074$

Testo [C0074] [3 3 2a]
Una barca percorre su di un fiume un tragitto $\Delta S = 75\,km$. Quando viaggia a favore di corrente impiega un tempo $\Delta t_1 = 3\,h$. Quando viaggia controcorrente impiega un tempo $\Delta t_2 = 5\,h$. Quali sono le velocità della barca rispetto all'acqua e dell'acqua rispetto al terreno?

Spiegazione La velocità del fiume si somma o si sottrae alla velocità della barca a seconda che si viaggi a favore o controcorrente.

Svolgimento Andando a favore di corrente la velocità della barca rispetto al terreno è data da

$$V_+ = V_b + V_f = \frac{75\,km}{3\,h} = 25\,\frac{km}{h}$$

Andando controcorrente la velocità della barca rispetto al terreno è data da

$$V_- = V_b - V_f = \frac{75\,km}{5\,h} = 15\,\frac{km}{h}$$

Avremo quindi

$$\begin{cases} V_b + V_f = 25\,\frac{km}{h} \\ V_b - V_f = 15\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 2V_b = 40\,\frac{km}{h} \\ 2V_f = 10\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_b = 20\,\frac{km}{h} \\ V_f = 5\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

Problema di: Cinematica - $C0074a$

Testo [C0074a] [3 3 2a]
Una barca percorre su di un fiume un tragitto $\Delta S = 150\,km$. Quando viaggia a favore di corrente impiega un tempo $\Delta t_1 = 6\,h$. Raddoppiando la potenza del motore, raddoppia la sua velocità rispetto all'acqua e quindi impiega un tempo $\Delta t_2 = 5\,h$. Quali sono le velocità della barca rispetto all'acqua e dell'acqua rispetto al terreno?

Spiegazione La velocità del fiume si somma o si sottrae alla velocità della barca a seconda che si viaggi a favore o controcorrente.

Svolgimento Andando a favore di corrente la velocità della barca rispetto al terreno è data da

$$V_+ = V_b + V_f = \frac{150\,km}{6\,h} = 25\,\frac{km}{h}$$

Andando al doppio della velocità, la velocità della barca rispetto al terreno è data da

$$V_{++} = V_b + 2V_f = \frac{150\,km}{5\,h} = 30\,\frac{km}{h}$$

Avremo quindi

$$\begin{cases} V_b + V_f = 25\,\frac{km}{h} \\ 2V_b + V_f = 30\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} V_b = 5\,\frac{km}{h} \\ V_f = 20\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

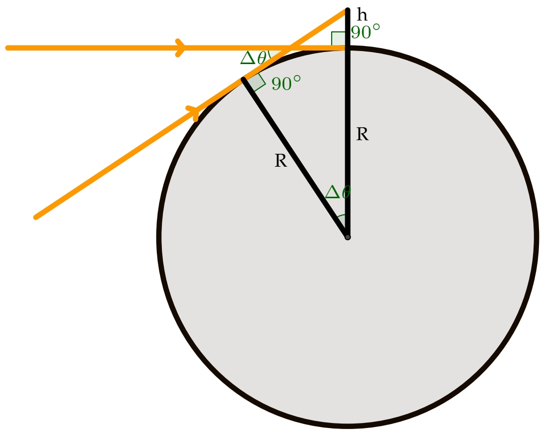
Problema di: Cinematica - $C0075$

Testo *[C0075]* [3 3 2a]
Marco e Andrea osservano il tramonto sul mare dalla spiaggia. Marco, sdraiato, vede l'ultimo raggio di sole alle ore 20:30. Andrea è in piedi accanto a lui, ed i suoi occhi si trovano a $h = 1,79\,m$ di altezza sopra quelli di Marco. Andrea vede l'ultimo raggio di sole $\Delta t = 10,3\,s$ dopo Marco. Quanto vale il raggio della Terra?

Spiegazione La Terra ruota, quindi nel sistema di riferimento della Terra il Sole le ruota intorno. Nel tempo indicato il Sole percorre un angolo facilmente calcolabile; un disegno della geometria del problema renderà facile trovare la soluzione

Svolgimento Nell'intervallo di tempo indicato la Terra ha ruotato di un angolo

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot 10\,s = 7,27 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s}$$



Considerando il triangolo rettangolo Formato con il raggio della Terra, avremo

$$(r + h)\cos(\Delta\theta) = r$$

da cui

$$r = \frac{\Delta h \cos(\Delta\theta)}{1 - \cos(\Delta\theta)} = 6380,816\,km$$

Ovviamente la precisione della misura andrebbe valutata, ma non è lo scopo di questo esercizio.

Problema di: Cinematica - $C0076$

Testo *[C0076]* [2 3 2a]
Un oggetto viene lanciato verticalmente verso l'alto. Dopo $\Delta t_1 = 3\,s$ si trova all'altezza h e dopo altri $\Delta t = 2\,s$ raggiunge la sua massima altezza. Calcola prima la velocità iniziale dell'oggetto e successivamente calcola h.

Spiegazione Un semplice moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Sapendo che dopo $\Delta t = 5\,s$ l'oggetto raggiunge la sua massima altezza, avremo

$$\Delta V = 0 - V_i = a\Delta t$$
$$V_i = -\left(-9,8\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot 5\,s = 49\,\frac{m}{s}$$

Quindi

$$h = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t = 102,9\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0077$

Testo *[C0077]* [3 3 3a]
Un oggetto è lanciato verso l'alto da un alieno su di un pianeta sconosciuto. Sappiamo che l'oggetto ha raggiunto l'altezza massima $H = 25\,m$ ed è ricaduto a terra in un tempo $T = 5\,s$. Quanto vale l'accelerazione di gravità del pianeta? Con quale velocità iniziale è stato lanciato l'oggetto?

Spiegazione Un semplice moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Sapendo che l'oggetto ha raggiunto l'altezza massima in un tempo pari a metà del tempo di volo, possiamo scrivere due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}aT^2 + V_iT \\ H = \frac{1}{8}aT^2 + \frac{1}{2}V_iT \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{8}aT^2 + \frac{1}{4}V_iT \\ H = \frac{1}{8}aT^2 + \frac{1}{2}V_iT \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda la prima avremo

$$H = \frac{1}{4}V_iT$$

$$V_i = \frac{4H}{T} = 20\,\frac{m}{s}$$

Ed infine

$$a = \frac{-2V_i}{T} = \frac{-8H}{T^2} = -8\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - $C0078$

Testo *[C0078]* [3 3 3a]
Due treni si stanno dirigendo uno contro l'altro sullo stesso binario viaggiando rispettivamente alla velocità $\mathcal{V}_1 = 108\,\frac{km}{h}$ e $\mathcal{V}_2 = 144\,\frac{km}{h}$. Quando si trovano alla distanza di $D = 1,275\,km$ vengono contemporaneamente avvertiti dai sistemi di allarme e cominciano a frenare entrambi con accelerazione $a = 1\,\frac{m}{s}$. Si scontreranno? I tal caso calcola la velocità dell'impatto, altrimenti la distanza a cui si fermano.

Spiegazione Un semplice moto uniformemente accelerato. Questo problema è più facile da risolvere se si sceglie in modo opportuno il sistema di riferimento.

Svolgimento Consideriamo il sistema di riferimento di uno dei due treni. Esso vede se stesso fermo, e l'altro treno che gli si sta avvicinando alla velocità iniziale

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 256\,\frac{km}{h} = 70\,\frac{m}{s}$$

. L'accelerazione con cui il treno in moto sta frenando è $a = 2\,\frac{m}{s^2}$. Il sistema di riferimento è orientato con l'asse delle x verso il treno in corsa. Il tempo che i due treni impiegano a coprire la distanza D è dato dall'equazione del moto uniformemente accelerato

$$D = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_i\Delta t$$

Tutte le grandezze fisiche che utilizziamo sono espresse nelle grandezze standard del Sistema Internazionale di Misura. Per il momento tralasciamo di indicarle. Nel sistema di riferimento scelto la distanza è negativa, così come la velocità iniziale.

$$-1275 = \Delta t^2 - 70\Delta t$$

$$\Delta t = 35 \pm \sqrt{35^2 - 1275}$$

I due treni quindi non si scontrano.

Il tempo necessario per fermarsi è dato da

$$\Delta V = a\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{a} = \frac{70\,\frac{m}{s}}{2\,\frac{m}{s^2}} = 35\,s$$

Lo spazio percorso è quindi

$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{V}_i\Delta t = 1225\,m - 2450\,m = -1225\,m$$

I treni si sono quindi avvicinati di $1225\,m$ e si sono fermati alla distanza

$$L = 1275\,m - 1225\,m = 50\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0078a$

Testo *[C0078a]* [3 3 3a]
Due treni si stanno dirigendo uno contro l'altro sullo stesso binario viaggiando rispettivamente alla velocità $V_1 = 108\,\frac{km}{h}$ e $V_2 = 144\,\frac{km}{h}$. Quando si trovano alla distanza di $D = 1,2\,km$ vengono contemporaneamente avvertiti dai sistemi di allarme e cominciano a frenare entrambi con accelerazione $a = 1\,\frac{m}{s}$. Si scontreranno? I tal caso calcola la velocità dell'impatto, altrimenti la distanza a cui si fermano.

Spiegazione Un semplice moto uniformemente accelerato. Questo problema è più facile da risolvere se si sceglie in modo opportuno il sistema di riferimento.

Svolgimento Consideriamo il sistema di riferimento di uno dei due treni. Esso vede se stesso fermo, e l'altro treno che gli si sta avvicinando alla velocità iniziale

$$V_i = V_1 + V_2 = 256\,\frac{km}{h} = 70\,\frac{m}{s}$$

. L'accelerazione con cui il treno in moto sta frenando è $a = 2\,\frac{m}{s^2}$. Il sistema di riferimento è orientato con l'asse delle x verso il treno in corsa. Il tempo che i due treni impiegano a coprire la distanza D è dato dall'equazione del moto uniformemente accelerato

$$D = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t$$

Tutte le grandezze fisiche che utilizziamo sono espresse nelle grandezze standard del Sistema Internazionale di Misura. Per il momento tralasciamo di indicarle. Nel sistema di riferimento scelto la distanza è negativa, così come la velocità iniziale.

$$-1200 = \Delta t^2 - 70\Delta t$$

$$\Delta t = 35 \pm \sqrt{35^2 - 1200}$$

$$\Delta t = \begin{cases} 30\,s \\ 40\,s \end{cases}$$

Il valore fisicamente significativo è il primo

$$\Delta t = 30\,s$$

.

La velocità del treno dopo questo intervallo di tempo è

$$\Delta V = V_f - V_i = a\Delta t$$

$$V_f = -70\,\frac{m}{s} + 2\,\frac{m}{s^2}\cdot 30\,s = -10\,\frac{m}{s}$$

Questa è la velocità con cui i due treni si scontrano.

Problema di: Cinematica - $C0079$

Testo *[C0079]* [1 ⭐ 2 ⌛ 1a 📖]
Calcola in quanto tempo un oggetto che cade partendo da fermo percorre i primi $\Delta S_a = 50\,cm$ ed in quanto tempo percorre i secondi $\Delta S_b = 50\,cm$.

Spiegazione Un semplice moto uniformemente accelerato.

Svolgimento Chiamiamo Δt_a e Δt_b i due tempi che il problema chiede di calcolare.

L'equazione oraria del moto uniformemente accelerato per un oggetto che parte da fermo è

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

da cui

$$\Delta t_a = \sqrt{\frac{2\Delta S_a}{a}} = 0,32\,s$$

Per un percorso lungo $\Delta S_t = \Delta S_a + \Delta S_b = 1\,m$ l'oggetto impiegherebbe

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2\Delta S_t}{a}} = 0,45\,s$$

per cui

$$\Delta t_b = 0,13\,s$$

Si vede che il tempo impiegato a percorre il secondo tratto di strada, nonostante tale tratto sia della stessa lunghezza, è molto minore. Infatti man mano che passa il tempo l'oggetto è sempre più veloce.

Problema di: Cinematica - $C0080$

Testo *[C0080]* [1 ⭐ 1 ⌛ 1a 📖]
Un'auto percorre un tragitto lungo $\Delta S = 120\,km$ alla velocità $V_1 = 110\,\frac{km}{h}$. Il ritorno lo percorre alla velocità $V_2 = 130\,\frac{km}{h}$. Quanto tempo ha risparmiato al ritorno rispetto all'andata?

Spiegazione Un semplice moto rettilineo uniforme.

Svolgimento All'andata l'auto ha impiegato

$$\Delta t = \frac{120\,km}{110\,\frac{km}{h}} = 1,091\,h = 3927\,s$$

Al ritorno l'auto ha impiegato

$$\Delta t = \frac{120\,km}{130\,\frac{km}{h}} = 0,923\,h = 3323\,s$$

Quindi il tempo risparmiato è

$$\Delta T = \Delta t_2 - \Delta t_1 = -604\,s = -10,1\,min$$

Problema di: Cinematica - $C0081$

Testo *[C0081]* [3½ 5 3a]
Due atleti, Marco e Carlo, corrono una gara di velocità. Alla partenza entrambi loro si muovono con accelerazione costante di valore rispettivamente $a_M = 3\,\frac{m}{s^2}$ e $a_C = 3,5\,\frac{m}{s^2}$. Raggiunta la loro velocità massima, rispettivamente $V_{xM} = 19,2\,\frac{m}{s}$ e $V_{xC} = 14\,\frac{m}{s}$, si muovono di moto rettilineo uniforme. Si può notare che Carlo inizialmente si troverà davanti a Marco, ma successivamente verrà da lui raggiunto. Dopo quanto tempo questo accade?

Spiegazione Moti uniformemente accelerati e rettilinei uniformi. Questo problema va scomposto in molti intervalli di tempo distinti, a seconda di quali sono i tipi di movimento dei due atleti.

Svolgimento Consideriamo la corsa di Marco. Lui accelera fino alla velocità massima in un tempo

$$\Delta t_{1M} = \frac{\Delta V_M}{a_M} = \frac{19,2\,\frac{m}{s}}{3\,\frac{m}{s^2}} = 6,4\,s$$

Consideriamo la corsa di Carlo. Lui accelera fino alla velocità massima in un tempo

$$\Delta t_{1C} = \frac{\Delta V_C}{a_C} = \frac{14\,\frac{m}{s}}{3,5\,\frac{m}{s^2}} = 4\,s$$

Possiamo quindi suddividere la gara in tre differenti fasi: La prima, per $0 \leq t < \Delta t_{1C}$ nella quale entrambi si muovono di moto uniformemente accelerato; la seconda per per $\Delta t_{1C} \leq t < \Delta t_{1M}$ nella quale Marco si muove di moto rettilineo uniforme e Carlo di moto uniformemente accelerato; la terza per $t \geq \Delta t_{1M}$ nella quale entrambi si muovono di moto rettilineo uniforme.

Mettiamoci nel sistema di riferimento di Marco. Lui vede Carlo allontanarsi per poi riavvicinarsi. Analizziamo cosa succede nelle tre fasi di gara.

Prima fase .

L'equazione del moto di Carlo nel sistema di riferimento di Marco è

$$\Delta S = \frac{1}{2} a_{rel} \Delta t^2 + V_{i-rel} \Delta t$$

Che alla fine della prima fase mi permette di calcolare di quanto si è spostato Carlo rispetto a Marco

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \frac{m}{s^2} \cdot (4\,s)^2 = 4\,m$$

Quindi Carlo si trova nella posizione $S_1 = S_0 + \Delta S_1 = 4\,m$ avanti a Marco.

Sempre alla fine della prima fase possiamo calcolare le velocità con cui Carlo si sta allontanando da Marco

$$V_{f1} = V_i + a_{rel} \Delta t = 0,5\,\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = 2\,\frac{m}{s}$$

Seconda fase .

L'equazione del moto di Carlo nel sistema di riferimento di Marco è

$$\Delta S = \frac{1}{2} a_{rel} \Delta t^2 + V_{i-rel} \Delta t$$

La seconda fase dura un tempo

$$\Delta t_2 = 6,4\,s - 4\,s = 2,4\,s$$

Che alla fine della seconda fase mi permette di calcolare di quanto si è spostato Carlo rispetto a Marco

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-3\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot (2,4\,s)^2 + 4\,\frac{m}{s} \cdot 2,4\,s = 0,96\,m$$

In questa fase Carlo si allontana ancora. Quindi adesso Carlo si trova nella posizione $S_2 = S_1 + \Delta S_2 = 4,96\,m$ avanti a Marco

Terza fase .

Adesso entrambi viaggiano di moto rettilineo uniforme. Quindi

$$\Delta S = V_{rel} \Delta t$$

Il tempo adesso necessario a Marco per raggiungere Carlo è quindi

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta S_3}{V_{3rel}} = \frac{-4,96\,m}{-5,2\,s} = 0,954\,s$$

Marco raggiunge Carlo dopo un tempo complessivo di

$$\Delta t_{tot} = 6,4\,s + 0,954\,s = 7,354\,s$$

dall'inizio della gara.

Entrambi in totale hanno percorso

$$\Delta S_{tot} = \frac{1}{2} \cdot 3\,\frac{m}{s^2} \cdot (6,4\,s)^2 + 19,2\,\frac{m}{s} \cdot 0,95\,s = 79,76\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0082$

Testo *[C0082]* [3 3 2a]

Un monopattino elettrico raggiunge al massimo la velocità $V_{max} = 7,5\,\frac{m}{s}$ ed ha, sia in partenza che in frenata, un'accelerazione $a = 1,5\,\frac{m}{s^2}$. Se deve percorrere un tratto di strada lungo $\Delta S_{tot} = 100\,m$, partendo da fermo ed arrivando fermo, quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Moto uniformemente accelerato e rettilineo uniforme. La partenza e la frenata finale sono moti che avvengono tra le stesse velocità e con la stessa accelerazione, solo a valori invertiti.

Svolgimento Per il monopattino, la fase di accelerazione dura

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{a} = \frac{7,5\,\frac{m}{s} - 0\,\frac{m}{s}}{1,5\,\frac{m}{s^2}} = 5\,s$$

Durante la fase di accelerazione esso percorre

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = 18,75\,m$$

La stessa distanza e lo stesso tempo valgono anche per la fase di frenata.

Il percorso fatto a velocità costante è quindi

$$\Delta S_2 = \Delta S_{tot} - 2\Delta S_1 = 62,5\,m$$

e questo percorso viene fatto in un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_{max}} = 8,3\,s$$

Quindi il tempo complessivo impiegato è

$$\Delta t_{tot} = 18,3\,s$$

Problema di: Moto circolare uniforme - $C0092$

Testo *[C0092]* [2 2 2a]
Due auto stanno seguendo un percorso circolare, entrambe in senso orario, su strade concentriche di raggio rispettivamente $r_1 = 100\,m$ e $r_2 = 80\,m$ con velocità uguale $\mathcal{V} = 10\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo la seconda auto avrà fatto un giro in più della prima?

Spiegazione Moto circolare uniforme: è sufficiente conoscere le formule che descrivono il moto per rispondere alle domande del problema.

Svolgimento Un giro intero corrisponde ad un angolo $\Delta\theta = 2\pi$. La velocità angolare della prima auto è

$$\omega_1 = \frac{\mathcal{V}}{r_1} = 0,1\,\frac{rad}{s}$$

La velocità angolare della seconda auto è

$$\omega_2 = \frac{\mathcal{V}}{r_2} = 0,125\,\frac{rad}{s}$$

La velocità angolare relativa è

$$\omega_{rel} = \omega_2 - \omega_1 = 0,025\,\frac{rad}{s}$$

Il tempo per fare un giro in più è

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{rel}} = 251\,s$$

Problema di: Moto circolare uniforme - $C0092a$

Testo *[C0092a]* [2 2 2a]
Due auto stanno seguendo un percorso circolare, in senso orario una rispetto all'altra, su strade concentriche di raggio rispettivamente $r_1 = 100\,m$ e $r_2 = 80\,m$ con velocità uguale $\mathcal{V} = 10\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo le due auto, inizialmente affiancate, saranno nuovamente affiancate?

Spiegazione Moto circolare uniforme: è sufficiente conoscere le formule che descrivono il moto per rispondere alle domande del problema.

Svolgimento Un giro intero corrisponde ad un angolo $\Delta\theta = 2\pi$. La velocità angolare della prima auto è

$$\omega_1 = \frac{\mathcal{V}}{r_1} = 0,1\,\frac{rad}{s}$$

La velocità angolare della seconda auto è

$$\omega_2 = \frac{\mathcal{V}}{r_2} = 0,125\,\frac{rad}{s}$$

La velocità angolare relativa, andando in verso opposto, è

$$\omega_{rel} = \omega_2 + \omega_1 = 0,225\,\frac{rad}{s}$$

Il tempo per fare un giro ed essere nuovamente affiancate è

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{rel}} = 28\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0093$

Testo *[C0093]* [5 ⭐ 5 ⌛ 5a 📖]
Un suono si sta propagando da un punto A verso un punto B distante $\Delta S = 500\,m$. I due punti sono a temperatura differente $T_A = 0°C$ e $T_B = 20\,°$C. Supponendo che la temperatura vari linearmente tra i due punti e che la velocità del suono segua la legge $V_{suono} = \alpha\sqrt{T}$, con $\alpha = 20\,\frac{m}{s\sqrt{K}}$, indicare quanto tempo impiega il suono ad arrivare in B.

Spiegazione Un problema di cinematica in cui la velocità del moto cambia linearmente con la posizione del corpo. Serve quindi il calcolo integrale.

Svolgimento Cominciamo con lo scrivere l'equazione della temperatura in funzione della distanza x dal punto di partenza, tenendo conto che è una relazione lineare:

$$T = T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x$$

La velocità della particella è quindi

$$V = \alpha\sqrt{T}$$

$$V = \alpha\sqrt{T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x}} = \alpha dt$$

$$\int_0^{\Delta S} \frac{dx}{\sqrt{T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x}} = \int_0^{\Delta t} \alpha dt$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta T}\sqrt{T_A + \frac{\Delta T}{\Delta S}x}\Bigg|_0^{\Delta S} = \alpha t|_0^{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta T}\sqrt{T_A + \Delta T} - \frac{\Delta S}{\Delta T}\sqrt{T_A} = \alpha\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta S}{\Delta T}\sqrt{T_B} - \frac{\Delta S}{\Delta T}\sqrt{T_A}\right)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{\alpha\Delta T}\left(\sqrt{T_B} - \sqrt{T_A}\right)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{\alpha\left(\sqrt{T_B} + \sqrt{T_A}\right)}$$

Problema di: Moto circolare uniforme - $C0094$

Testo *[C0094]* [1 ⭐ 2 ⌛ 2a 📖]
Un oggetto sta facendo un percorso circolare di raggio $r = 20\,m$ con velocità costante $V = 10\,\frac{m}{s}$. Calcola l'accelerazione che sta subendo e la velocità a cui dovrebbe andare se l'accelerazione raddoppiasse.

Spiegazione Moto circolare uniforme: è sufficiente conoscere le formule che descrivono il moto per rispondere alle domande del problema.

Svolgimento L'accelerazione iniziale subita dall'oggetto è

$$a = \frac{V^2}{r} = 5\,\frac{m}{s^2}$$

Se l'accelerazione raddoppiasse, arrivando al valore $a_2 = 10\,\frac{m}{s^2}$, la velocità a cui andrebbe l'oggetto sarebbe

$$V_2^2 = a_2 \cdot r = 200\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$V = \sqrt{a_2 r} = 14,1\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Moto circolare uniforme - $C0095$

Testo *[C0095]* [3½ 5 3a]
Lanciando una pallina di gomma alla velocità $V_i = 10\,\frac{m}{s}$ ed un angolo $\alpha = 45°$ essa colpisce un muro distante $D = 3\,m$. Trascurando gli attriti e supponendo un urto perfettamente elastico, a quale distanza dal muro la pallina ricadrà a terra?

Spiegazione Moto parabolico. Il problema presenta due momenti differenti: il primo in cui la pallina si dirige verso il muro, ed il secondo dopo il rimbalzo.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare l'altezza e la velocità dell'impatto sul muro.

$$V_x = V \cdot \cos 45° = 5\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

$$V_{iy} = V \cdot \sin 45° = 5\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{V_x} = \frac{3\,m}{5\sqrt{2}\,\frac{m}{s}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\,s = 0,42\,s$$

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_{iy}\Delta t = -4,9\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{9}{50}\,s^2 + 3\,m = 2,12\,m$$

$$V_{fy} = V_{iy} + a\Delta t = 2,91\,\frac{m}{s}$$

Conosciamo quindi l'altezza dell'impatto sul muro e le due componenti, orizzontale e verticale, della velocità nell'istante dell'impatto. L'impatto ha l'effetto di invertire la componente orizzontale del vettore velocità.

Calcoliamo adesso il tempo che impiega l'oggetto a ricadere a terra. Il tempo Δt_{tot} complessivo di volo non è influenzato dalla presenza del muro, il quale determina solo un cambiamento nel movimento in orizzontale.

Quindi

$$0 = \frac{1}{2}g\Delta t^2 + V_{iy}\Delta t$$

Che a parte la soluzione $\Delta t_{tot} = 0$ prevede la soluzione

$$\Delta t_{tot} = -\frac{2V_{iy}}{g} = 1,54\,s$$

Il tempo di caduta è quindi il tempo totale di volo meno il tempo per raggiungere il muro

$$\Delta t_2 = \Delta t_{tot} - \Delta t = 1,11\,s$$

In questo intervallo di tempo l'oggetto si allontana dal muro di

$$\Delta S_{x2} = V_x \cdot \Delta t = 7,9\,m$$

Un modo molto più semplice di risolvere il problema è quello di ragionare ed analizzarlo prima di cominciare a fare calcoli. Il muro influisce sono sul movimento in orizzontale invertendo, al momento dell'impatto, la componente orizzontale della velocità. Il tempo di volo, determinato solo dal moto in verticale, non cambia e quindi non cambia la distanza percorsa in orizzontale $L = |V_x| \cdot \Delta t_{tot}$ Cambia solo lo spostamento in orizzontale ΔS_x. Dai conti precedentemente fatti sappiamo che

$$L = |V_x| \cdot \Delta t_{tot} = 10\,9\,m$$

Tolta la distanza percorsa per raggiungere il muro, l'oggetto cadrà a

$$\Delta S = L - D = 7,9\,m$$

di distanza dal muro.

Problema di: Moto vario - $C0096$

Testo *[C0096]* [3★ 3⌛ 5a📖]
Un punto materiale si muove lungo un asse rettilineo secondo la legge oraria espressa in metri in funzione del tempo espresso in secondi, $X(t) = -\frac{1}{2}(t-2)^3 - 6(t-2) + 8$. Determina se si tratta di moto uniformemente accelerato e calcola la velocità media del corpo nei primi 4 secondi del moto.

Spiegazione Moto vario nel quale bisogna conoscere la relazione tra posizione, velocità ed accelerazione

Svolgimento Sapendo che la posizione del corpo è data da $X(t) = -\frac{1}{2}(t-2)^3 - 6(t-2) + 8$

la velocità del moto è data dall'equazione

$$V(t) = -\frac{3}{2}(t-2)^2 - 6$$

e l'accelerazione del moto è data dall'equazione

$$a(t) = -3(t-2)$$

Visto che l'accelerazione non è costante nel tempo, il moto non è uniformemente accelerato.

la velocità media del corpo la calcolo con

$$\overline{V} = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(-\frac{3}{2}(t-2)^2 - 6\right) dt$$

$$\overline{V} = \frac{1}{4}[X(4) - X(0)] = 4$$

Problema di: Cinematica - $C0097$

Testo *[C0097]* [1½★ 1⌛ 1a📖]
Giorgio sta camminando in direzione nord alla velocità $V_1 = 4\,\frac{km}{h}$ e guarda Marco seduto su di un autobus che viaggia sempre in direzione nord alla velocità $V_a = 10\,\frac{km}{h}$. Marco si alza e si sposta verso il conducente alla velocità $V_2 = 2\,\frac{km}{h}$ rispetto al conducente. Con quale velocità Giorgio vede Marco muoversi relativamente a se?

Spiegazione Per questo esercizio è conveniente fare due successivi cambi di sistema di riferimento. Prima chiedetevi a che velocità si muove l'autobus rispetto a Marco, e poi considerate il movimento di Giorgio.

Svolgimento Marco vede l'autobus allontanarsi alla velocità

$$V_{aG} = 10\,\frac{km}{h} - 4\,\frac{km}{h} = 6\,\frac{km}{h}$$

Di conseguenza Giorgio viene visto da marco allontanarsi più rapidamente. La velocità di Giorgio vista da Marco è

$$V_{GM} = 6\,\frac{km}{h} + 3\,\frac{km}{h} = 9\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Cinematica - $C0098$

Testo *[C0098]* [3½ 4 2a]
Un oggetto, cadendo da una certa altezza, passa davanti ad una finestra alta $\Delta S_2 = 1{,}4\,m$ impiegando un tempo $\Delta t_2 = 0{,}2\,s$ a percorrere tutta l'altezza della finestra. Quanti metri si trovava più in alto della finestra nel momento in cui è stata lasciata cadere?

Spiegazione Moto uniformemente accelerato. In questo caso il moto è descritto separando due intervalli di tempo successivi: il primo nel quale l'oggetto ancora non passa davanti alla finestra; il secondo nel quale l'oggetto si trova davanti alla finestra.

Svolgimento Consideriamo il secondo momento della caduta:

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} g \Delta t_2^2 + \mathcal{V}_{2i} \Delta t_2$$

da cui

$$\mathcal{V}_{2i} = \frac{\Delta S_2 - \frac{1}{2} g \Delta t_2^2}{\Delta t_2} = \frac{1{,}4\,m - 0{,}196\,m}{0{,}2\,s} = 6{,}02\,\frac{m}{s}$$

La velocità iniziale con cui l'oggetto comincia a passare davanti alla finestra coincide con la velocità finale dell'oggetto durante la caduta sopra alla finestra.

$$\mathcal{V}_{1f} = \mathcal{V}_{2i}$$

La caduta nel primo tratto di strada è quindi

$$\mathcal{V}_{1f} = \mathcal{V}_{1i} + g \Delta t_1$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 + \mathcal{V}_{1i} \Delta t_1$$

Nel primo tratto l'oggetto, come specificato nel testo, cade partendo da fermo; quindi

$$\Delta t_1 = \frac{\mathcal{V}_{1f}}{g}$$

e quindi

$$\Delta S_1 = \frac{\mathcal{V}_{1f}^2}{2g} = 1{,}849\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0098a$

Testo *[C0098a]* [3½ 4 2a]
Un oggetto, sparato da terra verso l'alto con una velocità iniziale $V_i = 10\,\frac{m}{s}$, passa davanti ad una finestra alta $\Delta S_2 = 1,4\,m$ impiegando un tempo $\Delta t_2 = 0,2\,s$ a percorrere tutta l'altezza della finestra. Quanto si trova in alto la finestra?

Spiegazione Moto uniformemente accelerato. In questo caso il moto è descritto separando due intervalli di tempo successivi: il primo nel quale l'oggetto ancora non passa davanti alla finestra; il secondo nel quale l'oggetto si trova davanti alla finestra.

Svolgimento Consideriamo il secondo momento del percorso:

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} g \Delta t_2^2 + V_{2i} \Delta t_2$$

da cui

$$V_{2i} = \frac{\Delta S_2 - \frac{1}{2} g \Delta t_2^2}{\Delta t_2} = \frac{1,4\,m + 0,196\,m}{0,2\,s} = 6,48\,\frac{m}{s}$$

La velocità iniziale con cui l'oggetto comincia a passare davanti alla finestra coincide con la velocità finale dell'oggetto durante la caduta sopra alla finestra.

$$V_{1f} = V_{2i}$$

La caduta nel primo tratto di strada è quindi

$$V_{1f} = V_{1i} + g\Delta t_1$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 + V_{1i} \Delta t_1$$

Nel primo tratto l'oggetto, come specificato nel testo, cade partendo da fermo; quindi

$$\Delta t_1 = \frac{V_{1f} - V_{1i}}{g}$$

e quindi

$$\Delta S_1 = \frac{\left(V_{1f}^2 + V_{1i}^2 - 2V_{1f}V_{1i}\right)}{2g} + \frac{V_{1f}V_{1i} - V_{1i}^2}{g} = \frac{V_{1f}^2 - V_{1i}^2}{2g} = 2,96\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0099$

Testo *[C0099]* [3 ⭐ 4 ⌛ 3a 📖]
Una torre alta $H = 30\,m$ ha al suo interno una scala a chiocciola di raggio $r = 4\,m$ che compie $n = 8$ giri per completare la salita. Sapendo che una persona impiega $\Delta t = 5\,min$ per arrivare in cima, calcolate a quale velocità ha viaggiato.

Spiegazione Il moto della persona è un moto elicoidale dato dalla combinazione di un moto rettilineo uniforme con un moto circolare uniforme. La combinazione delle equazioni di questi moti porta alla soluzione del problema.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare la componente verticale della velocità della persona.

$$V_z = \frac{\Delta S_z}{\Delta t} = 0,1\,\frac{m}{s}$$

Al tempo stesso possiamo calcolare la frequenza del moto e la sua velocità angolare, sapendo che durante la salita la persona ha compiuto $n = 10$ rotazioni

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{8}{300\,s} = 0,17\,\frac{rad}{s}$$

La velocità del moto circolare uniforme è quindi data da

$$V_{xy} = \omega r = 0,67\,\frac{m}{s}$$

L'effettiva velocità tenuta dalla persona è quindi

$$V = \sqrt{V_z^2 + V_{xy}^2} = 0,68\,\frac{m}{s}$$

Sapendo che la persona ha camminato per un tempo $\Delta t = 300\,s$ possiamo calcolare la lunghezza in metri della scala.

$$L = V \cdot \Delta t = 203\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0100$

Testo *[C0100]* [2½ ⭐ 4 ⌛ 2a 📖]
Un oggetto appeso ad una molla di costante elastica $k = 10\,\frac{N}{cm}$ oscilla con frequenza $\nu = 0,5\,hz$. Quanto vale la massa dell'oggetto? Per un motivo che non conosciamo, l'oggetto perde $\Delta m_0 = 11\,g$ ogni oscillazione. Dopo quante oscillazioni la frequenza diventa minore o uguale di $\nu_f = 2\,Hz$?

Spiegazione Cinematica del moto armonico. L'unica cosa che ci serve qui è la formula per il periodo di un moto armonico generato da una molla.

Svolgimento Sappiamo che

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

e quindi

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2} = 1013\,g$$

Affinché la frequenza diventi $\nu_f = 0,5\,Hz$ la massa del corpo deve diventare

$$m_f = \frac{kT_f^2}{4\pi^2} = 63\,g$$

La perdita di massa è quindi

$$\Delta m = |m_f - m| = 950\,g$$

Il numero di oscillazioni che servono per perdere questa massa è

$$n = \frac{\Delta m}{\Delta m_0} = 86,36$$

Servono quindi $n = 87$ oscillazioni.

Problema di: Cinematica - $C0101$

Testo *[C0101]* [2 4 1a]

t[s]	0	5	10	15	20
x[m]	7	19	31	43	55

Nella seguente tabella sono mostrati i valori misurati della posizione di un corpo in funzione del tempo. Mostrate i dati su di un grafico, identificate il tipo di movimento e determinatene la velocità media. Calcolate poi quanta strada ha fatto l'oggetto nella prima metà del periodo di tempo considerato.

Spiegazione Un esercizio sulla rappresentazione grafica dei moti. Per risolverlo è necessario saper interpretare le informazioni contenuti nella rappresentazione grafica dei moti.

Svolgimento Ogni coppia di valori nella tabella è un punto su di un grafico. Ogni due punti è possibile determinare la velocità media del corpo tra quei due punti.

$$\mathcal{U}_{med} = \frac{\Delta S_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{48\,m}{20\,s} = 2,4\,\frac{m}{s}$$

Calcolando tutte le velocità nei singoli intervalli di tempo otteniamo la seguente tabella dalla quale si evince che il moto è rettilineo uniforme, essendo la velocità costante.

$\Delta t[s]$	$0 \to 5$	$5 \to 10$	$10 \to 15$	$15 \to 20$	
$\mathcal{U}[\frac{m}{s}]$	$2,4$	$2,4$	$2,4$	$2,4$	$2,4$

La strada percorsa in metà dell'intervallo temporale considerato è

$$\Delta S = \mathcal{U} \cdot \Delta t = 2,4\frac{m}{s} \cdot 10\,s = 24\,m$$

Problema di: Cinematica - $C0102$

Testo *[C0102]* [3 4 2a]
Un atleta corre una gara lunga $L = 200\,m$ partendo da fermo con un'accelerazione $a = 2\,\frac{m}{s^2}$. Dopo un tempo $\Delta t_1 = 4\,s$ raggiunge la sua massima velocità. Dopo quanto tempo dalla partenza taglierà il traguardo?

Spiegazione Il moto dell'atleta è inizialmente uniformemente accelerato per poi trasformarsi in rettilineo uniforme alla massima velocità.

Svolgimento La lunghezza del tratto in accelerazione è

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + \mathcal{U}_i\Delta t = \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 = 16\,m$$

La velocità raggiunta sarà

$$\mathcal{U}_{max} = 0 + \Delta V_1 = 0 + a \cdot \Delta t = 8\,\frac{m}{s}$$

Il tragitto percorso a velocità costante è lungo

$$\Delta S_2 = L - \Delta S_1 = 184\,m$$

Il tempo impiegato nel secondo tratto è

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{\mathcal{U}_{max}} = 23\,s$$

La gara è durata in tutto

$$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 27\,s$$

Problema di: Cinematica - $C0103$

Testo *[C0103]* [3 3 3a]
Un proiettile viene sparato con una velocità iniziale $V_i = 300\,\frac{m}{s}$ e con un'inclinazione di $\alpha = 30°$ rispetto alla verticale. Quanto vale il modulo della velocità dopo un tempo $\Delta t = 2\,s$?

Spiegazione Moto parabolico. lo possiamo analizzare scomponendo le velocità nelle loro componenti orizzontale e verticale.

Svolgimento Le componenti della velocità iniziale sono

$$\begin{cases} V_{ix} = V_i \sin\alpha = 150\,\dfrac{m}{s} \\ V_{iy} = V_i \cos\alpha = 259,8\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Per la componente verticale della velocità avremo

$$\Delta V_y = a\Delta t = -9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = -19,6\,\frac{m}{s^2}$$

$$V_{fy} = V_{iy} + \Delta V_y = 240,2\,\frac{m}{s}$$

Quindi la velocità finale sarà

$$V_f = \sqrt{V_{fx}^2 + V_{fy}^2} = 283\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $C0104$

Testo *[C0104]* [2 2 1a]

Due persone, Marco e Andrea, partono da due posizioni distanti tra loro $\Delta S = 20\,m$. Marco, più lento, si muove a velocità costante $V_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Andrea lo rincorre alla velocità costante $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto Andrea raggiunge Marco? Quanti metri avrà corso Andrea?

Spiegazione In questo problema abbiamo due persone che si muovono entrambe di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. La persona più veloce insegue la più lenta raggiungendola.

Svolgimento [...]

Problema di: Cinematica - $C0104a$

Testo *[C0104a]* [2⭐ 2⏳ 1a📖]

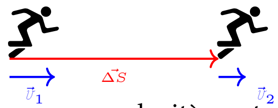
Due persone, Marco e Andrea, partono da due posizioni distanti tra loro $\Delta S = 20\,m$. Marco, più lento, si muove a velocità costante $V_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Andrea gli corre incontro alla velocità costante $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo Andrea raggiunge Marco? Quanti metri avrà corso Andrea?

Spiegazione In questo problema abbiamo due persone che si muovono entrambe di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. Le due persone corrono una contro l'altra raggiungendosi.

Svolgimento [...]

Problema di: Cinematica - $C0105$

Testo *[C0105]* [2⭐ 3⏳ 1a📖]



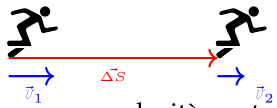
Due persone, Marco e Andrea, partono da due posizioni distanti tra loro $\Delta S = 20\,m$. Marco parte $\Delta t_x = 0.5\,s$ prima di Andrea. Marco, più lento, si muove a velocità costante $V_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Andrea gli corre incontro alla velocità costante $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto tempo Andrea raggiunge Marco? Quanti metri avrà corso Andrea?

Spiegazione In questo problema abbiamo due persone che si muovono entrambe di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. Le due persone corrono una contro l'altra raggiungendosi. Attenzione che la distanza iniziale tra le due persone, dove per istante iniziale si intende l'istante iniziale in cui entrambi si muovono, non è quella indicata numericamente nel testo.

Svolgimento [...]

Problema di: Cinematica - $C0105a$

Testo *[C0105a]* [2 3 1a]



Due persone, Marco e Andrea, partono da due posizioni distanti tra loro $\Delta S = 20\,m$. Marco parte $\Delta t_x = 0.5\,s$ prima di Andrea. Marco, più lento, si muove a velocità costante $V_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Andrea lo rincorre alla velocità costante $V_1 = 4\,\frac{m}{s}$. Dopo quanto Andrea raggiunge Marco? Quanti metri avrà corso Andrea?

Spiegazione In questo problema abbiamo due persone che si muovono entrambe di moto rettilineo uniforme a differenti velocità. Le due persone corrono una contro l'altra raggiungendosi. Attenzione che la distanza iniziale tra le due persone, dove per istante iniziale si intende l'istante iniziale in cui entrambi si muovono, non è quella indicata numericamente nel testo.

Svolgimento [...]

Problema di: Cinematica - $C0105b$

Testo *[C0105b]* [2 3 1a]

Due treni viaggiano, sulla stessa linea ferroviaria e nello stesso verso, con velocità costante $V_1 = 80\,\frac{km}{h}$ e $V_2 = 120\,\frac{km}{h}$ partendo da due stazioni distanti tra loro $L = 300\,km$. Il treno più avanti è quello più lento. Il treno più avanti parte dalla stazione $\Delta t = 1,5\,h$ dopo il treno che segue. Dopo quanto tempo i due treni si incontrano, dalla partenza del secondo?

Spiegazione I due treni si muovono di moto rettilineo uniforme. Utilizzeremo quindi la relativa legge oraria per risolvere il problema.

Svolgimento Mentre il secondo treno è fermo, il primo percorre un tragitto

$$\Delta S_1 = V_1 \Delta t = 120\,\frac{km}{h} \cdot 1,5\,h = 180\,km$$

Nell'istante in cui il secondo treno parte, i due treni distano $\Delta S_2 = \Delta S - \Delta S_1 = 120\,km$

La velocità relativa tra i due treni è $V_{rel} = 40\,\frac{km}{h}$

Il tempo che passa affinché i due treni si incontrino è quindi $\Delta t = \frac{\Delta S_2}{V_{rel}} = 3\,h$

Problema di: Cinematica - $C0106$

Testo *[C0106]* [2 3 2a]
Giorgio sta osservando un gatto che si allontana da lui con una velocità $U = 4\,\frac{m}{s}$ lungo una direzione che forma un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'asse delle x. Giorgio osserva anche un cane che corre con una velocità $U = 5\,\frac{m}{s}$ con direzione parallela e concorde con l'asse delle x. Utilizzando le trasformazioni di Galileo indica quale sia la velocità del gatto, nel sistema di riferimento del cane. Mostra i vettori in un opportuno grafico cartesiano.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si applicano le trasformazioni di Galileo per la velocità. Il calcolo è vettoriale, quindi è necessario disegnare i vettori e svolgere anche l'operazione graficamente. Cercate di non perdere una comprensione intuitiva di quanto richiesto.

Svolgimento [...]

Problema di: Cinematica - $C0107$

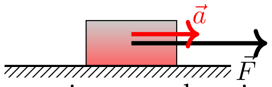
Testo *[C0107]* [2 3 3a]
Nel sistema di riferimento di Giorgia, la quale è in quiete, mostra due persone in movimento: Marco e Andrea. Marco ha una velocità $\vec{U}_1 = 4\,\frac{m}{s}\vec{i}$ ed Andrea $\vec{U}_2 = 3\,\frac{m}{s}\vec{j}$. Mostra nel diagramma come passi nel sistema di riferimento Marco e calcola, in questo sistema, la velocità di Andrea. Indicane il modulo e l'angolo che forma con l'asse delle x

Spiegazione [...]

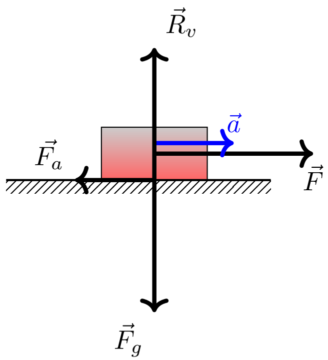
Svolgimento [...]

Problema di: Dinamica - $D0001$

Testo *[D0001]* [4 3 2a]



Un blocco di massa $m = 20\,kg$ è inizialmente fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 3$. Esso, sotto l'azione di una forza F, comincia a muoversi con accelerazione $a = 5\frac{m}{s^2}$. Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico $\mu-_d$ tra il piano orizzontale e l'oggetto?



Spiegazione In questo esercizio abbiamo un oggetto che, inizialmente fermo, comincia a muoversi sotto l'azione di una forza F. Inizialmente l'oggetto è fermo perché la forza di attrito statico impedisce all'oggetto di muoversi. In questa situazione la somma di tutte le forze è nulla $\vec{F}_{tot} = 0$. Quando la forza F è sufficientemente intensa da vincere l'attrito statico, allora l'oggetto comincia a muoversi. In quell'istante l'attrito statico diventa dinamico e quindi meno intenso. Di conseguenza la forza che spinge l'oggetto è ora maggiore della forza che lo frena, quindi la forza totale non è nulla. Visto che la forza totale non è nulla, allora l'oggetto si muove di conseguenza con una certa accelerazione.

Svolgimento Per risolvere il problema seguiamo la seguente scaletta:

1. Calcola la forza di gravità che agisce sull'oggetto.
2. Calcola la massima forza di attrito statico che può agire sull'oggetto.
3. Quanto vale la forza che fa cominciare a muovere l'oggetto?
4. Quale forza totale subisce l'oggetto mentre si muove?
5. Quanto vale la forza di attrito dinamico sull'oggetto
6. Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e l'oggetto?

La forza di gravità che agisce sull'oggetto è

$$F_g = mg = 20\,kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 196N$$

La massima forza d'attrito statico è generata dal fatto che c'è una forza che schiaccia l'oggetto sul piano orizzontale. In questo caso tale forza è la forza di gravità.

$$F_{s-max} = \mu F_g = 3 \cdot 196\,N = 588\,N$$

La forza da fare per spostare l'oggetto deve essere tale da vincere la forza d'attrito. Quindi la forza vale

$$F = 588N$$

Mentre l'oggetto si muove subisce un'accelerazione

$$a_{tot} = 5\frac{m}{s^2}$$

e quindi una forza

$$F_{tot} = 20\,kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = 100\,N$$

La forza totale che subisce l'oggetto è data da

$$F_{tot} = F - F_{din}$$

Dovete infatti tenere presente che adesso che l'oggetto si muove, l'attrito statico non esiste più e viene sostituito da quello dinamico. Quindi

$$F_{din} = F - F_{tot} = 588\,N - 100\,N = 488\,N$$

Il coefficiente di attrito dinamico sarà quindi

$$\mu_{din} = \frac{F_{din}}{F_g} = \frac{488\,N}{196\,N} = 2,49$$

giustamente minore del valore del coefficiente di attrito statico.

Fig. 5.1: *Guarda il video youtu.be/3Bb2hrwKwpY*

Esercizi concettualmente identici

1. Un blocco di ferro pesa $F_p = 98\,N$ fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_{statico} = 3$ viene spinto verso destra. Qual'è il valore della forza che si deve applicare per far muovere l'oggetto? Nel momento in cui comincia a muoversi, subisce un'accelerazione $a_{tot} = 5\,\frac{m}{s^2}$. Quale forza totale sta subendo l'oggetto? Quanto vale, di conseguenza, la forza di attrito dinamico che agisce sul blocco di ferro? Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra l'oggetto ed il piano su cui striscia? *[$F = 294\,N$; $F_{tot} = 50\,N$; $F_{ad} = 244\,N$; $\mu_d = 2,49$]*

2. Un oggetto di massa $m = 3\,kg$ viene fatto strisciare su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.5$ spinto da una forza $F = 50\,N$. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza di attrito che frena l'oggetto? Quanto vale la reazione vincolare fatta dal piano orizzontale per sorreggere l'oggetto? Quanto vale la forza totale che spinge l'oggetto? Quanto vale l'accelerazione totale subita dall'oggetto? *[$F_g = 29,4\,N$; $F_{att} = 14,7\,N$; $R_v = 29,4\,N$; $F_{tot} = 35,3\,N$; $a_{tot} = 11,77\,\frac{m}{s^2}$]*

3. Un oggetto di massa $m = 10\,kg$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,3$. Per spostarlo lo spingete con una forza F. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza F che bisogna fare per spostare l'oggetto quando è fermo? Quanto vale la forza di attrito dinamico che frena l'oggetto mentre si muove? Quanto vale la forza totale che spinge l'oggetto mentre si muove? Quanto vale la sua accelerazione totale? *[$F_g = 98\,N$; $F = 49\,N$; $F_{ad} = 29,4\,N$; $F_t = 19,6\,N$; $a_t = 1,96\,\frac{m}{s^2}$]*

4. Un blocco di massa $m = 50\,kg$ fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_{statico} = 2$ viene spinto verso destra. Esso comincia a muoversi sotto l'azione di una forza F con accelerazione $a_{tot} = 0,5\,\frac{m}{s^2}$. Calcola la forza di gravità che agisce sull'oggetto. Calcola la forza di attrito statico sull'oggetto. Quanto vale la forza che serve per far cominciare a muovere l'oggetto? Ora l'oggetto si sta muovendo. Quale forza totale subisce l'oggetto mentre si muove? Sapendo la forza totale che spinge l'oggetto, e conoscendo la forza F ad esso applicata, quanto vale la forza di attrito dinamico sull'oggetto? Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra il piano orizzontale e l'oggetto? *[$F_g = 490\,N$; $F_{as} = 980\,N$; $F = 980\,N$ pari alla forza di attrito statico; $F_2 = 25\,N$; $F_{ad} = 955\,N$; $\mu_d = 1,95$]*

Problema di: Dinamica - $D0002$

Testo *[D0002]* [2 2 1a]
Quale percentuale del volume di una statuetta di legno di densità $\rho = 0,7\,\frac{g}{cm^3}$ rimane immersa nell'acqua quando galleggia?

Spiegazione Abbiamo un oggetto di legno che sta galleggiando e quindi si trova in equilibrio statico. La somma della forza di gravità e della forza di archimede deve essere nulla, quindi queste due forze devono essere uguali.

Svolgimento

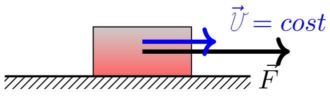
1. La forza di gravità che agisce sull'oggetto deve essere uguale alla forza di archimede:
$$F_g = F_{Arch}$$
$$m_{ogg}g = \rho_{acqua}V_{imm}g$$
$$m_{ogg} = \rho_{acqua}V_{imm}$$

2. La massa dell'oggetto può essere scritta come
$$m_{ogg} = \rho_{ogg}V_{ogg}$$

3. La precedente formula diventa quindi
$$\rho_{ogg}V_{ogg} = \rho_{acqua}V_{imm}$$
$$\frac{V_{imm}}{V_{ogg}} = \frac{\rho_{ogg}}{\rho_{acqua}}$$
$$\frac{V_{imm}}{V_{ogg}} = \frac{0,7\,\frac{g}{cm^3}}{1\,\frac{g}{cm^3}} = 0,7 = 70\%$$

Problema di: Dinamica - $D0003$

Testo *[D0003]* [3 2 1a]



Un oggetto si muove su di un piano orizzontale con velocità costante, sotto l'azione di una forza $F = 100\,N$. Se il coefficiente di attrito tra il piano e l'oggetto vale $\mu_d = 1,5$ quanto vale la massa dell'oggetto?

Spiegazione Abbiamo un oggetto che si muove spinto da una forza e che viaggia con velocità costante, mentre la forza di attrito radente con il piano orizzontale lo sta frenando. La forza che schiaccia l'oggetto contro la superficie è in questo caso la forza di gravità sull'oggetto.

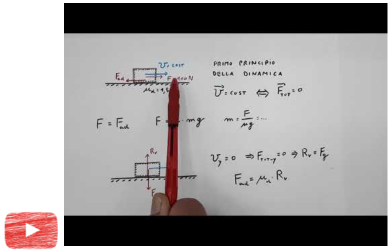


Fig. 5.2: *Guarda il video youtu.be/1N9pL-1i9rw*

Svolgimento

1. Il primo principio della dinamica mi dice che la forza F deve essere uguale alla forza di attrito:
$$F_a = F$$

2. Da qui, sapendo che in questo esercizio la forza di attrito è generata dalla forza di gravità:
$$\mu_d F_{schiaccia} = F$$
$$\mu_d mg = F$$

3. In fine trovo la massa dell'oggetto

$$m = \frac{F}{\mu_d g} = \frac{100\,N}{1,5 \cdot 9,8\frac{m}{s^2}} = 6,8\,kg$$

Problema di: Dinamica - $D0004$

Testo *[D0004]* [2 2 1a]
Un oggetto di ferro di massa $m = 2\,kg$ è fermo, appeso ad una molla di costante elastica $k = 10\,\frac{N}{cm}$ e contemporaneamente tirato verso il basso da una calamita che esercita una forza magnetica $F_m = 50\,N$. Di quanto si è allungata la molla?

Spiegazione Visto che l'oggetto in questione è fermo, allora la somma delle forze che agiscono su di lui è zero. Sull'oggetto agiscono la forza di gravità verso il basso, la forza elastica verso l'alto e la forza magnetica verso il basso.

Svolgimento Visto che la somma delle forze che agiscono sull'oggetto è zero

$$F_{el} = F_g + F_m$$

$$k \cdot \Delta l = mg + F$$

$$\Delta l = \frac{mg + F}{k} = \frac{2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} + 50\,N}{10\,\frac{N}{cm}} = 6,96\,cm$$

Esercizi concettualmente identici

1. Una mongolfiera di massa $m_m = 120\,kg$ e volume $V = 3000\,m^3$, trattenuta da una corda fissata a terra, si trova ad un'altezza $h = 100\,m$ da terra. Su di essa ci sono 2 persone ognuna aventi massa $m_p = 70\,kg$. In questo momento la mongolfiera è ferma. La densità dell'aria vale $\rho_{aria} = 1,3\frac{kg}{m^3}$ e la densità dell'aria calda vale $\rho_{aria-calda} = 1,08\frac{kg}{m^3}$. Quanto vale la massa complessiva della mongolfiera (massa della mongolfiera + massa delle persone + massa dell'aria calda)? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di gravità complessiva che agisce sulla mongolfiera? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di Archimede che agisce sulla mongolfiera? Quanto vale la tensione sul filo?
[$m = 3500\,kg$; $F_g = 34300\,N$; $F_A = 38220\,N$; $T = 3220\,N$;]

2. Un oggetto di massa $m = 500\,kg$ e volume $V = 100\,dm^3$ schiaccia una molla con costante elastica $k = 800\frac{N}{cm}$. Quanto vale la forza di gravità che agisce

sull'oggetto? Di quanto si accorcia la molla? Se immergo l'oggetto e la molla in un liquido la molla si accorcia di più o di meno? Perchè? La densità dell'acqua è $\rho_{H_2O} = 1\frac{kg}{dm^3}$. Di quanto si accorcia la molla se l'oggetto è immerso in acqua? *[$F_g = 4900\,N$; $\Delta l = 6,125\,cm$; La molla si accorcia di meno, visto che si aggiunge la forza di Archimede che spinge l'oggettoin alto; $\Delta l = 4,9\,cm$]*

3. Un oggetto di densità $\rho = 0.7\frac{kg}{dm^3}$ è completamente immerso in un liquido di densità $\rho = 0.9\frac{kg}{dm^3}$. Il suo volume totale è $V_{tot} = 30\,dm^3$. Quanto vale la massa dell'oggetto? Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza di Archimede che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza totale che lo spinge verso l'alto? Una volta che l'oggetto è arrivato in superficie (e quindi si ferma) quanto vale la forza di Archimede che agisce su di esso? Quanto vale il volume della parte immersa dell'oggetto? *[$m = 21\,kg$; $F_g = 205,8\,N$; $F_A = 264,6\,N$; $F_{tot} = 58,8\,N$; $F_{A_2} = 205,8\,N$; $V = 23,33\,dm^3$]*

Problema di: Dinamica, secondo principio - $D0005$

Testo *[D0005]* [2★ 1⏳ 1a📖]
Una palla da tennis di massa $m = 58\,g$, colpisce una racchetta con una velocità $V_i = 20\,\frac{m}{s}$ e a causa della forza della racchetta, torna indietro con una velocità $V_f = 30\,\frac{m}{s}$. Sapendo che il tempo di impatto è $\Delta t = 5\,ms$, quale forza media ha espresso la racchetta sulla pallina?

Spiegazione La racchetta fa una forza e di conseguenza fa cambiare la velocità e quindi la quantità di moto della pallina. E' il secondo principio della dinamica.

Svolgimento La pallina prima dell'urto ha una velocità in un verso, e dopo l'urto ha una velocità nel verso opposto. Questo fa si che la variazione di velocità è pari a

$$\Delta V = V_f - V_i = 20\,\frac{m}{s} - \left(-30\,\frac{m}{s}\right) = 50\,\frac{m}{s}$$

Applicando il secondo principio della dinamica avremo:

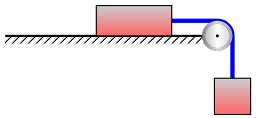
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta V}{\Delta t} = 0,058\,kg \cdot \frac{50\,\frac{m}{s}}{0,005\,s} = 580\,N$$

Se ancora non avete studiato la grandezza fisica chiamata "quantità di moto" allora potete seguire questi calcoli del tutto equivalenti ai precedenti

$$F = m \cdot a = m\frac{\Delta V}{\Delta t} = 0,058\,kg \cdot \frac{50\,\frac{m}{s}}{0,005\,s} = 580\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0006$

Testo *[D0006]* [3 3 2a]



Una slitta di massa $m_1 = 0,12\,kg$ scivola senza attrito su un piano orizzontale tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02\,kg$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica.

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02\,kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 1,96N$$

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T = m_1 a \\ R_v = m_2 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{0,02\,kg}{0,14\,kg} \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 1,4\,\frac{m}{s^2}$$

La tensione del filo è

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 0,168\,N$$

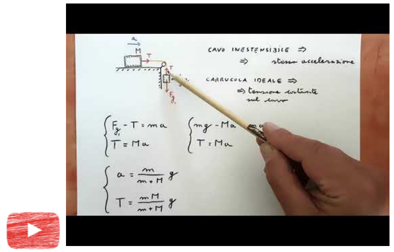
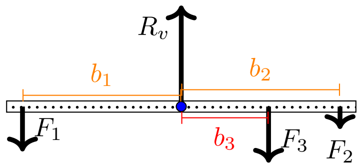


Fig. 5.3: *Guarda il video youtu.be/pWyRB8JJHDU*

Problema di: Dinamica - $D0007$

Testo *[D0007]* [3 5 1a]
Una sbarra orizzontale, libera di ruotare intorno ad un perno centrale, è tenuta ferma da tre forze come mostrato in figura: $F_1 = 30\,N$, $F_2 = 10\,N$ ed $F_3 = 40\,N$, poste rispettivamente a distanza $b_1 = 30\,cm$, $b_2 = 30\,cm$ e b_3 dal perno. Calcola la distanza b_3 e la reazione vincolare R_v del perno.



Spiegazione In questo esercizio abbiamo una sbarra sottoposta complessivamente a quattro forze. Visto che la sbarra è ferma avremo che la somma di tutte le forze che agiscono sulla sbarra è nulla, e la somma di tutti i momenti che agiscono sulla sparra è nulla.

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Imponi l'equilibrio traslazionale; scegli un punto di rotazione; per ogni forza scrivi il relativo momento della forza ed infine imponi l'equilibrio rotazionale. Otterrai un sistema di due equazioni la cui soluzione è soluzione del problema.

Svolgimento Cominciamo con l'affermare che la somma di tutte le forze è zero; la somma delle forze verso l'alto deve quindi essere uguale alla somma delle forze verso il basso.

$$R_v = F_1 + F_2 + F_3$$

Per cui

$$R_v = 80\,N$$

Adesso affermiamo che la somma di tutti i momenti è zero; la somma dei momenti orari deve essere uguale alla somma dei momenti antiorari. Consideriamo il perno come punto di rotazione del sistema e di conseguenza togliamo dall'equazione il momento della reazione vincolare.

$$M_1 = M_2 + M_3$$

$$F_1 b_1 = F_2 b_2 + F_3 b_3$$

$$F_1 b_1 - F_2 b_2 = F_3 b_3$$

$$b_3 = \frac{F_1 b_1 - F_2 b_2}{F_3} = \frac{900\,N\,cm - 300\,N\,cm}{40\,N} = 15\,cm$$

Problema di: Dinamica - *D*0008

Testo *[D0008]* [2 2 1a]
Un vaso di massa trascurabile contiene $V = 15\,dm^3$ di acqua salata ($\rho = 1,03\,\frac{kg}{dm^3}$) ed è appeso ad una molla di costante elastica $k = 100\,\frac{N}{m}$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira il vaso verso il basso mentre la molla si allunga e so spinge verso l'alto. Consideriamo trascurabile la massa del vaso. Per risolvere il problema i servirà conoscere il valore della densità dell'acqua salata $\rho_{H_2O} = 1,03\,\frac{kg}{dm^3}$.

Svolgimento Consideriamo con indicare la massa di acqua presente nel vaso con

$$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V$$

La forza di gravità verso il basso vale

$$F_g = \rho_{H_2O} \cdot V \cdot g$$

la forza elastica che tira verso l'alto vale

$$F_{el} = k \cdot \Delta l$$

Per cui, eguagliando le due forze

$$k \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V \cdot g$$

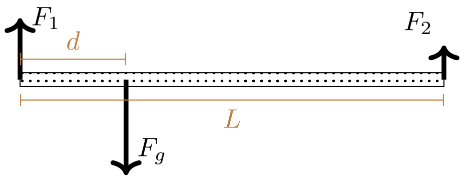
$$\Delta l = \frac{\rho_{H_2O} \cdot V \cdot g}{k} = \frac{1,03\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 15\,dm^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{100\,\frac{N}{m}} = 1,5\,m$$

Esercizi concettualmente identici

1. Una molla di costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$ viene schiacciata verso il basso da un oggetto di massa $m = 12\,kg$. Di quanto si accorcia la molla? [$\Delta l = 23,2\,cm$]
2. Un oggetto di massa $m = 20\,kg$ viene messo sopra una molla facendola accorciare di $\Delta l = 2\,cm$. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza fatta dalla molla per sorreggere l'oggetto? Quanto vale la costante elastica della molla? [$F_g = 196\,N$; $F_e = 196\,N$; $k = 98\,\frac{N}{cm}$]
3. Un oggetto di massa $m = 5\,kg$ viene appeso ad una molla di costante elastica $k = 16\frac{N}{m}$ attaccata al soffitto. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Di quanto si allunga la molla? [$F_g = 49\,N$; $\Delta l = 306,25\,cm$;]
4. Un'automobile di massa $m = 800\,kg$ si appoggia su quattro ammortizzatori di costante elastica $k = 100\frac{N}{cm}$. Di quanto vengono compressi tali ammortizzatori a causa del peso dell'automobile? [$\Delta l = 19,6\,cm$]
5. Un'edificio costruito com $m = 200000\,kg$ di materiale edile si appoggia su 16 molle di costante elastica $k = 10000\frac{N}{cm}$. Di quanto si comprimono tali molle a causa del peso dell'edificio?

Problema di: Dinamica - *D*0009

Testo *[D0009]* [3★ 3⌛ 1a📖]



Due persone stanno sollevando una trave di forma irregolare, di massa $m = 50\,kg$ e lunga $L = 2\,m$ tenendola per i suoi estremi. Il baricentro della trave si trova a $d = 70\,cm$ da uno degli estremi della trave stessa. Quanto valgono le forze fatte dalle due persone?

Spiegazione Le forze che le due persone devono fare servono per tenere la sbarra in equilibrio rotazionale e traslazionale. Eseguito uno schema della situazione, la soluzione del problema si ottiene imponendo due condizioni: la somma di tutte le forze è zero, e la somma di tutti i momenti è zero. In particolare per la seconda equazione, visto che la sbarra è ferma, possiamo scegliere come punto di rotazione quello che preferiamo; la scelta più comoda sarà di considerare come punto di rotazione uno degli estremi della sbarra.

Svolgimento Impostiamo la condizione di equilibrio rotazionale, scegliendo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_1, quella più vicina al baricentro della trave

$$M_2 = M_g$$

$$F_2 L = mgd$$

$$F_2 = \frac{mgd}{L} = \frac{50\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}7\,m}{2\,m} = 171{,}5\,N$$

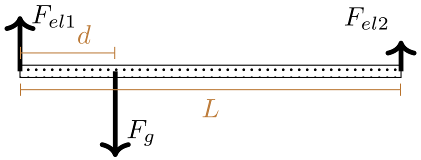
Impostiamo la condizione di equilibrio traslazionale

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_1 = mg - F_2 = 50\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} - 171{,}5\,N = 318{,}5\,N$$

Problema di: Dinamica - *D*0012

Testo *[D0012]* [3★ 3⌛ 1a📖]



Una sbarra lunga $L = 2\,m$, il cui baricentro è a $d = 50\,cm$ da uno degli estremi, è appesa ai due estremi a due molle, allungatesi entrambe di $\Delta l = 6\,cm$. La prima molla ha costante elastica $k_1 = 1000\,\frac{N}{cm}$. Calcola la costante elastica dell'altra molla e la massa della sbarra.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio. Visto che la sbarra è ferma, la somma delle forze è zero e la somma dei momenti è zero; queste due condizioni permetteranno di risolvere il problema.

Svolgimento Cominciamo con l'imporre la condizione di equilibrio rotazionale; consideriamo il baricentro della sbarra come punto di rotazione.

$$F_2 b_2 = F_1 b_1$$

Dove F_1 e F_2 sono le forze esercitate dalle due molle e b_1 e b_2 sono i rispettivi bracci relativi al baricentro della sbarra.

$$F_2 = \frac{F_1 b_1}{b_2} = \frac{k_1 \Delta l \cdot d}{L - d} = \frac{1000\,\frac{N}{cm} \cdot 6\,cm \cdot 0{,}5\,m}{1{,}5\,m} = 2000\,N$$

$$k_2 = \frac{F_2}{\Delta l} = \frac{2000\,N}{6\,cm} = 333{,}3\,\frac{N}{cm}$$

Adesso imponiamo la condizione di equilibrio traslazionale (somma delle forze uguale a zero)

$$F_g = F_1 + F_2$$

$$mg = F_1 + F_2$$

$$mg = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l$$

$$m = \frac{k_1 \Delta l + k_2 \Delta l}{g} = \frac{6000\,N + 2000\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 816{,}3\,kg$$

Problema di: Dinamica - $D0013$

Testo *[D0013]* [2 3 1a]

Un cubo di ferro di densità $\rho_{Fe} = 7874\,\frac{kg}{m^3}$, e di lato $l = 20\,cm$ si trova sul fondo di una piscina piena di acqua di densità $\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$. Qual è la minima forza necessaria per sollevarlo dal fondo della piscina?

Spiegazione Sul cubo di ferro agiscono la forza di gravità verso il basso e la forza di Archimede verso l'alto. Visto che la forza di gravità è maggiore della forza di archimede, per sollevare l'oggetto dobbiamo fare una forza maggiore o al minimo uguale a quella necessaria per sorreggerlo e tenerlo in equilibrio.

Svolgimento Il volume e la massa dell'oggetto valgono

$$V_{Fe} = l^3 = 8000\,cm^3 = 0,008\,m^3$$

$$m_{Fe} = \rho_{Fe} V_{Fe} = 7874\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,008\,m^3 = 63\,kg$$

La forza di gravità vale

$$F_g = mg = 63\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 617,3\,N$$

Essendo l'oggetto completamente immerso nell'acqua

$$F_{Arc} = \rho_{H_2O} V_{Fe} g = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,008\,m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 78,4\,N$$

Infine la forza che devo fare per sorreggere il blocco e tenerlo in equilibrio vale

$$T = F_g - F_{Arc} = 617,3\,N - 78,4\,N = 538,9\,N$$

Esercizi concettualmente identici

1. Sul fondo di una piscina piena d'acqua è legato con un filo elastico un palloncino del volume $V = 10\,dm^3$ e di massa $m = 500\,g$. Si nota che il palloncino tira l'elastico verso l'alto e l'elastico si è allungato di $\Delta l = 20\,cm$. Quanto vale e verso dove è diretta la forza di gravità che agisce sul palloncino? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di Archimede che agisce sul palloncino? Quale forza deve fare l'elastico per tenere fermo il palloncino? Quanto vale la costante elastica dell'elastico? *[$F_g = 4,9\,N$ diretta verso il basso; $F_{arch} = 98\,N$ diretta verso l'alto; $F_{el} = 93,1\,N$ diretta verso il basso; $k = 4,6505\,\frac{N}{cm}$.]*

2. Con una fionda voglio lanciare un sasso di massa $m = 150\,g$ verticalmente verso l'alto. La costante elastica dell'elastico della fionda è $k = 6\,\frac{N}{cm}$ e il mio braccio sta allungando l'elastico di $\Delta l = 15\,cm$. Quanta forza sta facendo l'elastico della fionda? Quanto vale la forza di gravità che agisce sul sasso? Quanta forza sta facendo il mio braccio per riuscire ad allungare quell'elastico? *[$F_e = 90\,N$; $F_g = 1,47\,N$; $F = 88,53\,N$]*

3. Un oggetto di densità $\rho = 0.7\,\frac{kg}{dm^3}$, volume $V = 10\,dm^3$ sta galleggiando in un contenitore pieno d'acqua. La densità dell'acqua vale $\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$. Quanto vale la massa dell'oggetto? Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto deve valere la forza di archimede che agisce sull'oggetto visto che l'oggetto galleggia? Quanto vale il volume della parte immersa dell'oggetto? *[$m = 7\,kg$; $F_g = 68,6\,N$; $F_a = 68,6\,N$; $V = 7\,dm^3$]*

Problema di: Dinamica - $D0014$

Testo *[D0014]* [1 1 1a]
Se un oggetto di volume $V = 9\,cm^3$ galleggia sull'acqua immerso per i $\frac{2}{3}$ del suo volume, quanto vale la forza di Archimede che agisce su di lui? [$\rho_{acqua} = 1\,\frac{kg}{dm^3}$]

Spiegazione L'oggetto subisce la forza di Archimede in quanto è immerso nell'acqua. In questo esercizio è sufficiente applicare la formula della forza di Archimede.

Svolgimento Il calcolo della forza è:

$$F_{Arc} = \rho_{H_2O} V_{imm} g = \rho_{H_2O} \frac{2}{3} V_{ogg} g = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,000009\,m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}$$
$$F_{Arc} = 0,0588\,N$$

Volendo essere più precisi potremmo considerare anche la parte dell'oggetto che si trova fuori dall'acqua, pari ad un terzo del volume dell'oggetto, in quanto è immersa nell'aria

$$F_{Arc-aria} = \rho_{aria} V_{imm} g = \rho_{aria} \frac{1}{3} V_{ogg} g = 1,3\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,000009\,m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}$$
$$F_{Arc-aria} = 0,0000392\,N$$

La forza di Archimade totale sarà la somma delle due forze

$$F_{Arch-tot} = F_{Arc} + F_{Arc-aria} = 0,0588392\,N$$

tenendo presente che enrambe le forze sono dirette verso l'alto.

Problema di: Dinamica - $D0015$

Testo *[D0015]* [1 1 1a]
Un ciclista di massa $m = 60\,kg$ corre in pianura alla velocità costante $U = 35\,\frac{km}{h}$. Se le forze d'attrito con l'aria hanno un valore $F_a = 500\,N$, quanto vale la forza in avanti che il ciclista fa spingendo sui pedali? Spiegane il perché. Quanto vale l'accelerazione con la quale si muove la bicicletta?

Spiegazione In questo problema dobbiamo semplicemente applicare il primo principio della dinamica.

Svolgimento Dal momento che il ciclista si muove con velocità costante, possiamo applicare il primo principio della dinamica, per cui la somma di tutte le forze è nulla.

$$F_{tot} = 0$$

Sul ciclista, in orizzontale, agiscono soltanto due forze, quella di attrito e quella del ciclista. Visto che sono opposte, e che la loro somma deve fare zero, allora le due forze sono uguali. Per cui

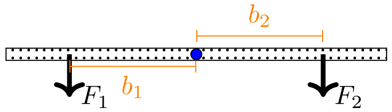
$$F_{attrito} = 500\,N$$

Dalla definizione di accelerazione avremo che se la velocità è costante, allora l'accelerazione è nulla

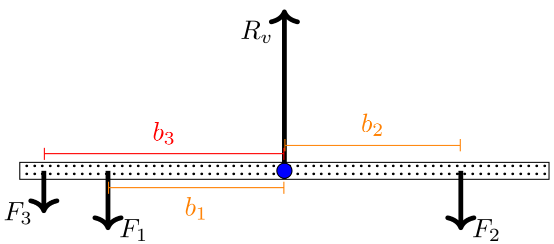
$$a = 0\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - *D0016*

Testo *[D0016]* [2½ 5 1a]



Una sbarra orizzontale di massa trascurabile è inchiodata nel suo centro. Due forze $F_1 = F_2 = 20\,N$ vengono applicate alla sbarra verso il basso rispettivamente alla distanza $b_1 = 20\,cm$ a sinistra e $b_2 = 30\,cm$ a destra del centro. Dove devo applicare una forza $F_3 = 2\,N$ verso il basso per ottenere equilibrio rotazionale? Quanto vale e verso dove è diretta la reazione vincolare del chiodo?



Spiegazione In questo problema abbiamo una sbarra in equilibrio sotto l'azione di quattro forze. La Reazione vincolare del chiodo impone l'equilibrio traslazionale, per cui la somma delle forze è zero. Le altre tre forze sono tali da ottenere l'equilibrio rotazionale, per cui la somma dei momenti è zero. Imponendo queste due condizioni otteniamo le risposte alle domande del problema.

Svolgimento La reazione vincolare del chiodo deve essere rivolta verso l'alto, in quanto tutte le altre tre forze sono rivolte verso il basso.

$$R_v = F_1 + F_2 + F_3 = 42\,N$$

Il momento della forza F_1 è

$$M_1 = F_1 b_1 = 20\,N \cdot 20\,cm = 400\,N\,cm\ antiorario$$

Il momento della forza F_2 è

$$M_2 = F_2 b_2 = 20\,N \cdot 30\,cm = 600\,N\,cm\ orario$$

Il momento della forza F_3 deve quindi essere antiorario e per questo la forza F_3 deve essere posizionata a sinistra del centro della sbarra. Dalla condizione di equilibrio rotazionale avremo

$$M_3 = M_2 - M_1$$

$$F_3 b_3 = M_2 - M_1$$

$$b_3 = \frac{M_2 - M_1}{F_3} = \frac{200\,N\,cm}{2\,N} = 100\,cm$$

Esercizi concettualmente identici

1. Per sollevare un oggetto della massa $m = 150\,kg$ uso una sbarra lunga $l = 2\,m$. Da un lato della sbarra posiziono l'oggetto. Il fulcro della leva si trova a $r_1 = 20\,cm$ da dove l'oggetto è posizionato. All'estremo opposto io applico una forza F. A quale distanza viene applicata la forza F dal fulcro? Quanto vale il momento della forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto deve valere la forza F per sollevare l'oggetto? *[$r = 180\,cm$; $M_{F_g} = 29400\,N \cdot cm$; $F = 163,3\,N$;]*

2. Immaginate una sbarra orizzontale senza peso con un perno nel suo centro. La sbarra è libera di ruotare intorno al suo centro. Applicate sul lato destro della sbarra una forza $F_1 = 100\,N$ verso il basso ad una distanza $b_1 = 20\,cm$. Applicate ora una seconda forza $F_2 = 70\,N$ verso il basso sul lato sinistro della sbarra ad una distanza $b_2 = 30\,cm$. Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento della forza F_1? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento della forza F_2? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento totale applicato sulla sbarra? *[$M_1 = 2000\,Ncm$ orario; $M_2 = 2100\,Ncm$ antiorario; $M_t = 100\,Ncm$ antiorario]*

3. Una sbarra orizzontale senza peso con un perno nel suo centro è libera di ruotare intorno al suo centro. Rispetto al centro, sul lato destro della sbarra è applicata una forza $F_1 = 300\,N$ verso il basso ad una distanza $b_1 = 10\,cm$; una seconda forza $F_2 = 60\,N$ è applicata verso il basso sul lato sinistro della sbarra ad una distanza $b_2 = 0,3\,m$; una terza forza $F_3 = 10\,N$ è applicata verso il basso sul lato destro della sbarra ad una distanza $b_3 = 4\,dm$. Quanto valgono e

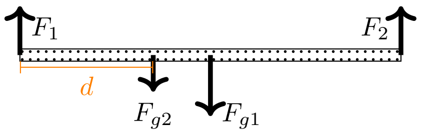
in quale verso fanno ruotare i momenti delle forze F_1, F_2, e F_3? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento totale applicato sulla sbarra? Se vogliamo applicare una forza F_4 ad una distanza $b_4 = 16\,cm$ dal centro sul lato destro, per equilibrare il sistema dal punto di vista della rotazione, quanto deve valere e verso dove deve essere diretta? *[$M_{1,or} = 3000\,Ncm$; $M_{2,an} = 1800\,Ncm$; $M_{3,or} = 400\,Ncm$; $M_{tot,or} = 1600\,Ncm$; $F_4 = 100\,N$ verso l'alto.]*

4. Una tavola di massa $m = 10\,kg$ e lunga $l = 180\,cm$ viene sollevata da due persone che la tengono dai bordi. Sulla tavola è appoggiato un oggetto di massa $m_1 = 5000\,g$ ad una distanza $d = 36\,cm$ dal bordo sinistro. Quale forza devono fare le due persone? *[$F_s = 88,2\,N$; $F_d = 58,8\,N$]*

5. un trampolino di lunghezza $l = 3\,m$ è vincolato ad un estremo da due perni distanti tra loro $d = 1\,m$. Se una persona di massa $m = 80\,kg$ si mette sulla punta del trampolino, quanto valgono le reazioni vincolari dei due perni?

Problema di: Dinamica - $D0016a$

Testo *[D0016a]* [3 4 1a]



Una trave di legno di massa $m_1 = 2\,kg$ e di lunghezza $L = 1\,m$ è sorretta ai bordi da due persone. Sulla trave si trova un oggetto di massa $m_2 = 1\,kg$ ad una distanza $d = 20\,cm$ dal bordo sinistro della trave. Quanto valgono le forze che fanno le due persone?

Spiegazione In questo problema abbiamo una sbarra in equilibrio sotto l'azione di quattro forze. La sbarra è ferma per cui la somma delle forze è zero e la somma dei momenti è zero. Imponendo queste due condizioni otteniamo le risposte alle domande del problema.

Svolgimento Imponendo l'equilibrio traslazionale avremo

$$F_1 + F_2 = F_{g1} + F_{g2}$$

Assumendo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_1 che si trova sull'estremo sinistro della sbarra, avremo che $M_1 = 0$, $M_{g1} = orario$, $M_{g2} = orario$, $M_2 = antiorario$, e quindi

$$0 + M_g + M_{g2} = M_2$$
$$F_{g1} \cdot \frac{L}{2} + F_{g2} \cdot d = F_2 \cdot L$$

da cui si ricava F_2

$$F_2 = \frac{m_1 g \frac{L}{2} + m_2 g d}{L} = m_1 g \frac{1}{2} + m_2 g \frac{d}{L} = 17,64\,N$$

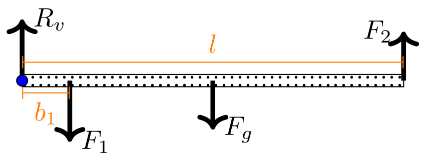
Calcolata F_2 possiamo adesso calcolare F_1 dalla prima formula scritta:

$$F_1 = m_1 g + m_2 g - F_2 = 11,76\,N$$

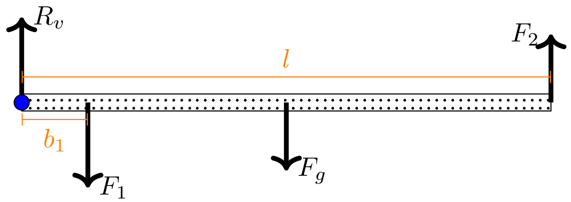
Problema di: Dinamica - $D0016b$

Testo *[D0016b]* [3 4 1a]

Una trave orizzontale di massa $m = 10\,kg$ e lunga $l = 200\,cm$ è libera di ruotare attorno ad un perno fisso posto nella sua estremità sinistra. La trave è tenuta ferma da una forza $F_1 = 100\,N$ posta ad una distanza $b_1 = 30\,cm$ dal perno ed una forza F_2 applicata al fondo della trave. Calcola i valori della forza F_2 e della reazione vincolare.



Spiegazione La trave in questione è ferma, quindi l'esercizio si risolve imponendo sia l'equilibrio traslazionale che quello rotazionale. Sulla trave agiscono quattro forze: la forza di gravità verso il basso, la forza F_1 verso il basso, la forza F_2 verso l'alto e la reazione vincolare del chiodo verso l'alto.



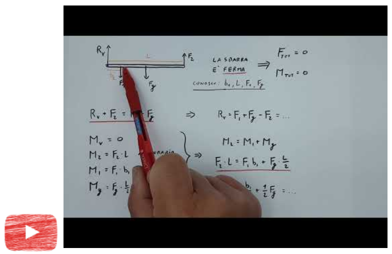


Fig. 5.4: *Guarda il video youtu.be/EDB5uP7azEQ*

Svolgimento Cominciamo con l'equilibrio rotazionale e analizziamo il verso di tutti i momenti delle forze presenti. Consideriamo il chiodo come il punto di rotazione della sbarra. Le forze F_1 ed F_2 generano momenti M_1 ed M_2; la forza di gravità $F_g = mg = 98\,N$ genera un momento M_g; la reazione vincolare R_v non genera alcun momento in quanto è applicata nel punto di rotazione.

$$M_{1-orario} = F_1 \cdot b_1 = 3000\,Ncm$$

$$M_{g-orario} = mg\frac{l}{2} = 9800\,Ncm$$

Imponendo la condizione di equilibrio rotazionale abbiamo:

$$M_{2-antiorario} = M_1 + M_g = 12800\,Ncm$$

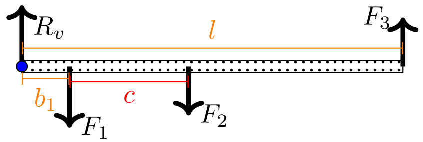
$$F_2 = \frac{M_2}{l} = 64\,N$$

Dove la forza F_2 deve essere verso l'alto. la condizione di equilibrio traslazionaòle è

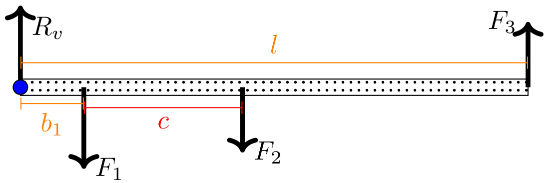
$$R_v = F_1 + F_g - F_2 = 134\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0016c$

Testo *[D0016c]* [3 4 1a]



Una trave orizzontale lunga $l = 2\,m$ è libera di ruotare attorno ad un perno fisso posto nella sua estremità sinistra. La trave viene tirata verso il basso da una forza $F_1 = 100\,N$ posta ad una distanza $b_1 = 30\,cm$ dal perno e da una forza $F_2 = 200\,N$ posta ad una distanza $c = 40\,cm$ dalla prima forza. Calcola la forza F_3 da applicare al fondo della trave per equilibrarla e non farla ruotare, e la reazione vincolare del chiodo.



Spiegazione La trave in questione è ferma e non deve ruotare, quindi l'esercizio si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale. Sulla trave agiscono quattro forze: la forza F_1 verso il basso, la forza F_2 verso il basso, la forza F_3 verso l'alto e la reazione vincolare del chiodo verso l'alto.

Svolgimento Cominciamo con l'equilibrio traslazionale e analizziamo il verso di tutti i momenti delle forze presenti. Consideriamo il chiodo come il punto di rotazione della sbarra. Le forze F_1 ed F_2 generano momenti M_1 ed M_2; la forza di gravità $F_g = mg = 98\,N$ genera un momento M_g; la reazione vincolare R_v non genera alcun momento in quanto è applicata nel punto di rotazione.

$$M_{1-orario} = F_1 \cdot b_1 = 100\,N \cdot 30\,cm = 3000\,N\,cm$$

$$M_{2-orario} = F_2 \cdot b_2 = F_2 \cdot (c + b_1) = 200\,N \cdot 70\,cm = 14000\,N\,cm$$

Imponendo la condizione di equilibrio rotazionale abbiamo:

$$M_{3-antiorario} = M_1 + M_2 = 17000\,N\,cm$$

$$F_3 = \frac{M_3}{l} = \frac{17000\,N\,cm}{200\,cm} = 85\,N$$

La reazione vincolare risulta quindi essere

$$R_v = F_1 + F_2 - F_3 = 215\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0017ban$

Testo *[D0017ban]* [1 18 1a]
Esercizi banali di Dinamica:

1. Calcolo di forze
   (a) Quanto vale la forza di gravità che agisce su di una macchina di massa $m = 800\,kg$? *[$F_g = 7840\,N$]*
   (b) Quanto vale la forza di Archimede che agisce su di un oggetto di densità $\rho = 0,7\,\frac{g}{cm^3}$ e di volume $V = 5\,cm^3$ completamente immerso nell'acqua? *[$F_{Arch} = 0,049\,N$]*
   (c) Se una molla esercita una forza $F = 100\,N$ e la vedo accorciarsi di $\Delta l = 2\,cm$, quanto vale la costante elastica di quella molla? *[$k = 50\,\frac{N}{cm}$]*
   (d) Una macchina di massa $m = 800\,kg$ sta facendo una curva di raggio $r = 20\,m$ ad una velocità $V = 50\frac{m}{s}$. Quale forza centrifuga spinge l'auto verso l'esterno della curva? *[$F_c = 10000\,N$]*
   (e) Una moto da corsa di massa $m = 100\,kg$ viaggia alla velocità $V = 70\,\frac{Km}{h}$ lungo una curva di raggio $r = 50\,m$. Quanto vale la forza centripeta che subisce la moto? *[$F_c = 756,17\,N$]*
2. Calcolo di Momenti di una forza
   (a) Una forza $F = 500\,N$ viene applicata ad una distanza $r = 2\,m$ da un punto fisso e formante un angolo $\alpha = 90°$ con la retta che unisce il punto fisso ed il punto di applicazione della forza. Quanto vale il momento di quella forza? *[$M = 1000\,Nm$]*
   (b) Una forza $F = 100\,N$ viene applicata ad una distanza $r = 3\,m$ da un punto fisso e formante un angolo $\alpha = 30°$ con la retta che unisce il punto fisso ed il punto di applicazione della forza. Quanto vale il momento di quella forza? *[$M = 150\,Nm$]*
   (c) Una forza $F = 50\,N$ viene applicata ad una distanza $r = 3\,m$ da un punto fisso e formante un angolo $\alpha = 180°$ con la retta che unisce il punto fisso ed il punto di applicazione della forza. Quanto vale il momento di quella forza? *[$M = 0\,Nm$]*
   (d) Ad un pendolo con asta, senza massa, di lunghezza $l = 30\,cm$ è appeso un oggetto di massa $m = 10\,kg$. Il pendolo è inclinato di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto alla verticale. Quanto vale il momento della forza di gravità che agisce sull'oggetto? *[$M = 20,8\,Nm$]*
   (e) Immaginate una sbarra orizzontale senza peso con un perno nel suo centro. La sbarra è libera di ruotare intorno al suo centro. Applicate sul lato destro della sbarra una forza $F_1 = 300\,N$ verso il basso ad una distanza $b_1 = 10\,cm$ dal perno. Applicate ora una seconda forza $F_2 = 60\,N$ verso il basso sul lato sinistro della sbarra ad una distanza $b_2 = 30\,cm$ dal perno. Applicate ora una terza forza $F_3 = 10\,N$ verso il basso sul lato destro della sbarra ad una distanza $b_3 = 40\,cm$ dal perno. Indica quanto valgono e in quale verso fanno ruotare: il momento della forza F_1, il momento della forza F_2, il momento della forza F_3, il momento totale applicato sulla sbarra. *[$M_{1-o} = 30\,Nm$; $M_{2-a} = 18\,Nm$; $M_{3-o} = 4\,Nm$; $M_{tot-o} = 16\,Nm$.]*
   (f) Su di una sbarra verticale, che come punto fisso la sua estremità inferiore, viene applicata orizzontalmente una forza $F_1 = 10\,N$ verso destra ad un'altezza $h_1 = 2\,m$. Una seconda forza orizzontale $F_2 = 30\,N$ viene applicata verso sinistra ad un'altezza $h_2 = 70\,cm$. Quanto vale il momento della prima forza? Quanto vale il momento della seconda forza? Quanto vale il momento totale applicato alla sbarra? *[$M_{1-o} = 20\,Nm$; $M_{2-a} = 21\,Nm$; $M_{tot-a} = 1\,Nm$]*

Spiegazione In questo esercizio ho raccolto tutte quelle domande *banali* che possono essere fatte su questo argomento. Per *banale* si intende un problema nel quale la domanda consiste semplicemente nel fornire dei dati da inserire in una formula. Non è quindi richiesta alcuna particolare capacità di ragionamento, ne particolari doti matematiche. Questo esercizio serve unicamente ad aquisire dimestichezza con l'esecuzione dei conti numerici con le unità di misura.

Svolgimento

1. Calcolo di forze

(a)
$$F_g = mg = 800\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 7840\,N$$

(b)
$$F_{Arch} = \rho_{fluido} \cdot V_{fluido-spostato} \cdot g = 1\,\frac{g}{cm^3} \cdot 5\,cm^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 0,049\,N$$

(c) Utilizzando la formula inversa
$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{100\,N}{2\,cm} = 50\,\frac{N}{cm}$$

(d)
$$F_c = m\frac{v^2}{r} = 800\,Kg \cdot \frac{2500\,\frac{m^2}{s^2}}{20\,m} = 10000\,N$$

(e)
$$F_c = m\frac{v^2}{r} = 100\,Kg \cdot \frac{4900\,\frac{1000\cdot 1000\,m^2}{3600\cdot 3600\,s^2}}{50\,m} = 756,17\,N$$

2. Calcolo di Momenti di una forza

(a)
$$M = 500\,N \cdot 2\,m \cdot sen(90°) = 1000\,Nm$$

(b)
$$M = 100\,N \cdot 3\,m \cdot sen(30°) = 150\,Nm$$

(c)
$$M = 50\,N \cdot 3\,m \cdot sen(180°) = 0\,Nm$$

(d)
$$M = 10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,3\,m \cdot sen(45°) = 20,8\,Nm$$

(e)
$$M_{1-orario} = F_1 \cdot b_1 \cdot sen(90°) = 300\,N \cdot 0,1\,m \cdot 1 = 30\,Nm$$
$$M_{2-antiorario} = F_2 \cdot b_2 \cdot sen(90°) = 60\,N \cdot 0,3\,m \cdot 1 = 18\,Nm$$
$$M_{3-orario} = F_3 \cdot b_3 \cdot sen(90°) = 10\,N \cdot 0,4\,m \cdot 1 = 4\,Nm$$
$$M_{tot-orario=M_{1-orario}+M_{3-orario}-M_{2-antiorario}=16\,Nm}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Su di una sbarra verticale, che come punto fisso la sua estremità inferiore, viene applicata orizzontalmente una forza $F_1 = 10\,N$ verso destra ad un'altezza $h_1 = 2\,m$. Una seconda forza orizzontale $F_2 = 30\,N$ viene applicata verso sinistra ad un'altezza $h_2 = 70\,cm$. Una terza forza orizzontale $F_3 = 30\,N$ viene applicata verso sinistra ad un'altezza $h_3 = 50\,cm$. Quanto valgono i momenti della prima forza, della seconda e della terza forza? Quanto vale il momento totale applicato alla sbarra? *[$M_{1-o} = 20\,Nm$; $M_{2-a} = 21\,Nm$; $M_{3-a} = 15\,Nm$; $M_{tot-a} = 16\,Nm$]*

2. Su di una sbarra orizzontale senza peso di lunghezza $l = 50\,cm$ applichiamo una forza $F = 100\,N$ verso il basso nell'estremo destro della sbarra. Quanto vale il momento della forza rispetto al punto centrale della sbarra? Quanto vale il momento della forza rispetto all'estremo sinistro della sbarra? Rispetto a quale punto il momento della forza è nullo? *[$M_{1-o} = 25\,Nm$; $M_{2-o} = 50\,Nm$; Rispetto all'estremo destro.]*

Problema di: Dinamica - $D0018$

Testo *[D0018]* [2 2 1a]
A quale velocità minima deve andare una motocicletta per fare il giro della morte su di una pista circolare di raggio $r = 10\,m$?

Spiegazione Durante il giro della morte, la motocicletta è soggetta a due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza centrifuga che schiaccia la moto contro la pista. La moto non si stacca dalla pista quando la forza centrifuga è per lo meno uguale alla forza di gravità.

Svolgimento Eguagliando le due forze che agiscono sulla moto avremo:

$$F_c = F_g$$
$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = mg$$
$$\frac{\mathcal{V}^2}{r} = g$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{gr} = \sqrt{9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,m} = 9,9\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Dinamica - $D0019$

Testo *[D0019]* [1 1 1a]
Quanto vale la forza di gravità che agisce su di un oggetto di ferro ($\rho_{Fe} = 7,874\,\frac{kg}{dm^3}$) di volume $V = 5\,dm^3$?

Spiegazione In questo problema bisogna semplicemente mettere i valori nelle formule e fare i conti. l'unica particolarità è quella di notare che per calcolare la forza di gravità bisogna avere la massa dell'oggetto, mentre il problema fornisce soltanto il suo volume. Avendo però specificato il materiale, è come se il problema ci avesse anche indicato il valore della densità dell'oggetto.

Svolgimento La massa dell'oggetto vale

$$m = \rho \cdot V = 7874\,\frac{kg}{m^3}\cdot 0,005\,m^3 = 39,37\,kg$$

Quindi la forza di gravità vale

$$F_g = mg = 39,37\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 385,826\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0020$

Testo *[D0020]* [1 2 1a]
Un oggetto di massa $m = 100\,kg$ e volume $V = 5\,dm^3$ si trova sul fondo di una piscina piena di acqua ($\rho_{acqua} = 1\,\frac{kg}{dm^3}$). Quanto vale la densità dell'oggetto? Se sollevo l'oggetto con una forza $F_2 = 2000\,N$, con quale forza totale l'oggetto si muove?

Spiegazione Questo esercizio si risolve semplicemente mettendo i dati all'interno delle formule ed eseguendo una somma di vettori.

Svolgimento La densità dell'oggetto vale

$$\rho_{ogg} = \frac{m}{V} = \frac{100\,kg}{5\,dm^3} = 20\,\frac{kg}{dm^3}$$

La forza di gravità che agisce sull'oggetto vale

$$F_g = mg = 100\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 980\,N$$

La forza di Archimede vale

$$F_{Arc} = \rho_f V_{fs} g = 1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 5\,dm^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 49\,N$$

Sommando tutte le forze, tenendo conto che la forza di gravità spinge verso il basso e le altre due verso l'alto, avremo che la forza totale verso l'alto vale

$$F_{tot} = 1069\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0021$

Testo *[D0021]* [1 3 1a]
Una statua d'oro ($m = 19,3\,kg$; $V = 1\,dm^3$) viene lanciata in mare ($\rho_{H_2O-mare} = 1,02\frac{kg}{dm^3}$). Calcola la forza di gravità, di Archimede e totale che agiscono sulla statua. Se attacco alla statua un pallone di massa $m_p = 1,7\,kg$ e volume $V_p = 40\,dm^3$, quanto vale la forza totale sulla statua?

Spiegazione Abbiamo un oggetto immerso nell'acqua che subisce quindi due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza di Archimede verso l'alto.

Svolgimento La densità dell'oro vale

$$\rho_{Au} = \frac{m}{V} = \frac{19,3\,kg}{1\,dm^3} = 19,3\,\frac{kg}{dm^3}$$

La forza di gravità, di Archimede e totale che agiscono sull'oggetto valgono

$$F_g = mg = 19,3\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 189,1\,N$$

$$F_{Arc} = \rho_f V_{fs} g = 1,02\frac{kg}{dm^3} \cdot 1\,dm^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 10\,N$$
$$F_{tot} = F_g - F_{Arc} = 179,1\,N$$

Attaccando poi il pallone, cambiano di conseguenza la massa del sistema ed il volume dello stesso. I nuovi valori di forza di gravità, di Archimede e totale sono:

$$F_{g2} = (m + m_p)\,g = (19,3\,kg + 1,7\,kg) \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 205,8\,N$$

$$F_{Arc2} = \rho_f V_{fs} g = 1,02\frac{kg}{dm^3} \cdot \left(1\,dm^3 + 40\,dm^3\right) \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 409,8\,N$$
$$F_{tot2} = F_{Arc2} - F_{g2} = 204\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0022$

Testo [D0022] [2 2 1a]
Un oggetto di massa $m = 500\,g$ si muove di moto circolare uniforme di raggio $r = 20\,cm$ ad una velocità $V = 4\,\frac{m}{s}$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 10\,\frac{N}{cm}$. Quanto vale la forza centrifuga che tira la molla? Di conseguenza, di quanto si è allungata la molla?

Spiegazione In questo esercizio un oggetto si muove di moto circolare uniforme. Per muoversi in tale modo, serve una forza centripeta, e tale forza è data da una molla.

Svolgimento La forza centrifuga che tira la molla vale

$$F_c = m\frac{V^2}{r} = 0,5\,kg \cdot \frac{16\,\frac{m^2}{s^2}}{0,2\,m} = 40\,N$$

Eguagliano poi la forza centripeta con la forza elatrica avremo:

$$F_e = F_c$$

$$k \cdot \Delta l = m\frac{V^2}{r}$$

$$\Delta l = \frac{mV^2}{kr} = \frac{0,5\,kg \cdot 16\,\frac{m^2}{s^2}}{1000\,\frac{N}{m} \cdot 0,2\,m} = 0,04\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0023$

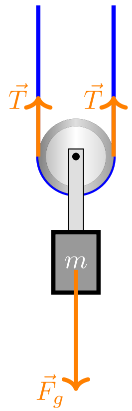
Testo [D0023] [1 1 1a]
Una carrucola sta sorreggendo un oggetto di massa $m = 6\,kg$. L'oggetto è attaccato all'asse centrale della carrucola ed entrambi i capi della corda intorno alla carrucola vengono tirati verso l'alto. Quanto vale la tensione sul filo che tiene la carrucola?

Spiegazione Il cavo che tiene la carrucola tira verso l'alto sia sul lato destro che sul lato sinistro della carrucola. Il doppio della tensione del filo sarà quindi pari alla forza con cui la carrucola viene tirata verso il basso

Svolgimento Imponendo l'equilibrio statico avremo

$$2T = F_g$$

$$T = \frac{mg}{2} = \frac{6\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{2} = 29,4\,N$$

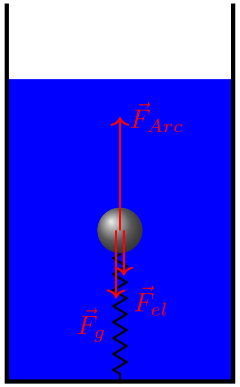


Problema di: Dinamica - $D0025$

Testo *[D0025]* [2 2 1a]

Un palloncino è tenuto fermo sott'acqua da una molla di costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$. Il suo volume è $V = 1\,dm^3$ e la sua massa è $m = 400\,g$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione In questo problema il palloncino è fermo, quindi la somma di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla. Le forze in gioco sono tre: la forza elastica della molla, la forza di gravità e la forza di Archimede. La forza di gravità è verso il basso; quella di Archimede verso l'alto. La forza elastica deve adattarsi allo scopo di rendere nulla la somma delle forze. Considerando che parliamo di un palloncino ci aspettiamo (ma dobbiamo poi confermarlo con i conti) che la forza elastica sia rivolta verso il basso, in quanto, se lasciato libero, ci aspettiamo che quel palloncino si muova verso l'alto per andare a galleggiare.



Svolgimento La condizione di equilibrio traslazionale è:

$$F_g + F_{el} = F_{Arc}$$

tenendo conto che il palloncino è tutto immerso, e quindi il volume di fluido spostato è pari al volume dell'oggetto

$$m \cdot g + K \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g$$

da cui, con la formula inversa

$$K \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g - m \cdot g$$

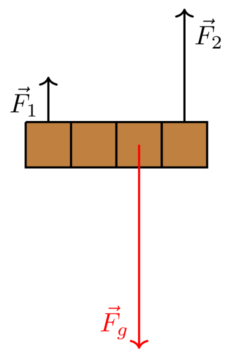
$$\Delta l = \frac{\rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g - m \cdot g}{K}$$

$$\Delta l = \frac{1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 1\,dm^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - 0,4\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{5\,\frac{N}{cm}} = 1,176\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0026$

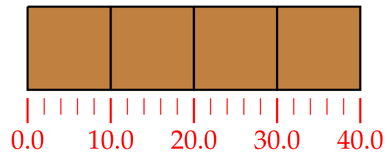
Testo *[D0026]* [3 4 1a]
Una sbarra orizzontale è realizzata unendo quattro cubi di lato $l = 10\,cm$ e massa rispettivamente $m_1 = 1\,kg$, $m_2 = 2\,kg$,$m_3 = 3\,kg$,$m_4 = 4\,kg$. La sbarra è sorretta da due fili attaccati nel centro del primo e del quarto cubo. Calcola il baricentro della sbarra e le forze F_1 ed F_2 che devono fare i due fili affinché la sbarra sia ferma.

Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio. La sbarra è ferma e quindi non trasla e non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio traslazionale e l'equilibrio rotazionale. Una delle forze del problema è la forza di gravità che agisce sulla sbarra; il problema può essere risolto in due modi: o consideriamo quattro diverse forze di gravità applicare ognuna nel baricentro di ognuno dei quattro cubi, oppure consideriamo una sola forza di gravità applicata nel baricentro della sbarra. Lo schema dell'esercizio è il seguente:



La soluzione più facile per risolvere il problema è quella di considerare la sbarra come un solo oggetto da $m_{tot} = 10\,kg$; calcolarne la posizione del baricentro, in modo da sapere dove mettere la forza di gravità; ed infine impostare le due equazioni dell'equilibrio.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la posizione del baricentro della trave. Mettiamo un sistema di riferimento come mostrato in figura



$$x_B = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_B = \frac{5\,cm \cdot 1\,kg + 15\,cm \cdot 2\,kg + 25\,cm \cdot 3\,kg + 35\,cm \cdot 4\,kg}{10\,kg} = 25\,cm$$

Stabilita la posizione del baricentro della sbarra, punto nel quale applicheremo la forza di gravità, dobbiamo ora imporre le condizioni dell'equilibrio.

La condizione di equilibrio rotazionale deve essere imposta solo dopo avere identificato il punto di rotazione rispetto al quale calcoliamo i momenti delle forze. Come punto di rotazione scegliamo il baricentro del primo cubo. La condizione di equilibrio rotazionale diventa

$$M_2 = M_g$$

$$F_2 \cdot b_2 = F_g \cdot b_g$$

$$F_2 = \frac{F_g \cdot b_g}{b_2} = \frac{m_{tot} g \cdot b_g}{b_2}$$

$$F_2 = \frac{10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 20\,cm}{30\,cm} = \frac{196}{3}\,N$$

La condizione di equilibrio traslazionale è

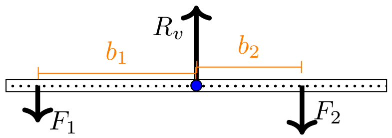
$$F_{tot} = 0$$

$$F_1 + F_2 = F_g$$

$$F_1 = F_g - F_2 = 10\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - \frac{196}{3}\,N = \frac{98}{3}\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0027$

Testo *[D0027]* [2½ 3 1a]



Una sbarra orizzontale è tenuta ferma da un chiodo nel suo centro. Sula lato sinistro, ad una distanza $b_1 = 18\,cm$ viene applicata una forza $F_1 = 30\,N$ verso il basso. Sul lato destro, ad una distanza $b_2 = 12\,cm$ viene applicata una forza F_2 verso il basso. Quanto vale la forza F_2 per tenere ferma la sbarra?

Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio rotazionale, in quanto le forze in questione non sono posizionate nel punto di rotazione della sbarra. La sbarra è ferma e quindi non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale.

Svolgimento Il momento della forza $M_1 = F_1 \cdot b_1$, antiorario, deve essere uguale al momento della forza $M_2 = F_2 \cdot b_2$ che è invece orario.

$$M_2 = M_1$$

$$F_2 \cdot b_2 = F_1 \cdot b_1$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot b_1}{b_2} = \frac{30\,N \cdot 18\,cm}{12\,cm} = 45\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0031$

Testo *[D0031]* [2 2 1a]

In una giostra dei seggiolini tenuti da una catena si muovono di moto circolare uniforme in orizzontale con frequenza $\nu = 0,25\,Hz$ descrivendo un cerchio di raggio $r = 3\,m$. Una persona seduta nel seggiolino ha una massa $m = 70\,kg$. Quanta forza deve fare la catena per sorreggere il seggiolino?

Spiegazione L'oggetto si muove di moto circolare uniforme, quindi la forza di gravità sommata alla forza esercitata dalla catena danno la forza centripeta che fa muovere il seggiolino di moto circolare. Nel sistema di riferimento della persona sul seggiolio, egli sente la forza di gravità, la forza esercitata dalla catena e la forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il problema si risolverà imponendo un'equilibrio tra queste tre forze. Il risultato dell'esercizio rappresenta di fatto il peso della persona.

Svolgimento Imponendo l'equilibrio tra forza centrifuga, forza di gravità e reazione vincolare della catena avremo

$$\vec{R_v} = \vec{F_g} + \vec{F_g}$$

La forza di gravità è verticale verso il basso; la forza centripeta è orizzontale verso l'esterno della curva. La reazione vincolare è sulla stessa direzione della somma delle due precedenti forze, ma ha verso opposto. Per passare dall'equazione vettoriale a quella scalare dovremo utilizzare il teorema di pitagora dove il modulo di $\vec{R_v}$ è l'ipotenusa di un triangolo i cui cateti sono uguali ai moduli di $\vec{F_g}$ e $\vec{F_g}$; per cui

$$R_v = \sqrt{F_g^2 + F_c^2} = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 \cdot \omega^4 r^2}$$

sapendo che nel moto circolare uniforme

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 1.57\,\frac{rad}{s}$$

possiamo quindi calcolare la reazione vincolare della catena

$$R_v = m \cdot \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2} = 70\,kg \cdot \sqrt{96,04\,\frac{m^2}{s^4} + 54,68\,\frac{m^2}{s^4}} = 859,4\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0032$

Testo *[D0032]* [2½ 3 1a]
State tenendo in mano un sasso di massa $m = 1\,kg$ mentre l'avambraccio è fermo in posizione orizzontale. Il sasso si trova ad una distanza $b_1 = 30\,cm$ dal gomito. Il muscolo bicipite, che esprime una forza verso l'alto, è attaccato all'avambraccio ad una distanza $b_2 = 5\,cm$ dal gomito. Quanto vale la forza che deve fare il muscolo per sorreggere il sasso? Quale forza agisce sul gomito?

Spiegazione L'avambraccio del nostro problema si può modellizzare come una trave orizzontale bloccata da un perno (il gomito) su un lato, spinta verso l'alto da una forza F_2 applicata vicina al perno, e spinta verso il basso da una forza F_g applicata lontano dal perno. Visto che l'avambraccio è fermo, allora la somma delle forze e la somma dei momenti che agiscono su di esso sono nulle.

Svolgimento Indicando con R_v la forza che tiene l'avambraccio attaccato al gomito, l'equazione dell'equilibrio traslazionale è

$$F_2 = R_v + F_g$$

dove la forza di gravità sul sasso vale

$$F_g = mg = 1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 9,8\,N$$

Indichiamo il gomito come punto di rotazione del sistema (nei conti che seguono ho ipotizzato di disegnare il gomito della persona sulla sinistra e la relativa mano sulla destra). La forza F_g genera un momento M_g orario; la forza F_2 genera un momento M_2 antiorario. L'equazione dell'equilibrio traslazionale è

$$M_2 = M_g$$

Quindi

$$F_2 b_2 = F_g b_1$$

$$F_2 b_2 = m g b_1$$

$$F_2 = \frac{F_g b_1}{b_2} = \frac{9,8\,N \cdot 30\,cm}{5\,cm} = 58,8\,N$$

Riprendendo adesso la prima formula

$$R_v = F_2 - F_g = 58,8\,N - 9,8\,N = 49\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0033$

Testo *[D0033]* [1 1 1a]
Faccio più fatica a sorreggere un oggetto di ferro di densità $\rho_{Fe} = 7874\,\frac{kg}{m^3}$ e volume $V_{Fe} = 2\,dm^3$ o ad allungare una molla di costante elastica $k = 30\,\frac{N}{cm}$ dalla lunghezza $l_i = 10\,cm$ alla lunghezza $l_f = 15\,cm$?

Spiegazione In questo esercizio viene chiesto di confrontare i valori di due forze differenti per dire quale delle due è più intensa. Le due forze sono la forza di gravità sull'oggetto di ferro e la forza elastica sulla molla.

Svolgimento La forza di gravità vale

$$F_g = mg = 2\,dm^3 \cdot 7874\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 0,002\,m^3 \cdot 7874\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 154,33\,N$$

La forza elastica della molla vale

$$F_{el} = k \cdot \Delta l = k \cdot (l_f - l_i) = 30\,\frac{N}{cm} \cdot 5\,cm = 150\,N$$

la forza di gravità è quindi maggiore

Problema di: Dinamica - *D*0034

Testo *[D0034]* [3 3 2a]
Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2\,kg$ ed $m_2 = 5\,kg$. Con quale accelerazione si muove il sistema? *[Si consideri una carrucola ideale, di massa trascurabile e senza alcun attrito, ed un filo insestensibile.]*

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. Conoscendo quindi le masse e le forze in gioco, il problema chiede di determinare l'accelerazione del sistema. L'unica formula che qui ci serve applicare è il secondo principio della dinamica

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$$

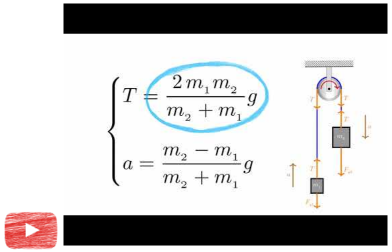
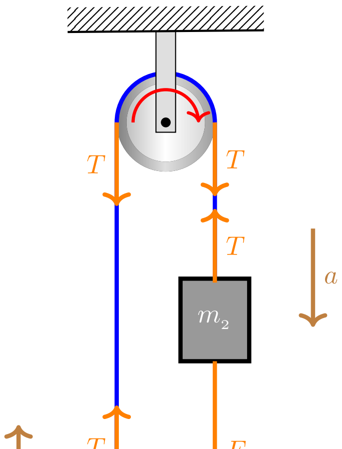


Fig. 5.5: *Guarda il video youtu.be/2z0IIAzU2PM*

Svolgimento Uno dei due oggetti accelera verso il basso (per esempio l'oggetto numero 2), mentre l'altro accelera verso l'alto. Per i due oggetti possiamo applicare il secondo principio della dinamica.



$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

da cui, utilizzando il metodo di sostituzione, avremo

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ m_2 g - m_1 a - m_1 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ (m_2 - m_1)\, g = (m_2 + m_1)\, a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ a = \dfrac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 \dfrac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g + m_1 g \\ a = \dfrac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g + m_1 g \\ a = \dfrac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{2\,m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \\ a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \end{cases}$$

$$a = \frac{3\,kg}{7\,kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 4,2\,\frac{m}{s^2}$$

$$T = \frac{20}{7} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 28\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0035$

Testo *[D0035]* [1 1 1a]
Se vuoi mantenere un sasso sott'acqua senza che tocchi il fondo, devi fare una forza verso l'alto o verso il basso? Disegna le forze sull'oggetto e motiva la tua risposta. Immagina adesso di fare la stessa cosa con un pallone di plastica, devi fare una forza verso l'alto o verso il basso? Disegna le forze sull'oggetto e motiva la tua risposta.

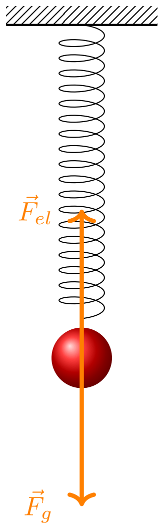
Spiegazione In questo esercizio si richiede di analizzare la condizione di equilibrio per un corpo immerso in un liquido. Per rispondere alle domande devi disegnare le forze che agiscono sui corpi e poi disegnare la forza che devi fare tu al fine di creare una condizione di equilibrio traslazionale.

Svolgimento Nel caso del sasso, abbiamo una forza di gravità verso il basso maggiore della forza di Archimede verso l'alto. Per avere equilibrio $\vec{F}_{tot} = 0$ tu dovrai fare una forza verso l'alto.

Nel caso del pallone, abbiamo una forza di gravità verso il basso minore della forza di Archimede verso l'alto. Per avere equilibrio $\vec{F}_{tot} = 0$ tu dovrai fare una forza verso il basso.

Problema di: Dinamica - $D0036$

Testo *[D0036]* [2 2 1a]
Ad una molla di costante elastica $k = 50\,\frac{N}{m}$ viene appeso un oggetto di massa $m = 4\,kg$. Di quanto si allunga la molla?



Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira l'oggetto verso il basso mentre la molla si allunga e lo spinge verso l'alto. Essendo l'oggetto fermo, allora la forza totale che agisce sull'oggetto è nulla.

Svolgimento L'oggetto è fermo, quindi la forza totale che agisce è nulla.

$$F_{el} - F_g = 0$$

per cui

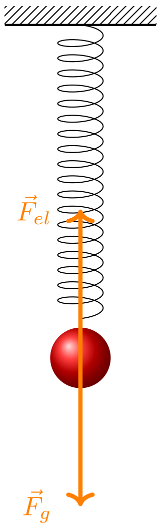
$$k \cdot \Delta l = m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{4\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{50\,\frac{N}{m}} = 0,784\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0036a$

Testo *[D0036a]* [2 2 1a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$, appeso ad una molla, la allunga di $\Delta l = 0,784\,cm$. Calcola la costante elastica della molla.

Spiegazione Appendendo l'oggetto alla molla, la molla si allunga. Non focalizziamoci sul fatto che per un certo tempo l'oggetto appeso oscillerà, ma concentriamoci sulla posizione finale che l'oggetto assume, cioè quando l'oggetto si ferma. Quando l'oggetto è fermo è in equilibrio.



Svolgimento Quando l'oggetto appeso alla molla è fermo, allora è in equilibrio e quindi la somma delle forze su di esso deve valere zero. La forza elastica è quindi uguale alla forza di gravità.

$$F_{el} = F_g$$

$$k \cdot \Delta l = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{0,784\,cm} = 25\,\frac{N}{cm}$$

Problema di: Dinamica - $D0037$

Testo *[D0037]* [2 2 1a]
Su di una macchina sale una persona di massa $m = 80\,kg$. Di quanto si abbassa la macchina se le quattro molle su cui poggia hanno costante elastica $k = 100\,\frac{N}{cm}$?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira la persona verso il basso mentre le quattro molle si schiacciano e spingono verso l'alto. Essendo il sistema fermo, allora la forza totale che agisce su di esso è nulla. Le quattro molle insieme, schiacciandosi, aumentano la forza che fanno per compensare l'aumento del peso dovuto alla presenza della persona.

Svolgimento Il sistema è fermo, quindi la forza totale che agisce è nulla.

$$4F_{el} - F_g = 0$$

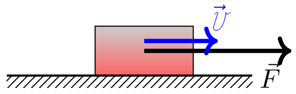
per cui

$$4k \cdot \Delta l = m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{4k} = \frac{80\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{4 \cdot 100\,\frac{N}{cm}} = 1,96\,cm$$

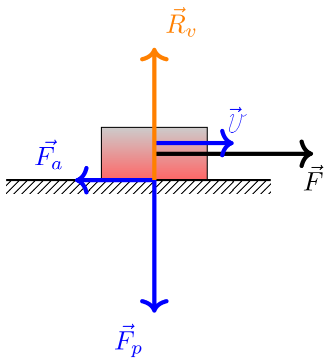
Problema di: Dinamica - $D0038$

Testo *[D0038]* [2★ 2⌛ 1a📖]



Un oggetto di peso $F_p = 40\,N$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,02$, spinto da una forza $F = 20\,N$ nello stesso verso del moto. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso del moto e la forza di attrito ad essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

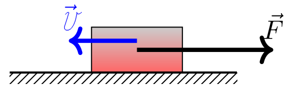


Svolgimento

$$F_{tot} = F - F_a = F - \mu_d F_p = 20\,N - 0,02 \cdot 40\,N = 19,2\,N$$

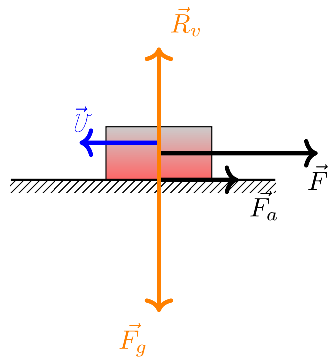
Problema di: Dinamica - $D0038a$

Testo *[D0038a]* [2★ 2⌛ 1a📖]



Un corpo di peso $F_p = 40\,N$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,02$, spinto da una forza $F = 20\,N$ opposta al verso del moto. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze concordi: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso opposto del moto e la forza di attrito ad essa opposta al verso del moto. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

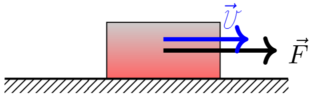


Svolgimento

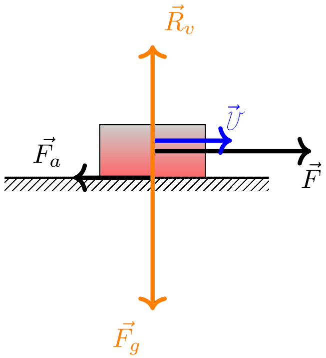
$$F_{tot} = F + F_a = F + \mu_d F_p = 20\,N + 0,02 \cdot 40\,N = 20,8\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0039$

Testo *[D0039]* [3 3 1a]



Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,2$, spinto da una forza $F = 20\,N$ nello stesso verso del moto. Considera che l'oggetto ha un volume $V = 0,5\,m^3$ e che la densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3\,\frac{kg}{m^3}$. Qual è la forza totale che agisce su di esso?



Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. In questo caso il peso dell'oggetto è pari alla forza do gravità che subisce, in quanto trascuriamo gli effetti della forza di Archimede. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto nella direzione del moto e la forza di attrito ad essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

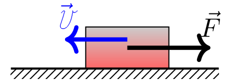
Svolgimento

$$F_{tot} = F - F_a = F - \mu_d\,(F_g - \rho_{aria}Vg)$$

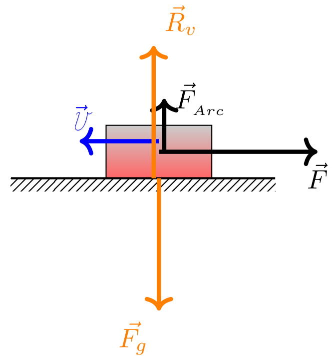
$$F_{tot} = F - \mu_d\,(mg - \rho_{aria}Vg) = 20\,N - 0,2 \cdot \left(2\,kg - 0,5\,m^3 \cdot 1,3\,\frac{kg}{m^3}\right) \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 17,35\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0039a$

Testo *[D0039a]* [3 3 1a]



Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,2$, spinto da una forza $F = 20\,N$ con verso opposto a quello del moto. Considera che l'oggetto ha un volume $V = 0.5\,m^3$ e che la densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3\,\frac{kg}{m^3}$. Qual è la forza totale che agisce su di esso?



Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. In questo caso il peso dell'oggetto è pari alla forza di gravità che subisce meno la forza di Archimede nel senso opposto. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze concordi: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso opposto a quello del moto e la forza di attrito anch'essa essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

Svolgimento

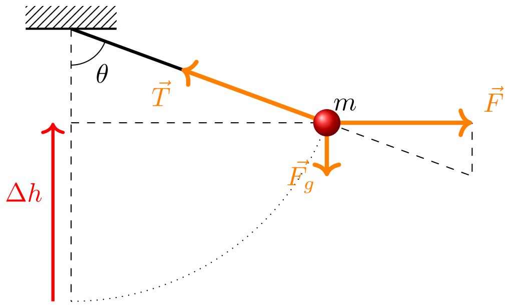
$$F_{tot} = F + F_a = F + \mu_d\,(F_g - \rho_{aria}Vg)$$

$$F_{tot} = F + \mu_d\,(mg - \rho_{aria}Vg)$$

$$T_{tot} = 20\,N + 0,2 \cdot \left(2\,kg - 0,5\,m^3 \cdot 1,3\,\frac{kg}{m^3}\right) \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 22,65\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0040$

Testo [D0040] [2 2 1a]
Un pendolo di massa $m = 300\,g$ è fermo, tirato in orizzontale da una forza $F = 6\,N$. Calcola la tensione del filo.



Spiegazione In questo problema abbiamo tre forze disposte su di un piano: la forza di gravità verso il basso, la forza esterna in orizzontale (immaginiamo verso destra) e la tensione del filo in diagonale lungo il filo. In una condizione di equilibrio la somma delle tre forze è nulla. La forza di gravità è compensata dalla componente verticale della tensione del filo; la forza esterna è compensata dalla componente orizzontale della tensione del filo. É inoltre importante notare che il triangolo rettangolo formato dalle tre forze è simile al triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti).

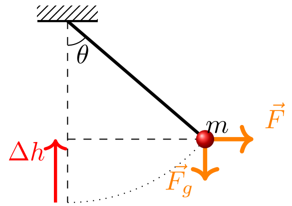
Svolgimento La tensione del filo è in modulo pari alla somma della forza di gravità e della forza esterna

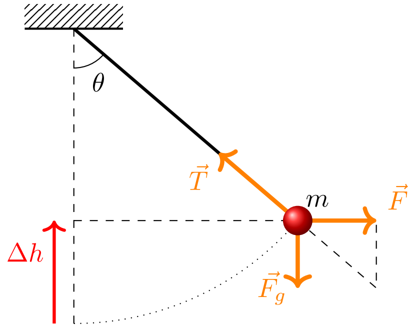
$$T = \sqrt{F_g^2 + F^2} = \sqrt{m^2 g^2 + F^2} = \sqrt{0,09\,kg^2 \cdot 96,04\,\frac{m^2}{s^4} + 36\,N^2}$$

$$T = 6,68\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0041$

Testo [D0041] [3 4 2a]
Un pendolo è realizzato con un peso di massa $m = 700\,g$ ed un filo di lunghezza $L = 2\,m$. Esso viene tirato in orizzontale da una forza $F = 8\,N$ fino a raggiungere l'equilibrio. Quanto vale la tensione del filo che sorregge il peso? Di quanto si è sollevato il peso rispetto alla posizione di minima altezza?





Spiegazione In questo problema abbiamo tre forze disposte su di un piano: la forza di gravità verso il basso, la forza esterna in orizzontale (immaginiamo verso destra) e la tensione del filo in diagonale lungo il filo. In una condizione di equilibrio la somma delle tre forze è nulla. La forza di gravità è compensata dalla componente verticale della tensione del filo; la forza esterna è compensata dalla componente orizzontale della tensione del filo. É inoltre importante notare che il triangolo rettangolo formato dalle tre forze è simile al triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti).

Svolgimento La tensione del filo è in modulo pari alla somma della forza di gravità e della forza esterna

$$T = \sqrt{F_g^2 + F^2}$$

$$T = \sqrt{m^2 g^2 + F^2}$$

$$T = \sqrt{0,49\,kg^2 \cdot 96,04\,\frac{m^2}{s^4} + 64\,N^2}$$

$$T = 10,54\,N$$

Consideriamo adesso il triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti) Il cateto verticale lo si trova sfruttando la similitudine tra triangoli e la conseguente proporzionalità tra i lati.

$$y : F_g = L : T$$

per cui

$$y = L \cdot \frac{F_g}{T} = L \cdot \frac{F_g}{\sqrt{Fg^2 + F^2}}$$

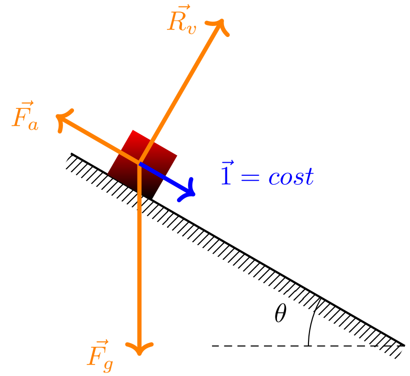
La massa attaccata al pendolo si è quindi sollevata di una quantità

$$\Delta h = L - y = L \cdot \left(1 - \frac{F_g}{\sqrt{Fg^2 + F^2}}\right) = 0,70\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0043$

Testo *[D0043]* [2½ 2 1a]
Un oggetto striscia con velocità costante su di un piano inclinato. Sapendo che la reazione vincolare del piano vale $R_v = 17\,N$ e che le forze di attrito valgono $F_a = 9,8\,N$, calcolate la massa dell'oggetto ed il coefficiente di attrito dinamico del piano.

Spiegazione L'oggetto si muove con velocità costante, quindi per il primo principio della dinamica la somma delle forze su di esso è nulla. Lo schema delle forze è rappresentato qui a lato. La reazione vincolare e la forza di attrito sono tra loro perpendicolari.



Svolgimento Visto lo schema delle forze avremo:

$$-\vec{F}_g = \vec{R}_v + \vec{F}_a$$

e di conseguenza

$$F_g = \sqrt{R_v^2 + F_a^2} = \sqrt{385\,N^2} = 19,6\,N$$

La massa del corpo sarà quindi

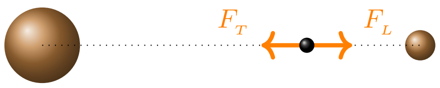
$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{19,6\,N}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 2\,kg$$

La forza che schiaccia il corpo contro il piano inclinato è pari alla reazione vincolare del piano, quindi il coefficiente di attrito dinamico sarà

$$\mu_d = \frac{F_a}{R_v} = 0,58$$

Problema di: Dinamica - $D0044$

Testo *[D0044]* [2 3 2a]
In quale punto, sulla linea tra la Terra e la Luna, deve essere messo un satellite affinché subisca a causa dei due corpi celesti una forza di gravità complessiva nulla?



Spiegazione Il satellite in questione si deve trovare sul segmento di congiunzione tra due corpi celesti; in questo modo subisce due forze di gravità aventi stessa direzione ma verso opposto. Affinchè le forze siano uguali è necessario che il satellite si trovi più distante dal corpo celeste con più massa.

Svolgimento Indichiamo con r la distanza del satellite dalla Terra. Indichiamo con d la distanza della Terra dalla Luna. Per avere che il satellite sia sulla congiungente dei due corpi celesi dobbiamo avere $0 < r < d$

Eguagliamo adesso le due forze di gravità che agscono sul satellite.

$$G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_L m}{(d-r)^2}$$

da cui

$$\frac{M_T}{r^2} = \frac{M_L}{(d-r)^2}$$

$$\frac{r^2}{M_T} = \frac{(d-r)^2}{M_L}$$

$$\frac{M_L}{M_T} r^2 = d^2 - 2dr + r^2$$

$$\left(1 - \frac{M_L}{M_T}\right) r^2 - 2dr + d^2 = 0$$

Indichiamo per comodità $a = \dfrac{M_L}{M_T}$ Procediamo con i calcoli ed avremo

$$r = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - d^2(1-a)}}{1-a}$$

$$r = d\frac{1 \pm \sqrt{a}}{1-a}$$

Escludiamo adesso la soluzione che non rappresenta una posizione che sia tra i due corpi celesti, rimane

$$r = d\frac{1 - \sqrt{a}}{1-a}$$

Nel nostro problema r è la distanza del satellite dalla Terra, d è la distanza della Luna dalla Terra, a è il rapporto tra la assa della luna e quella della Terra. Avremo quindi

$$\begin{cases} a = \frac{M_L}{M_T} = 0,0123 \\ d = 384400\,km \\ r = 384400\,km\dfrac{1-\sqrt{0,0123}}{1-0,0123} = 346020\,km \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - $D0045$

Testo *[D0045]* [2 2 1a]
Un'automobile di massa $m = 800\,kg$ si appoggia su quattro ammortizzatori di costante elastica $k = 100\frac{N}{cm}$. Di quanto vengono compressi tali ammortizzatori a causa del peso dell'automobile?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira il vaso verso il basso l'automobile, mentre le quattro molle attaccate alle ruote spingono verso l'alto. Visto che l'automobile è ferma, vuol dire che la somma delle forze su di lei è nulla.

Svolgimento La somma delle forze sulla macchina è nulla, quindi

$$F_g = 4 \cdot F_{el}$$

$$M \cdot g = 4 \cdot k \cdot \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{4k}$$

$$\Delta l = \frac{800\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{4 \cdot 100\,\frac{N}{cm}} = 19,6\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0046$

Testo *[D0046]* [2 3 1a]
A due molle identiche, montate in serie, di massa $m = 0,2\,kg$ e costante elastica $K = 2\,\frac{N}{cm}$ è appeso un oggetto di massa $M = 1\,kg$. Di quanto si allungano complessivamente le due molle?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira le due molle verso il basso. La seconda molla deve solo sostenere il peso dell'oggetto, mentre la prima molla deve sostenere anche il peso della seconda molla. La prima molla quindi si allungherà più della seconda.

Svolgimento Per la seconda molla vale la condizione di equilibrio:

$$K \cdot \Delta l_2 = M \cdot g \qquad \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{M \cdot g}{K}$$

Per la prima molla vale la condizione di equilibrio:

$$K \cdot \Delta l_1 = (M + m) \cdot g \qquad \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(M + m) \cdot g}{K}$$

L'allungamento totale ottenuto sarà quindi

$$\Delta l_{tot} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{M \cdot g}{K} + \frac{(M + m) \cdot g}{K}$$

$$\Delta l_{tot} = \frac{(2M + m) \cdot g}{K} = \frac{2,2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{2\,\frac{N}{cm}} = 10,8\,cm$$

Problema di: Dinamica - *D*0047

Testo *[D0047]* [2 2 1a]
Una macchina di massa $m = 800\,kg$ sta facendo una curva di raggio $r = 20\,m$ su asfalto bagnato e con le gomme lisce. Tra l'asfalto e le ruote il coefficiente di attrito è $\mu = 0,2$. Quanto vale l'attrito dell'auto sull'asfalto? A quale velocità massima può andare la macchina per non uscire di strada?

Spiegazione Un'automobile percorre una curva di moto circolare uniforme grazie alla forza di tipo centripeto fornita dalla forza di attrito delle ruote con l'asfalto.

Svolgimento La forza di gravità e la forza di attrito radente sull'auto valgono

$$F_g = mg = 800\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 7840\,N$$

$$F_a = \mu F_g = 0,2 \cdot 7840\,N = 1568\,N$$

La forza centripeta necessaria per fare la curva dipende dalla velocità dell'auto ed è data dalla forza di attrito delle ruote con l'asfalto.

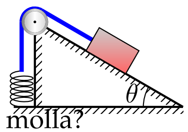
$$F_c = F_a \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = \mu m g$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{\mu m g r}{m}} = \sqrt{\frac{1568\,N \cdot 20\,m}{800\,kg}} = 6,261\,\frac{m}{s}$$

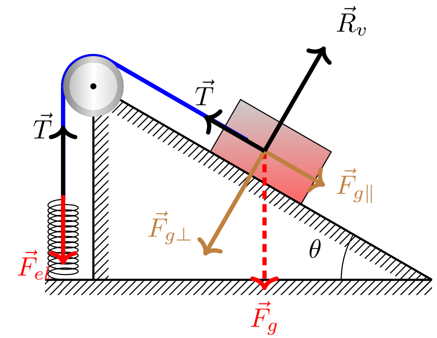
Se l'auto viaggia a velocità superiore esce di strada.

Problema di: Dinamica - *D*0048

Testo *[D0048]* [2 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ è fermo su di un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale, senza attrito, attaccato ad una molla di costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$. Di quanto si allunga la molla?



Spiegazione Il peso è soggetto alla forza di gravità verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendicolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. La molla viene tirata verso l'alto dal filo, e quindi lei tira verso il basso.



Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento Dal momento che il sistema è fermo, allora la somma delle forze deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio deve essere applicata ad entrambi i punti significativi: il baricentro dell'oggetto e la punta della molla. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} F_{g\parallel} - T = 0 \\ R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_g \cdot \sin\theta - T = 0 \\ R_v - F_g \cdot \cos\theta = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

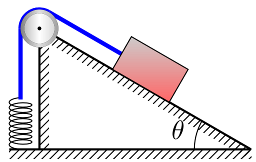
Risolvendo il sistema si ottiene che

$$F_{el} = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

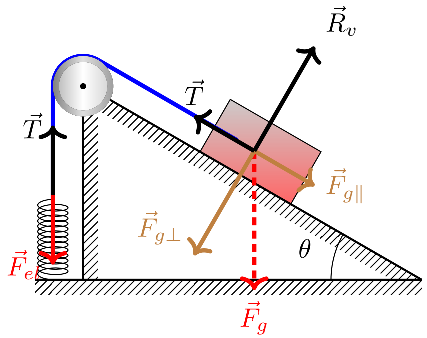
$$\Delta l = \frac{m \cdot g \cdot \sin\theta}{k} = \frac{2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot \sin(30°)}{5\,\frac{N}{cm}} = 1,96\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0049$

Testo *[D0049]* [4 5 3a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ è fermo su un piano inclinato, con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,1$, inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. L'oggetto è bloccato tramite un cavo inestensibile ad una molla di costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$. Di quanto si allunga la molla?



Spiegazione Il peso è soggetto alla forza di gravià verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendiolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. La molla viene tirata verso l'alto dal filo, e quindi lei tira verso il basso. La presenza della forza di attrito statico complica le cose. L'attrito statico è una reazione vincolare che si adatta alla forza che tende a spostare l'oggetto, cercando di annullarla. **Nello schema in figura non è stata rappresentata la forza di attrito statico**. In questo esercizio, se la forza che spinge l'oggetto supera il valore della forza di attrito statico $F_{attr} = \mu_s \cdot \vec{F}_{g\perp}$ allora l'oggetto comincierà a muoversi.



Svolgimento Dal momento che il sistema è fermo, allora la somma delle forze deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio deve essere applicata ad entrambi i punti significativi: il baricentro dell'oggetto e la punta della molla. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} -\mu_s \cdot F_{g\perp} \leq F_{g\parallel} - T \leq \mu_s \cdot F_{g\perp} \\ R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

Risolvendo ora il sistema si ottiene che

$$\mu_s \cdot F_{g\perp} + F_{g\parallel} \geq F_{el} \geq -\mu_s \cdot F_{g\perp} + F_{g\parallel}$$

$$mg\left[\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)\right] \geq F_{el} \geq mg\left[-\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)\right]$$

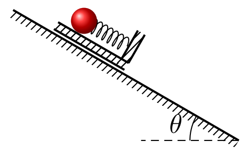
$$11,50\,N \geq F_{el} \geq 4,05\,N$$

Si ottiene quindi una condizione di equilibrio per un intervallo di posizioni dell'oggetto, corrispondenti ad un allungamento della molla

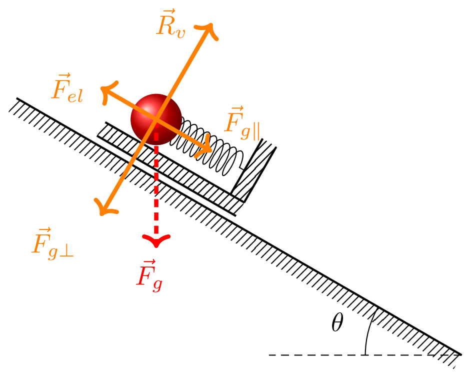
$$2,3\,cm \geq \Delta l \geq 0,81\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0050$

Testo *[D0050]* [4 3 3a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si trova su di un carrello posizionato fermo su di un piano inclinato inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Il sistema inizialmente è fermo. L'oggetto è appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$, parallela al piano inclinato. Di quanto si allunga la molla quando si lascia il carrello libeo di muoversi?



Spiegazione L'oggetto nel carrello è soggetto alla forza di gravità verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendiolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. Il carrello è fermo e la pallina schiaccia la molla con una forza pari a $\vec{F}_{g\parallel}$. Nel momento in cui il carrello viene lasciato libero di cadere, il peso della pallina lungo la direzione del moto si annulla, quindi la molla non viene più schiacciata e ritorna della lunghezza iniziale.



Svolgimento Dal momento che il sistema è inizialmente fermo, allora la somma delle forze sull'oggetto deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio è quindi:

$$\begin{cases} R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - F_{g\parallel} = 0 \end{cases}$$

Il calcolo dell'allungamento della molla rispetto alla posizione a riposo mi da di conseguenza l'allungamento della molla quando il sistema viene lasciato libero.

$$k \cdot \Delta l = mg \sin\theta$$

$$\Delta l = \frac{mg\sin\theta}{k} = \frac{2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2}}{5\,\frac{N}{cm}} = 1,96\,cm$$

Infatti quando il sistema è in caduta libera siamo in assenza di peso e quindi la molla si riposiziona nella sua posizione a riposo.

Problema di: Dinamica - $D0051$

Testo *[D0051]* [4 4 3a]
Una navicella spaziale di forma cilindrica con altezza $h = 10\,m$ e massa $m_2 = 500\,kg$ è in orbita intorno alla Terra. La base inferiore si trova ad una distanza $d = 408\,km$ dal centro della Terra (di raggio $R_{_T} = 6371\,km$ e massa $M_{_T} = 5,97219 \cdot 10^2 4\,kg$). Quanto pesa un oggetto di massa $m_1 = 1\,kg$ su tale base?

Spiegazione Una navicella in orbita è in caduta libera e quindi l'accelerazione percepita dagli oggetti al suo interno dovrebbe essere nulla, e di conseguenza è nullo il loro peso. Questo è quanto giustamente si studia a scuola quando si introducono i sistemi di riferimento non inerziali. Quando però si fa questo esempio, spesso si assume un ascensore in caduta libera e tutto torna bene perchè l'accelerazione subita dall'ascensore e quella subita dalla persona all'interno è la stessa, pari all'accelerazione di gravità g supposta appunto *costante*. Detto questo il professore fa poi l'esempio dell'aereoplano in caduta libera e della stazione spaziale, magari mostrando dei filmati che effettivamente dimostrano un'assenza di peso.

Detto questo possiamo comunque approfondire l'argomento e chiederci se nel nostro problema effettivamente l'astronave e l'oggetto sul suo fondo subiscono la stessa accelerazione. In caso contrario il peso non risulterebbe nullo!

Svolgimento Utilizziamo la legge di gravitazione universale. L'accelerazione percepita da un corpo la indichiamo con

$$g = G\frac{M_{_T}}{R^2}$$

dove R è la distanza del *baricentro* del corpo dal centro della Terra e $M_{_T}$ è la massa della Terra.

La base della nostra navicella si trova ad una distanza dal centro della Terra pari a $r = 6779000\,m$

Detta a l'accelerazione che percepisce l'oggetto sul fondo dell'astronave avremo:

$$P = m_1 \cdot a$$

$$P = m_1 \cdot \left(G\frac{M_T}{(r)^2} - G\frac{M_T}{\left(r+\frac{h}{2}\right)^2} \right)$$

$$P = GM_T m_1 \cdot \left(\frac{1}{(r)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{h}{2}\right)^2} \right)$$

$$P = G\frac{M_T m_1}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{h}{2r}\right)^2} \right)$$

$$P = 6,67408 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\frac{5,97219 \cdot 10^2 4\, kg \cdot 1\, kg}{(6779000\, m)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+1,48 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$P \simeq 8.67 \cdot 1,48 \cdot 10^{-6}\, N \simeq 12,8 \cdot 10^{-6}\, N = 12,8\, \mu N$$

Per questo motivo si dice comunemente che gli esperimenti sulla stazione spaziale sono fatti in un contesto di microgravità.

Problema di: Dinamica - $D0052$

Testo *[D0052]* [2 ⭐ 3 ⏳ 1a 📖]
Un ascensore si muove verso l'alto con accelerazione $a = 2\,\frac{m}{s^2}$. Una persona di massa $m = 70\, kg$ si trova al suo interno in piedi sopra una bilancia. Qunto peso segna la bilancia?

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo il secondo principio della dinamica. Noi infatti sappiamo quali forze agiscono sulla persona e sappiamo con quale accelerazione si muove la persona.

Svolgimento Sulla persona agiscono due forze: la forza di gravità verso il basso e la reazione vincolare della bilancia verso l'alto. Possiamo quindi scrivere il secondo principio della dinamica

$$F_{tot} = m \cdot a$$

$$T - F_g = m \cdot a$$

$$T = m \cdot g + m \cdot a = m\,(g - a)$$

$$T = 70\, kg \cdot \left(9,8\,\frac{m}{s^2} + 2\,\frac{m}{s^2} \right) = 826\, N$$

Problema di: Dinamica - $D0053$

Testo *[D0053]* [3 5 2a]
In una gara automobilistica un'auto affronta una curva parabolica di raggio $r = 40\,m$, inclinata di $\alpha = 15°$ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito delle ruote sull'asfalto è $\mu = 0,6$, quale velocità massima può tenere l'auto senza perdere aderenza con la strada?

Spiegazione Abbiamo un problema di dinamica sul moto circolare e sul piano inclinato. L'auto subisce una forza centrifuga e la forza di gravità, entrambe non allineate con il piano stradale. L'auto viene schiacciata verso il basso dalle componenti di entrambe le forze e spinto lateralmente dalle altre componenti delle stesse forze.

Svolgimento Nella direzione perpendicolare alla strada ci sono tre forze che agiscono: la componente della forza di gravità

$$F_{g\perp} = mg \cdot \cos\alpha$$

la componente della forza centrifuga

$$F_{c\perp} = m\frac{\mathcal{V}^2}{r}\sin\alpha$$

ed infine la reazione vincolare del piano stradale

$$R_v = F_{g\perp} + F_{c\perp}$$

$$R_v = mg \cdot \cos\alpha + m\frac{\mathcal{V}^2}{r}\sin\alpha$$

Contemporaneamente l'auto deve essere in equilibrio sulla linea parallela al piano stradale, su cui agisce l'altra componente forza di gravità

$$F_{g\|} = mg\sin\alpha$$

l'altra componente della forza centrifuga

$$F_{c\|} = m\frac{\mathcal{V}^2}{r}\cos\alpha$$

e la forza di attrito radente

$$F_a = \mu R_v$$

Quindi

$$F_a = F_{c\|} - F_{g\|}$$

$$\mu\left(F_{g\perp} + F_{c\perp}\right) = F_{c\|} - F_{g\|}$$

$$\mu\left(mg \cdot \cos\alpha + m\frac{\mathcal{V}^2}{r}\sin\alpha\right) = m\frac{\mathcal{V}^2}{r}\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

$$\mu g \cdot \cos\alpha + g\sin\alpha = \frac{\mathcal{V}^2}{r}\cos\alpha - \mu\frac{\mathcal{V}^2}{r}\sin\alpha$$

$$g\left(\mu \cdot \cos\alpha + \sin\alpha\right) = \frac{\mathcal{V}^2}{r}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{gr\left(\mu \cdot \cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)}}$$

Problema di: Cinematica - $D0054$

Testo *[D0054]* [2 2 1a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ striscia su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 2$ spinto da una forza $F = 50\,N$ nello stesso verso del moto. Con quale accelerazione si sta muovendo?

Spiegazione In questo problema si applica il secondo principio della dinamica in quanto si conoscono le forze che agiscono sull'oggetto e si chiede di calcolarne l'accelerazione.

Svolgimento La forza che schiaccia l'oggetto contro il piano orizzontale è la forza di gravità.

$$F_g = mg = 2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 19,6\,N$$

Lungo la linea del movimento agiscono quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto e la forza di attrito dinamico. La forza totale che agisce sull'oggetto lungo la linea del moto è quindi

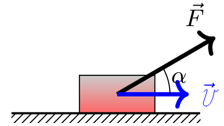
$$F_{tot} = F - F_{att} = F - \mu_d F_g = 50\,N - 39,2\,N = 10,8\,N$$

L'accelerazione con cui l'oggetto si muove è quindi

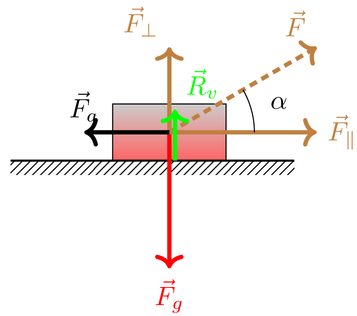
$$a = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{10,8\,N}{2\,kg} = 5,4\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0055$

Testo *[D0055]* [3 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ striscia su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$ sotto l'azione di una forza $F = 5\,N$ inclinata di $\alpha = 30°$ verso l'alto rispetto alla velocità dell'oggetto. Calcola l'accelerazione dell'oggetto.



Spiegazione La forza che agisce sul blocco deve essere scomposta lungo la linea del movimento e lungo la linea perpendicolare al movimento. La forza di attrito si oppone al movimento ed è determinata dalla forza con cui l'oggetto viene schiacciato contro il piano. Il piano reagisce alla forza che schiaccia con la reazione vincolare verso l'alto. La forza di attrito è proporzionale alla forza che schiaccia, quindi alla reazione vincolare del piano. Infatti, se consideriamo la linea perpendicolare al piano, su tale linea l'oggetto è fermo, e quindi la forza totale è nulla. La reazione vincolare eguaglia di conseguenza la forza che schiaccia.



Svolgimento Cominciamo con l'osservare che in questo problema l'oggetto si sta muovendo nello stesso verso della componente $\vec F_\parallel$ della forza, quindi la forza di attrito è ad essa opposta.

Se consideriamo la linea del movimento, avremo

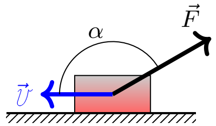
$$F_\parallel - \mu\,(mg - F_\perp) = ma$$

$$\frac{F\cos\alpha - \mu\,(mg - F\sin\alpha)}{m} = a$$

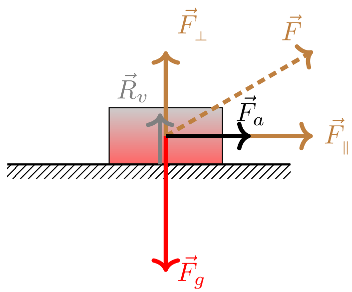
$$a = \frac{4,33\,N - 0,2\cdot(19,6\,N - 2,5\,N)}{2\,kg} = 0,455\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0055a$

Testo *[D0055a]* [3 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ striscia su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$ sotto l'azione di una forza $F = 5\,N$ inclinata di $\alpha = 150°$ verso l'alto rispetto alla velocità dell'oggetto. Calcola l'accelerazione dell'oggetto.



Spiegazione La forza che agisce sul blocco deve essere scomposta lungo la linea del movimento e lungo la linea perpendicolare al movimento. La forza di attrito si oppone al movimento ed è determinata dalla forza con cui l'oggetto viene schiacciato contro il piano. Il piano reagisce alla forza che schiaccia con la reazione vincolare verso l'alto. La forza di attrito è proporzionale alla forza che schiaccia, quindi alla reazione vincolare del piano. Infatti, se consideriamo la linea perpendicolare al piano, su tale linea l'oggetto è fermo, e quindi la forza totale è nulla. La reazione vincolare eguaglia di conseguenza la forza che schiaccia.



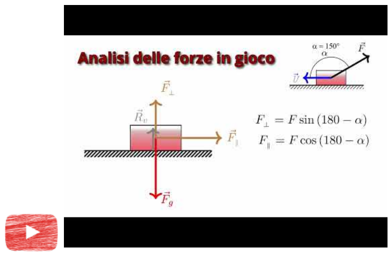


Fig. 5.6: *Guarda il video youtu.be/QKtAJR-I5DU*

Svolgimento Cominciamo con lo scomporre la forza $\vec{F}$ nelle sue due componenti $\vec{F}_\parallel$ e $\vec{F}_\perp$. Disegniamo poi la forza di attrito che è opposta alla velocità del corpo. In questo problema l'oggetto si sta muovendo nel verso opposto alla componente $\vec{F}_\parallel$ della forza, quindi la forza di attrito è concorde ad essa.

Analizziamo il problema in verticale: la forza di gravità è verso il basso e verso l'alto la componente verticale della forza $\vec{F}$. La forza di gravità è maggiore e quindi la reazione del piano è verso l'alto.

Sulla linea verticale il corpo è fermo, quindi

$$R_v + F_\perp = mg$$

$$R_v = mg - F_\perp$$

Se consideriamo ore la linea del movimento, avremo

$$F_\parallel + \mu R_v = ma$$

$$F_\parallel + \mu\,(mg - F_\perp) = ma$$

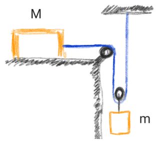
$$F\cos\alpha + \mu\,(mg - F\sin\alpha) = ma$$

$$a = \frac{F\cos\alpha + \mu\,(mg - F\sin\alpha)}{m}$$

$$a = \frac{4,33\,N + 0,2\cdot(19,6\,N - 2,5\,N)}{2\,kg} = 3,875\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0056$

Testo *[D0056]* [3 4 3a]



Un oggetto di massa $M = 20\,kg$ striscia senza attrito su di un piano orizzontale. L'oggetto è tirato da una corda inestensibile che, tramite una carrucola mobile, sorregge un peso di massa $m = 10\,kg$. Se l'oggetto avanza di $L = 10\,cm$, di quanto si abbassa il peso? Con quale accelerazione si sta muovendo il sistema?

Spiegazione In assenza di attriti, l'unica forza che mette in movimento il sistema è la forza di gravità sul pesino di massa m. Il problema si risolve applicando il secondo principio della dinamica ai due blocchi.

Svolgimento Il peso che cade, per come è attaccato all'altro oggetto, percorrerà sempre la metà della distanza percorsa dall'oggetto. Infatti se il peso scende di un metro, vuol dire che un metro di corda si mette da un lato della carrucola ed un altro metro di corda si mette dall'altro lato; l'oggetto avanza quindi di due metri per dare la corda necessaria. Questo vuol dire che il blocco appeso avrà sempre la metà della velocità del blocco trascinato, e quindi la metà della sua accelerazione.

Sul blocco appeso agiscono la forza di gravità in basso e due tensioni del filo in alto.

$$mg - 2T = m \cdot \frac{a}{2}$$

Sul blocco che scivola in orizzontale avremo

$$T = Ma$$

Quindi

$$mg - 2Ma = m \cdot \frac{a}{2}$$

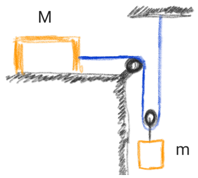
da cui

$$a \cdot (\frac{m}{2} + 2M) = mg$$

$$a = g \cdot \frac{m}{\frac{m}{2} + 2M} = 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{10}{45} = 2,18\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0057$

Testo *[D0057]* [3 3 3a]



Un oggetto di massa $M = 20\,kg$ striscia su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,05$. L'oggetto è tirato da una corda inestensibile che, tramite una carrucola mobile, sorregge un peso di massa $m = 10\,kg$. Tale peso si muove verso il basso. Con quale accelerazione si sta muovendo il sistema?

Spiegazione La forza che mette in movimento il sistema è la forza di gravità sul pesino di massa m. Il problema si risolve applicando il secondo principio della dinamica ai due blocchi. Sul blocco che scivola il orizzontale agisce anche la forza di attrito radente dinamico.

Svolgimento Il blocco che cade, per come è attaccato all'altro blocco, percorrerà sempre la metà della distanza percorsa dal primo blocco. Questo vuol dire che avrà sempre la metà della sua velocità e quindi la metà della sua accelerazione.

Sul blocco appeso agiscono la forza di gravità in basso e due tensioni del filo in alto.

$$mg - 2T = m\frac{a}{2} \tag{5.1}$$

Sul blocco che scivola in orizzontale avremo

$$T - F_{attr} = Ma$$

$$T - \mu Mg = Ma$$

$$T = Ma + \mu Mg$$

Quindi, sostituendo quest'ultima equazione nella 5.1

$$mg - 2\,(Ma + \mu Mg) = m\frac{a}{2}$$

da cui, risolvendo l'equazione, otteniamo

$$a \cdot \left(\frac{m}{2} + 2M\right) = g \cdot (m - 2\mu M)$$

$$a = g \cdot \frac{(m - 2\mu M)}{\frac{m}{2} + 2M} = 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{8}{45} = 1,744\,\frac{m}{s^2}$$

Ovviamente quanto calcolato vale solo se

$$\frac{m}{2} - 2\mu M > 0$$

in quanto l'accelerazione del blocco deve essere verso destra. Quindi solo se

$$\mu < \frac{m}{4M} = 0,125$$

Problema di: Dinamica - *D0058*

Testo *[D0058]* [3 3 1a]
Una navicella spaziale di massa $m_1 = 4000\,kg$ deve recuperare un satellite artificiale di massa $m_2 = 2000\,kg$. Per farlo lo aggancia con una fune di lunghezza $L = 60\,m$ e tira la fune con una forza $F = 4\,N$. Il satellite è fermo rispetto alla navicella. Dopo quanto tempo la navicella recupera il satellite?

Spiegazione Quando la navicella tira il satellite, per il terzo principio il satellite tira la navicella. Entrambi gli oggetti si muovono di moto uniformemente accelerato e la somma dei loro spostamenti deve essere pari alla loro distanza iniziale.

Svolgimento Le accelerazioni con cui si muovono i due oggetti sono

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F}{m_1} = 10^{-3}\,\frac{m}{s^2} \\ a_2 = \frac{F}{m_2} = 2\cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

utilizzando le equazioni del moto avremo

$$L = \frac{1}{2}a_1\Delta t^2 + \frac{1}{2}a_2\Delta t^2$$

$$L = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right)\Delta t^2$$

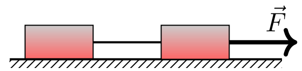
$$\frac{2L}{(a_1+a_2)} = \Delta t^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{2L}{(a_1+a_2)} = \frac{120\,m}{3\cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}} = 40000\,s^2$$

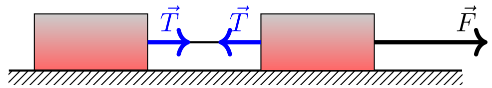
$$\Delta t = 200\,s$$

Problema di: Dinamica - *D0059*

Testo *[D0059]* [3 3 2a]



Due oggetti di massa $m_1 = 20\,kg$ ed $m_2 = 30\,kg$, sono legati da un filo inestensibile e liberi di scivolare su di un piano orizzontale senza attrito. Uno dei due viene tirato orizzontalmente da una forza $F = 100\,N$ e di conseguenza trascina l'altro. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi in movimento. Il problema prevede di non tenere conto delle forze di attrito.

Svolgimento L'accelerazione del sistema avrà verso concorde alla forza $\vec{F}$ che agisce sul primo oggetto. La tensione del filo agisce orizzontalmente su entrambi i blocchi con verso opposto. Sul primo oggetto agiscono quindi due forze. Sul secondo oggetto agisce solo la tensione del filo. Avremo quindi

$$\begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema avremo

$$\begin{cases} F - m_2 a = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

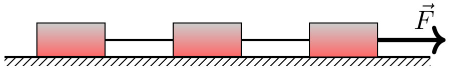
$$\begin{cases} a = \frac{F}{m_1+m_2} \\ T = F\frac{m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto la tensione del filo e l'accelerazione del sistema. Numericamente avremo

$$\begin{cases} a = \frac{100\,N}{50\,kg} = 2\,\frac{m}{s^2} \\ T = 100\,N\cdot\frac{30\,kg}{50\,kg} = 60\,N \end{cases}$$

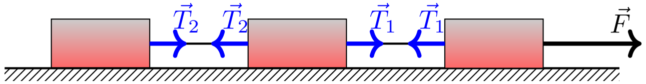
Problema di: Dinamica - $D0060$

Testo *[D0060]* [3 3 2a]



Tre oggetti di massa $m_1 = 20\,kg$, $m_2 = 30\,kg$ ed $m_3 = 50\,kg$, sono legati da fili inestensibili e liberi di scivolare su di un piano orizzontale senza attrito. Il primo viene tirato orizzontalmente da una forza $F = 100\,N$ e trascina quindi gli altri. Calcola l'accelerazione del sistema e la tensione dei fili.

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la seconda legge della dinamica ai tre corpi in movimento. In questo esercizio non si prevede la presenza di forze di attrito



Svolgimento L'accelerazione del sistema avrà verso concorde alla forza $\vec{F}$ che agisce sul primo oggetto. Le tensioni dei fili agiscono orizzontalmente su tutti i blocchi con verso opposto. Sul primo oggetto agiscono quindi due forze. Sul secondo oggetto agiscono due forze. Sul terzo agisce solo la tensione del filo. Avremo quindi

$$\begin{cases} F - T_1 = m_1 a \\ T_1 - T_2 = m_2 a \\ T_2 = m_3 a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema avremo

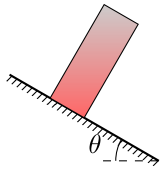
$$\begin{cases} F = m_1 a + m_2 a + m_3 a = (m_1 + m_2 + m_3)\, a \\ T_2 = F \cdot \frac{m_3}{(m_1+m_2+m_3)} \\ T_1 = F \cdot \frac{m_2+m_3}{(m_1+m_2+m_3)} \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto la tensione del filo e l'accelerazione del sistema. Numericamente avremo

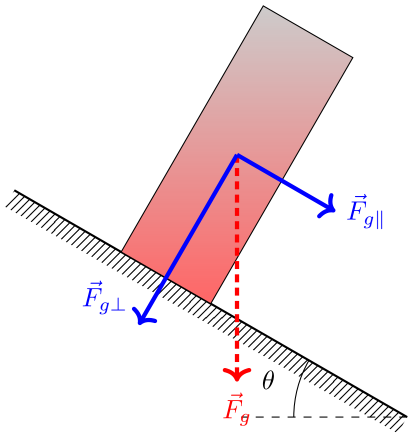
$$\begin{cases} a = \frac{100\,N}{100\,kg} = 1\,\frac{m}{s^2} \\ T_1 = 100\,N \cdot \frac{80\,kg}{100\,kg} = 80\,N \\ T_2 = 100\,N \cdot \frac{50\,kg}{100\,kg} = 50\,N \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - $D0061$

Testo *[D0061]* [3 2 3a]
Un oggetto a forma di parallelepipedo con base $b = 5\,cm$, altezza h e profondità non conosciuta, viene posizionato su di un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, come mostrato in figura. Per quale valore dell'altezza l'oggetto si ribalterà? *[Suggerimento: ribaltarsi in questo caso significa ruotare intorno allo spigolo più in basso del parallelepipedo.]*



Spiegazione Cominciamo con il dire che la forza di gravità agisce nel baricentro dell'oggetto, verticale verso il basso. In questo problema dobbiamo analizzare se il parallelepipedo inizia o no una rotazione. Se lo facesse, il punto di rotazione sarebbe necessariamente lo spigolo inferiore del parallelepipedo. In tal caso la reazione vincolare del piano sarebbe necessariamente sullo spigolo di appoggio e quindi sul punto di rotazione. La reazione vincolare non contribuisce quindi alla rotazione dell'oggetto. Rimangono le due componenti della forza di gravità lungo le direzioni parallela e perpendicolare al piano inclinato. Entrambe generano due momenti, uno orario ed uno antiorario. L'oggetto inizierà la rotazione se il momento orario della forza parallela al piano risulta maggiore del momento antiorario della componente perpendicolare al piano.



Svolgimento La condizione per la rotazione dell'oggetto è

$$M_{\parallel} > M_{\perp}$$

$$F_g \sin\alpha \cdot \frac{h}{2} > F_g \cos\alpha \cdot \frac{b}{2}$$

$$h\cos\alpha > b\sin\alpha$$

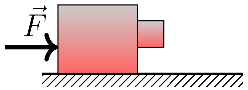
L'angolo in questione è minore dell'angolo retto, quindi

$$h > b\tan\alpha$$

$$h > \frac{5}{\sqrt{3}}\,cm$$

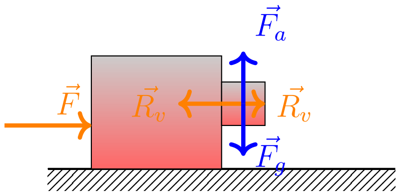
Problema di: Dinamica - *D0062*

Testo [D0062] [4 4 3a]



Due blocchi di massa $M = 2\,kg$ ed $m = 1\,kg$, sono posti come mostrato in figura, liberi di scivolare senza attrito su di un piano orizzontale spinti dalla forza $\vec{F}$. Tra i due blocchi c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 2$. Calcola la minima forza $\vec{F}$ affinché il blocco più piccolo non cada.

Spiegazione La spinta $\vec{F}$ determina tra i due blocchi una coppia di reazioni vincolari che per il terzo principio della dinamica sono uguali ed opposte. Tali reazioni determinano una forza di attrito verso l'alto che si oppone alla forza di gravità.



Svolgimento Analizzando le forze sulla linea orizzontale avremo

$$\begin{cases} F - R_v = M \cdot a \\ R_v = m \cdot a \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} a = \frac{F}{M+m} \\ R_v = F \cdot \frac{m}{M+m} \end{cases}$$

Se il blocco più piccolo non cade allora

$$F_g = F_{as}$$

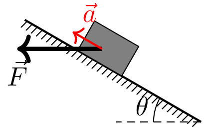
$$mg < \mu_s R_v$$

$$mg < \mu_s F \cdot \frac{m}{M+m}$$

$$F > \frac{(M+m)g}{\mu_s}$$

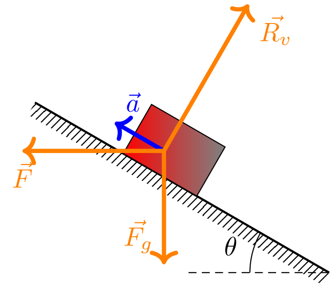
Problema di: Dinamica - *D0063*

Testo [D0063] [2 3 2a]

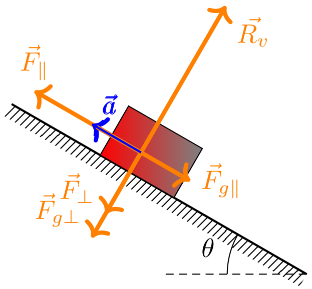


Un blocco di massa $m = 10\,kg$ scivola senza attrito su di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ ed è spinto contro il piano da una forza orizzontale $F = 100\,N$. Con quale accelerazione si muove il blocco?

Spiegazione L'analisi dello schema di forze avviene su due assi perpendicolari tra loro: quello parallelo al piano inclinato e quello perpendicolare al piano inclinato. Sull'asse parallelo agiscono la componente della forza di gravità verso il basso e la componente della forza $\vec{F}$ verso l'alto. Sull'asse perpendicolare le componenti della forza $\vec{F}$ e della forza di gravità entrambe schiacciano l'oggetto contro il piano, mentre il piano inclinato esercita una reazione vincolare R_v che equilibria le due forze precedenti. L'accelerazione del sistema è ovviamente liungo il piano inclinato, essendo quella la linea del moto. A priori non possiamo sapere se verso l'alto o verso il basso, in quanto dipende dal valore della forza $\vec{F}$, dalla massa dell'oggetto e dall'inclinazione del piano. Scegliete in modo arbitrario il disegno del verso dell'accelerazioone; se avrete sbagliato, ve ne accorgerete quando l'accelerazione vi verrà un valore negativo.



Svolgimento Per poter studiare il problema è necessario scomporre tutte le forze lungo le due direzioni interessanti del problema: quelle parallela e perpendicolare al piano inclinato. Dall'analisi dello schema di forze sull'asse parallelo al piano avremo



$$F\cos\theta - F_g \sin\theta = ma$$

$$a = \frac{F\cos\theta - mg\sin\theta}{m} = \frac{100\,N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 98\,N \cdot \frac{1}{2}}{10\,kg} = 3,76\,\frac{m}{s^2}$$

É ovviamente possibile anche calcolare la reazione vincolare del piano

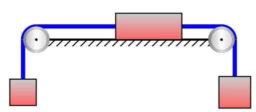
$$R_v = F_\perp + F_{g\perp}$$

$$R_v = F\sin\theta + F_g\cos\theta$$

$$R_v = 100\,N \cdot \frac{1}{2} + 98\,N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 89,87\,N$$

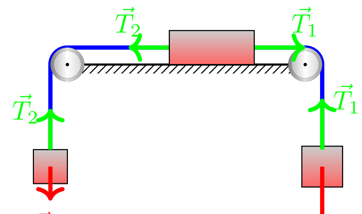
Problema di: Dinamica - $D0065$

Testo *[D0065]* [3 3 2a]



Un corpo di massa $m_0 = 10\,kg$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale attaccato da entrambi i lati a due funi a loro volta attaccate a due corpi di massa $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 3\,kg$, liberi di muoversi sotto l'azione della forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione In questo esercizio applichiamo il secondo principio della dinamica ai tre oggetti. Conosciamo tutte le forze esterne e le masse, quindi possiamo determinare l'accelerazione del sistema.



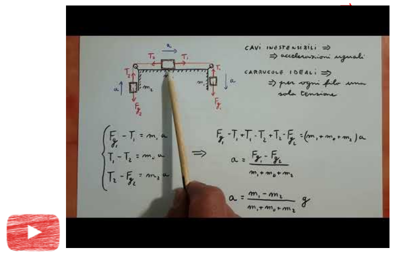


Fig. 5.7: *Guarda il video youtu.be/1u49ZYsDCvc*

Svolgimento Visto che tutti gli oggetti sono legati da corde inestensibili di massa trascurabile, allora tutti e tre gli oggetti avranno la stessa accelerazione, seppur con direzioni differenti.

Il sistema di equazioni che possiamo scrivere è

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_1 - T_2 = m_0 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Sostituendo la prima e la terza nella seconda e riordinando avremo

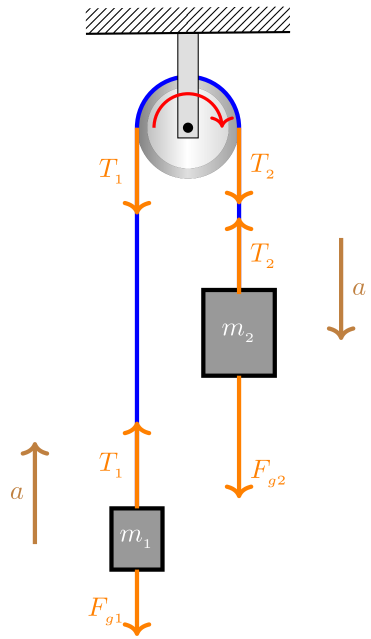
$$-m_1a + m_1g - m_2a - m_2g = m_0a$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_1 + m_2}g$$

Problema di: Dinamica rotazionale - $D0067$

Testo *[D0067]* [4 6 3a]
Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2\,kg$ ed $m_2 = 5\,kg$. La carrucola ha momento di inerzia $I = 5 \cdot 10^{-4}\,kg\,m^2$ e raggio $r = 5\,cm$. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. La carrucola ha un momento di inerzia ed una massa quindi rientra nel sistema di equazioni che definisce il problema



Svolgimento Il sistema è costituito da tre oggetti: due oggetti che traslano e la carrucola che ruota. Sappiamo che l'oggetto di massa maggiore accelererà verso il basso, mentre l'altro accelererà verso l'alto. Indicando con α l'accelerazione angolare della carrucola, avremo:

$$\begin{cases} m_2g - T_2 = m_2a \\ T_1 - m_1g = m_1a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I\alpha \end{cases}$$

Possiamo applicare adesso la condizione di puro rotolamento in quanto supponiamo che la corda non scivoli sulla carrucola ma la faccia solo ruotare.

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (-m_1 a - m_1 g - m_2 a + m_2 g) = I \dfrac{a}{r^2} \end{cases}$$

da cui

$$(m_1 + m_2) \cdot a + I \frac{a}{r^2} = (m_2 - m_1)\, g$$

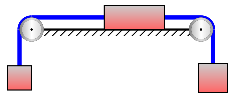
$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \cdot a = (m_2 - m_1)\, g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} \cdot g$$

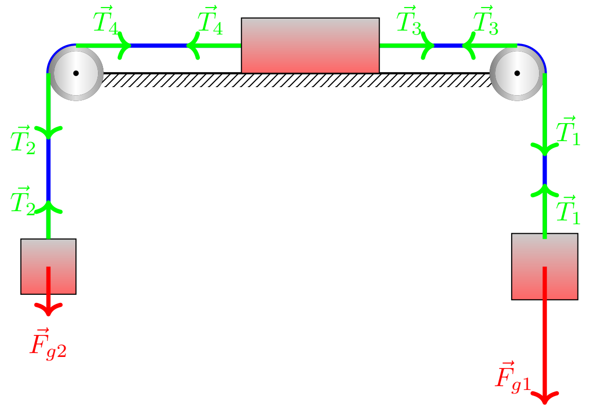
$$a = \frac{3\,kg}{7,2\,kg} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 4,1\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0068$

Testo *[D0068]* [4 9 3a]



Un oggetto di massa $m_0 = 10\,kg$ è libero di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale, attaccato a due funi a loro volta attaccate a due pesi di massa $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 3\,kg$. La carrucola ha momento di inerzia $I = 5 \cdot 10^{-4}\,kg\,m^2$ e raggio $r = 5\,cm$. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione In questo esercizio applichiamo il secondo principio della dinamica ai tre oggetti ed alle due carrucole. Per ogni carrucola dobbiamo considerare un moto rotazionale, per cui l'equazione del moto riguarderà il momento delle forze applicate, il momento di inerzia e l'accelerazione angolare della carrucola. Conosciamo tutte le forze esterne e le masse, quindi possiamo determinare l'accelerazione del sistema.

Svolgimento Visto che tutti gli oggetti sono legati da corde inestensibili di massa trascurabile, allora tutti e tre gli oggetti avranno la stessa accelerazione, seppur con direzioni differenti. Anche i punti esterni della carrucola subiranno la stessa accelerazione tangenziale.

Il sistema di equazioni che possiamo scrivere è

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_3 - T_4 = m_0 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_4 - T_2 = \frac{I}{r^2} a \\ T_1 - T_3 = \frac{I}{r^2} a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - m_1 a = T_1 \\ T_2 = m_2 a + m_2 g \\ T_3 - T_4 = m_0 a \\ T_4 - m_2 a - m_2 g = \frac{I}{r^2} a \\ -T_3 + m_1 g - m_1 a = \frac{I}{r^2} a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - m_1 a = T_1 \\ T_2 = m_2 a + m_2 g \\ T_4 = +m_2 a + m_2 g + \frac{I}{r^2} a \\ T_3 = +m_1 g - m_1 a - \frac{I}{r^2} a \\ +m_1 g - m_1 a - \frac{I}{r^2} a - m_2 a - m_2 g - \frac{I}{r^2} a = m_0 a \end{cases}$$

da cui

$$m_1 g - m_2 g = m_0 a + m_1 a + m_2 a + 2\frac{I}{r^2} a$$

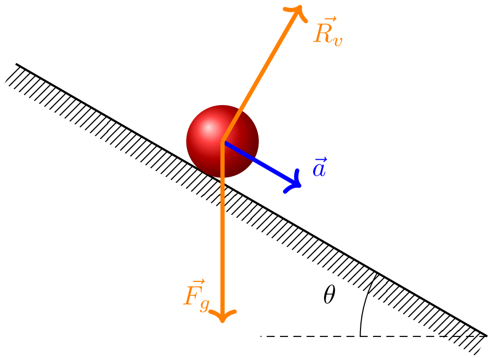
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_1 + m_2 + 2\frac{I}{r^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{2\,kg}{18\,kg + 0,4\,kg} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 1,065\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0069$

Testo *[D0069]* [4 4 3a]
Una sfera di massa $m = 10\,kg$ e raggio $r = 10\,cm$, rotola senza scivolare su di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Con quale accelerazione si muove lungo il piano inclinato?

Spiegazione Il rotolamento della sfera corrisponde ad una continua rotazione intorno al punto di appoggio della sfera con il piano inclinato. Tale rotolamento è indotto dal momento della forza che viene generato dalla forza di gravità.



Svolgimento Il momento di inerzia di una sfera di raggio r e massa m rispetto ad un qualunque asse di rotazione che passi per il centro è

$$I_0 = \frac{2}{5} m r^2$$

Rispetto invece ad un asse di rotazione tangente alla sfera è

$$I = I_0 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2$$

Il momento della forza di gravità rispetto all'asse del rotolamento è

$$M = mgr \sin\theta$$

Detta α l'accelerazione angolare della sfera, i principi della dinamica ci dicono

$$M = I\alpha = \frac{7}{5} m r^2 \cdot \frac{a}{r}$$

$$mgr \sin\theta = \frac{7}{5} m r^2 \cdot \frac{a}{r}$$

$$g \sin\theta = \frac{7}{5} a$$

$$a = \frac{5}{7} g \sin\theta = 3,5\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0070$

Testo *[D0070]* [3 3 3a]
L'attrito con l'aria è una forza viscosa che in prima approssimazione descriveremo con la formula $F_a = \alpha V$. Un aeromodello di massa $m = 2\,kg$ viaggia a velocità costante $V_i = 20\,\frac{m}{s}$. In un certo istante esso triplica la forza che sviluppa ottenendo un'accelerazione in avanti $a = 15\,\frac{m}{s^2}$. Quale velocità massima raggiungerà? Quanto vale il coefficiente α?

Spiegazione L'ereomodello viaggia a velocità costante in quanto la spinta del motore in avanti è bilanciata dalla forza di attrito con l'aria. Nell'istante in cui la forza aumenta, l'aereomodello subisce un'accelerazione in quanto l'equilibrio delle forze viene a mancare. La velocità aumenta e di conseguenza aumenta la forza di attrito, fino a riotttenere una condizione di equilibrio e quindi una velocità costante.

Svolgimento Visto che la forza di attrito è direttamente proporzionale alla velocità, triplicando la forza del motore verrà triplicata la forza di attrito e quindi la velocità dell'aeromodello.

$$\alpha V_f = F_f = 3F_i = 3\alpha V_i$$

$$V_f = 3 \cdot V_i$$

Con i dati in possesso possiamo inoltre scrivere

$$\begin{cases} F_i = \alpha V_i \\ 3F_i - \alpha V_i = ma \end{cases}$$

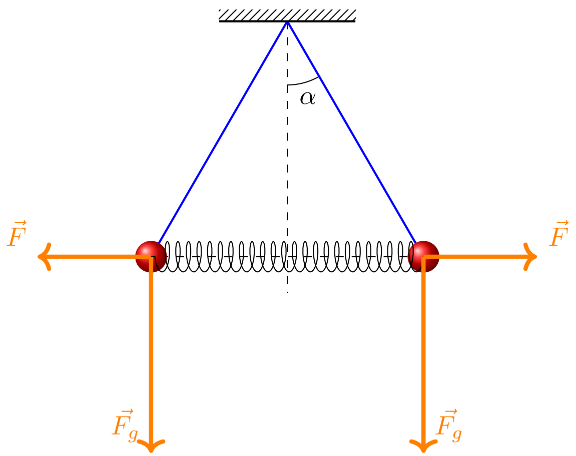
$$2\alpha V_i = ma$$

$$\alpha = \frac{ma}{2V_i}$$

Problema di: Dinamica - $D0071$

Testo *[D0071]* [4 3 3a]
Due sfere di massa $m = 15\,g$, sono appese con due fili inestensibili entrambi lunghi $l = 20\,cm$ e sono separate tra loro da una molla anch'essa di lunghezza $l = 20\,cm$, di massa trascurabile e di costante elastica $k = 1\,\frac{N}{cm}$. Quale angolo formano i due fili nella condizione di equilibrio? *[É sufficiente scrive l'equazione risolutiva e trovarne il risultato con la calcolatrice programmabile]*

Spiegazione Le due sfere si respingono a causa della presenza della molla. Nella posizione di equilibrio ogni sfera è soggetta ad una forza elastica che genera un momento in un certo verso ed la forza di gravità che genera un momento opposto. Nella condizione di equilibrio i due momenti si equivalgono.



Svolgimento
Consideriamo il filo sulla destra nel disegno. Il momento della forza di gravità rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è orario e vale

$$M_g = F_g \cdot l \cdot \sin\alpha$$

Il momento della forza elastica rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è antiorario e vale

$$M_{el} = F_{el} \cdot l \cdot \sin(90 - \alpha) = F_{el} \cdot l \cdot \cos\alpha$$

Quindi la condizione di equilibrio è

$$F_{el} \cdot l \cdot \cos\alpha = F_g \cdot l \cdot \sin\alpha$$

Ragioniamo adesso sulla forza elastica. Essa dipende dalla variazione di lunghezza della molla. Quando la molla è a riposo e non fa forza, allora l'angolo tra i due fili è $\theta = 60°$ infatti, essendo la molla lunga a riposo esattamente quanto la lunghezza dei due pendoli, in quella condizione si forma un triangolo equilatero.

Nella condizione di equilibrio, con la molla schiacciata, la variazione di lunghezza della molla sarà

$$\Delta l = l - l\sin\alpha$$

Quindi la condizione di equilibrio diventa

$$kl \cdot 2\left(\frac{1}{2} - \sin\alpha\right) \cdot \cos\alpha = mg \cdot \sin\alpha$$

Questa è l'equazione risolutrice tramite la quale è possibile valutare la soluzione per α

Problema di: Elettromagnetismo - $D0072$

Testo *[D0072]* [5 6 3a]
Uno Yo-yo di massa complessiva $M = 100\,g$, è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5\,cm$ ed un perno interno di massa trascurabile e di raggio $r_1 = 1\,cm$ attorno al quale viene arrotolato il filo. Lo yo-yo si trova su di un piano scabro e rotola senza strisciare su di esso. Determinare il valore ed il verso dell'accelerazione dello yo-yo in funzione della forza applicata sul filo e della sua angolazione θ rispetto al piano (con $0 \leq \theta \leq 180°$).

Spiegazione La forza fatta dal filo e la forza di attrito contribuiscono all'accelerazione dell'oggetto. La condizione di puro rotolamento permetterà di risolvere l'equazione del moto e calcolare l'accelerazione.

Svolgimento Posizioniamo il nostro sistema di riferimento orientato verso destra con l'asse x orizzontale parallelo al piano.

Indicata con θ l'angolazione della forza fatta sul filo rispetto al piano, ipotizziamo che il filo sia arrotolato in modo da indurre una rotazione antioraria dello yo-yo.

La forza sul filo genera un'accelerazione del baricentro dello yo-yo e quindi una sua accelerazione angolare visto che rotola senza strisciare.

Consideriamo la forza F sul filo sempre positiva. Sarà il valore di θ ad indicarne l'orientazione.

L'accelerazione angolare α è intesa positiva per rotazioni orarie.

L'equazione del moto rotatorio è quindi (ipotizzando la forza di attrito rivolta nel verso positivo dell'asse x)

$$-F \cdot r - F_{as} \cdot R = M\alpha$$

La condizione di puro rotolamento è

$$\alpha = a \cdot R$$

L'equazione del moto traslatorio è

$$F\cos\theta + F_{as} = ma$$

Quindi

$$\begin{cases} -F \cdot r - F_{as} \cdot R = I\alpha \\ a = \alpha \cdot R \\ F\cos\theta + F_{as} = Ma \end{cases}$$

da cui, sostituendo le prime due equazioni nella terza, avremo

$$Ma = F\cos\theta - \frac{I\frac{a}{R} + F \cdot r}{R}$$

$$Ma = F\cos\theta - \frac{\frac{1}{2}MRa + F \cdot r}{R}$$

$$Ma = F\cos\theta - \frac{1}{2}Ma - \frac{F \cdot r}{R}$$

$$\frac{3}{2}Ma = F\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$$

$$a = \frac{2F}{3M}\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$$

Da questa equazione si vede che il verso dell'accelerazione dipende dall'angolo θ

L'accelerazione sarà nel verso positivo delle x per angoli θ tali che

$$\cos\theta > \frac{r}{R}$$

e sarà invece nel verso opposto per angoli maggiori.

Con i dati del testo l'angolo θ di separazione tra le due differenti situazioni fisiche è

$$\theta = \arccos\frac{1}{5} = 78,5°$$

Problema di: Dinamica - $D0073$

Testo *[D0073]* [5 5 3a]
Uno Yo-yo è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5\,cm$ ed un perno interno di raggio $r_1 = 2\,cm$ attorno al quale viene arrotolato il filo. Esso si trova su di un piano scabro e rotola senza strisciare su di esso. Determinare il valore ed il verso dell'accelerazione dello yo-yo in funzione della forza applicata orizzontalmente dal filo.

Spiegazione In questo problema abbiamo un filo che esercita una forza in modo tale da dare al corpo rigido sia un'accelerazione lineare, sia una accelerazione angolare. Essendo in una condizione di puro rotolamento, la forza di attrito statico agisce sul punto di contatto tra il corpo ed il piano. Il terzo principio della dinamica, nella versione lineare e rotazionale, insieme al vincolo di puro rotolamento, risolvono il problema.

Svolgimento Sullo yo-yo agiscono la tensione del filo e la forza di attrito con il piano.

Vale quindi l'equazione per la traslazione:

$$T - F_a = ma$$

$$T - F_a = ma$$

Dove l'accelerazione è intesa nella stessa direzione della tensione del filo.

Vale quindi l'equazione per la rotazione con α l'accelerazione angolare in senso antiorario ed I il momento di inerzia dello yo-yo:

$$T \cdot r_1 - F_a \cdot r_2 = I\alpha$$

Scriviamo adesso la condizione di puro rotolamento, considerando la velocità un vettore nel verso opposto alla forza di attrito

$$V = -\omega r_2$$

da cui

$$a = -\alpha r_2$$

Quindi

$$\begin{cases} T - F_a = ma \\ T \cdot r_1 - F_a \cdot r_2 = I\alpha \\ a = -\alpha r_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} T - ma = F_a \\ \alpha = -\dfrac{a}{r_2} \\ T \cdot r_1 - T \cdot r_2 + ma \cdot r_2 = -I\dfrac{a}{r_2} \end{cases}$$

e quindi in particolare

$$T\left(r_1 - r_2\right) = -mar_2 - \frac{I}{r_2}a$$

$$a = \frac{T\left(r_2 - r_1\right)}{mr_2 + \dfrac{I}{r_2}}$$

$$a = \frac{T}{m + \dfrac{I}{r_2^2}} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

Problema di: Dinamica - $D0074$

Testo *[D0074]* [4 5 3a]
Uno Yo-yo è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5\,cm$ ed un perno interno di raggio $r_1 = 2\,cm$ e massa trascurabile, attorno al quale viene arrotolato il filo. Con quale accelerazione cade?

Spiegazione Uno yo-yo cade effettuando un rotolamento puro sul filo che lo sostiene. Il problema è un problema di dinamica che si risolve utilizzando il secondo principio nella sua versione traslazionale, in quella rotazionale, ed utilizzando il vincolo di puro rotolamento

Svolgimento Sullo yo-yo agiscono la tensione del filo e la forza di gravità.

Vale quindi l'equazione per la traslazione:

$$F_g - T = ma$$

Dove l'accelerazione è intesa nella stessa direzione della Forza di gravità.

Vale quindi l'equazione per la rotazione con α l'accelerazione angolare in senso antiorario ed I il momento di inerzia dello yo-yo:

$$T \cdot r_1 = I\alpha$$

Scriviamo adesso la condizione di puro rotolamento, considerando la velocità un vettore nel verso opposto alla Tensione del filo

$$V = \omega r_2$$

da cui

$$a = \alpha r_2$$

Quindi

$$\begin{cases} F_g - T = ma \\ T \cdot r_1 = I\alpha \\ a = \alpha r_1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r_1} = \alpha \\ T = I\dfrac{a}{r_1^2} \\ mg - I\dfrac{a}{r_1^2} = ma \end{cases}$$

ed infine

$$mg = a\left(m + \frac{I}{r_1^2}\right)$$

$$a = \frac{m}{m + \frac{I}{r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{I}{mr_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}mr_2^2}{mr_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{2r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{2r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{8}{33} \cdot g$$

Problema di: Dinamica - $D0075$

Testo *[D0075]* [2 1 1a]
Le velocità della Terra ($M_T = 5,972 \cdot 10^2 4\,kg$) nei punti più vicino e lontano dal sole sono $\mathcal{V}_{min} = 29,3\,\frac{km}{s}$ e $\mathcal{V}_{max} = 30,3\,\frac{km}{s}$, e sono opposte. Quanto vale la forza vettoriale media esercitata dal Sole sulla Terra tra i punti più vicino e più lontano dal Sole?

Spiegazione Conosciamo la velocità della Terra, in modulo direzione e verso, negli istanti finale ed iniziale; conosciamo la massa della terra; conosciamo l'intervallo di tempo che passa tra l'istante iniziale e quello finale. Applichiamo il secondo principio della dinamica. La seconda legge della dinamica $F = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ ci permette infatti di calcolare direttamente questo valore conoscendo La variazione di quantità di moto della Terra e l'intervallo di tempo impiegato nel tragitto

Svolgimento Utilizzando la seconda legge della dinamica, etenendo conto che le velocità finale ed iniziale della Terra sono opposte, avremo

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{P}\right|}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = \frac{\left|\vec{P}_f - \vec{P}_i\right|}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = \frac{M_{Terra} \cdot (\mathcal{V}_f + \mathcal{V}_i)}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = \frac{5,972 \cdot 10^2 4\,kg \cdot \left(59,6\,\frac{km}{s}\right)}{0,5\,anni} = 22,6 \cdot 10^{21}\,N$$

Allo stesso risultato arriveremmo scrivendo il secondo principio della dinamica come

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = M_{terra} \cdot \vec{a}_{media} = M_{terra} \cdot \frac{\Delta\vec{\mathcal{V}}}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{F}_{med}\right| = M_{Terra} \cdot \frac{\left|\vec{\mathcal{V}}_f - \vec{\mathcal{V}}_i\right|}{\Delta t} = \frac{M_{Terra} \cdot (\mathcal{V}_f + \mathcal{V}_i)}{\Delta t}$$

Problema di: Dinamica - $D0076$

Testo *[D0076]* [2 1 1a]
Un pendolo di massa $m = 9\,kg$ oscilla con un periodo $T = 6\,s$, in modo tale da avere una velocità nel punto più basso pari a $\mathcal{V} = 2\,\frac{m}{s}$. Dopo metà periodo ha una velocità in modulo uguale ma opposta. Quanto vale, in modulo direzione e verso, la forza media che ha subito durante quella mezza oscillazione?

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si chiede di applicare il secondo principio della dinamica nella sua formulazione

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Svolgimento Applicando il secondo principio della dinamica avremo

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\mathcal{V}_f - m\mathcal{V}_i}{\Delta t}$$

$$F = \frac{9\,kg \cdot 2\,\dfrac{m}{s} - 9\,kg \cdot \left(-2\,\dfrac{m}{s}\right)}{3\,s} = 12\,N$$

La direzione di tale forza è orizzontale ed il verso è opposto alla velocità iniziale del corpo.

Problema di: Dinamica - $D0077$

Testo *[D0077]* [3 3 1a]
Un tavolo privo di attrito ha un foro nel centro. Attraverso quel foro passa un cordino di massa trascurabile con attaccate agli estremi due masse $m_1 = 1\,kg$ che pende sotto al tavolo, ed $m_2 = 0{,}1\,kg$ che ruota di moto circolare uniforme di raggio $r = 40\,cm$ sul tavolo attorno al foro. Con quale frequenza deve ruotare la massa m_2 per mantenere la massa m_1 in equilibrio?

Spiegazione se la sfera appesa è in equilibrio significa che la somma delle forze che agisce su di essa è nulla. La tensione del filo eguaglia quindi la forza di gravità. La stessa tensione è poi l'unica forza che agisce sulla massa che ruota di moto circolare uniforme.

Svolgimento Analizzando i due oggetti in questione possiamo scrivere per ognuno di essi la seconda legge della dinamica

$$\begin{cases} T = m_1 g \\ T = m_2 \cdot 4\pi^2\nu^2 \cdot r \end{cases}$$

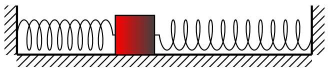
da cui

$$m_2 \cdot 4\pi^2\nu^2 \cdot r = m_1 g$$

$$\nu^2 = \frac{m_1 g}{4\pi^2 m_2 r} = 6{,}2\,Hz$$

Problema di: Dinamica - $D0078$

Testo *[D0078]* [3 2 3a]



Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ oscilla su di un piano orizzontale senza attrito, attaccato a due molle di costante elastica $k_1 = 3\,\frac{N}{m}$ e $k_2 = 5\,\frac{N}{m}$. Con quale periodo oscilla il sistema?

Spiegazione Il sistema ha un periodo in quanto oscilla di moto armonico. Per trovare il periodo è sufficiente scrivere l'equazione del moto.

Svolgimento Imnmaginiamo di spostare la massa di una quantità Δx. Avremo

$$-k_2\Delta x - k_1\Delta x = ma$$

$$a = \frac{k_1 + k_2}{m}\Delta x$$

Paragonando questa equazione con l'equazione del moto armonico

$$a = -\omega^2\Delta x$$

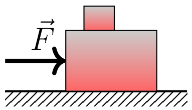
avremo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0,314\,s$$

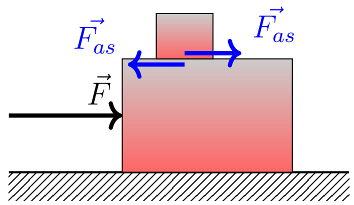
Problema di: Dinamica - $D0079$

Testo *[D0079]* [4 4 3a]



Un oggetto di massa $M = 10\,kg$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale spinto da una forza $F = 84\,N$. Su di esso è appoggiato un secondo oggetto di massa $m = 2\,kg$ solidale con il primo a causa della forza di attrito statico con coefficiente $\mu_s = 5$. Con quale accelerazione si muove il sistema? Quanto vale la forza di attrito statico? Quale forza dovrei fare per far si che i due oggetti non siano più solidali?

Spiegazione In questo problema applichiamo il secondo principio della dinamica. Per quanto riguarda la forza di attrito che tiene i due oggetti solidali, bisogna ricordare che essa è un reazione vincolare il cui valore sarà sempre inferiore alla massima forza di attrito statico calcolabile con la formula opportuna. Il blocco inferiore spinge, grazie alla forza di attrito, il blocco superiore; per il terzo principio della dinamica, anche iol blocco superiore spinge quello inferiore anche se dalla parte opposta.



Svolgimento Ai due oggetti applichiamo il secondo principio:

$$\begin{cases} F - F_{as} = Ma \\ F_{as} = ma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} F = (M + m)\,a \\ F_{as} = ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{M + m} \\ F_{as} = \dfrac{m}{M + m}F \end{cases}$$

La massima forza di attrito che può agire tra i due oggetti sarà

$$F_{as-max} = \mu_s mg$$

Gli oggetti non saranno più solidali se

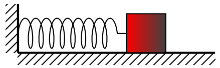
$$F_{as} > F_{as-max}$$

$$\frac{m}{M+m} F > \mu_s mg$$

$$F > \mu_s (M+m) g$$

Problema di: Dinamica - $D0080$

Testo *[D0080]* [3 3 1a]



Un oggetto di massa $M = 10\,kg$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_s = 4$ e $\mu_d = 2$, e si trova accanto ad una molla inizialmente scarica, di costante elastica $K = 10\,\frac{N}{cm}$. Spostiamo l'oggetto appoggiandolo nuovamente sul piano, in modo che rimanga fermo schiacciando la molla. Calcola il massimo schiacciamento possibile per la molla.

Spiegazione Quando l'oggetto è fermo a comprimere la molla vuol dire che la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla. Le due forze in questione sono la forza della molla e la forza di attrito statico.

Svolgimento Lungo il piano orizzontale le due forze che agiscono sono la forza della molla e la forza di attrito statico causata dalla forza di gravità che schiaccia l'oggetto contro il piano

$$F_{el} = F_{as}$$

$$K \cdot \Delta l = F_{as} \leq F_{as-max} = \mu_s mg$$

$$\Delta l \leq \frac{\mu_s mg}{k}$$

Problema di: Dinamica - $D0081$

Testo *[D0081]* [5 6 3a]
Una sfera di raggio $r = 2\,cm$ oscilla su di una rotaia sferica di raggio $R = 1\,m$ rotolando su di essa senza strisciare. Quanto vale il periodo dell'oscillazione?

Spiegazione La differenza tra un pendolo semplice e la sfera che rotola su di un binario è che la sfera ha sia energia cinetica traslazionale che rotazionale. Il periodo lo si ricava esprimendo l'equazione del moto.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la sfera compie un percorso circolare di raggio $r_{osc} = R - r$. L'angolo rispetto al centro dell'oscillazione lo chiameremo θ e per convenzione esso cresce in senso antiorario. Tale spera è quindi nel suo percorso assimilabile ad un pendolo a parte che la reazione vincolare del filo viene esercitata dalla rotaia. La fondamentale differenza è che la massa del pendolo oscilla mentre la sfera sulla rotaia... rotola!

La condizione di puro rotolamento implica che $U_{sfera} = \omega_{sfera} \cdot r$ indicando ω_{sfera} positivo se in senso orario, il che corrisponde a valori di θ crescenti.

Consideriamo un istante in cui la sfera si trova a valori di θ negativi.

La sfera rotola sotto l'azione del momento della forza di gravità

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = I_{sfera}\vec{\alpha}_{sfera}$$

Il momento di questa forza è orario, così come l'accelerazione che ne segue. L'accelerazione angolare della sfera corrisponde però ad un'accelerazione angolare del pendolo di verso opposto e quindi

$$\omega_{sfera} \cdot r = -\omega_{pendolo} \cdot (R - r)$$

$$\alpha_{sfera} \cdot r = -\alpha_{pendolo} \cdot (R - r)$$

Avremo quindi

$$mgr \sin\theta = I_{sfera}\vec{\alpha}_{sfera} = -I_{sfera}\frac{R-r}{r}\alpha_{pendolo}$$

$$\alpha_{pendolo} = -\frac{mgr^2}{(R-r)\,I_{sfera}} \sin\theta$$

Per piccole oscillazioni possiamo affermare

$$\sin\theta \sim \theta$$

e quindi

$$\alpha_{pendolo} = -\frac{mgr^2}{(R-r)\,I_{sfera}}\theta$$

Il periodo dell'oscillazione risulta quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\cdot I_{sfera}}{mgr^2}}$$

Nel caso della sfera avremo infine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\,(R-r)}{5g}}$$

Problema di: Dinamica - $D0082$

Testo *[D0082]* [2 2 1a]
A due molle identiche, montate in parallelo, di costante elastica $K_1 = 2\,\frac{N}{cm}$ e $K_2 = 3\,\frac{N}{cm}$ è attaccato un oggetto di massa $M = 1\,kg$. Di quanto si allungano le due molle? *[Considera che le due molle hanno lo stesso allungamento]*

Spiegazione Le due molle spingono verso l'alto, mentre la forza di gravità in basso. L'oggetto è in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla

Svolgimento

$$K_1 \Delta l + K_2 \Delta l = Mg$$

$$\Delta l = \frac{Mg}{K_1 + K_2} = 1,96\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0083$

Testo *[D0083]* [2 2 1a]
Ad un palloncino è appeso un pendolo di lunghezza $l = 2\,m$ e di massa $m = 1\,kg$. Se il palloncino è tirato verso l'alto con con una forza di Archimede tale per cui si muove con accelerazione $a = 4,2\,\frac{m}{s^2}$, con quale frequenza oscilla il pendolo?

Spiegazione Il periodo dell'oscillazione di un pendolo dipende dalla sua lunghezza e dall'accelerazione a cui è sottoposto. Dal momento che il sistema è spinto verso l'alto con una certa forza, l'accelerazione che ne consegue viene percepita dal pendolo come un'accelerazione che si aggiunge all'accelerazione di gravità dando l'accelerazione effettivamente percepita dal pendolo.

Svolgimento Il periodo del pendolo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_{eff}}}$$

dove $a_{tot} = g + a_{app}$
per cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = [...]$$

Problema di: Dinamica - $D0084$

Testo *[D0084]* [1 2 1a]
Su di una sbarra verticale, che come punto fisso la sua estremità inferiore, viene applicata orizzontalmente una forza $F_1 = 10\,N$ verso destra ad un'altezza $h_1 = 2\,m$. Una seconda forza orizzontale $F_2 = 30\,N$ viene applicata verso sinistra ad un'altezza $h_2 = 70\,cm$. Quanto vale il momento della prima forza? Quanto vale il momento della seconda forza? Quanto vale il momento totale applicato alla sbarra?

Spiegazione In questo esercizio si chiede semplicemente di indicare modulo e verso dei due momenti della forza che agiscono sulla sbarra verticale. I due momenti sono opposti e quindi tendono a cancellarsi; nel momento in cui ne calcoliamo la somma ne dobbiamo tenere conto.

Svolgimento La prima forza genera un momento orario

$$M_{1o} = F_1 \cdot h_1 = 20\,Nm$$

La seconda forza genera un momento antiorario

$$M_{1a} = F_2 \cdot h_2 = 21\,Nm$$

La somma dei due momenti sarà quindi un momento antiorario

$$M_{tot-a} = M_{1a} - M_{1o} = 1\,Nm$$

Problema di: Dinamica - $D0085$

Testo *[D0085]* [2 2 1a]
Un oggetto di massa $m = 5\,kg$ e volume $V = 0,7\,m^3$ è appoggiato su di un tavolo. La densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3\,\frac{kg}{m^3}$. Disegna le forze che agiscono sull'oggetto, compresa la forza che esercita l'aria. Quanta forza sta facendo il tavolo per sorreggere l'oggetto se non trascuriamo l'effetto dell'aria?

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare del tavolo verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$R_v = mg - \rho V g = 5\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - 1,3\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,7\,m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 40,08\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0085a$

Testo [D0085a] [2 2 1a]
Un oggetto di volume $V = 10^5\,cm^3$ è appoggiato sul fondo di un contenitore pieno di olio (la densità dell'olio è $\rho_{olio} = 800\,\frac{kg}{m^3}$). Il fondo del contenitore fa una reazione vincolare $R_v = 200\,N$. Disegna le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di gravità sull'oggetto e la sua massa.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare del tavolo verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_g = 200\,N + 800\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,1\,m^3 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 984\,N$$

$$m = \frac{F_g}{g} = 100,4\,kg$$

Problema di: Dinamica - $D0085b$

Testo [D0085b] [2 2 1a]
Un oggetto si trova immerso in un contenitore pieno di olio, appeso ad una catena in modo che non tocchi il fondo. L'oggetto ha un volume $V = 150000\,cm^3$ e la densità dell'olio vale $\rho_{olio} = 800\,\frac{kg}{m^3}$. La catena fa una reazione vincolare $R_v = 400\,N$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di gravità sull'oggetto e la sua massa.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare della catena verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_g = 400\,N + 800\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,15\,m^3 \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 1576\,N$$

$$m = \frac{F_g}{g} = 160,8\,kg$$

Problema di: Dinamica - $D0085c$

Testo *[D0085c]* [2 2 1a]
Un oggetto si trova fermo, immerso in un contenitore pieno di liquido, appeso ad una catena in modo che non tocchi il fondo. L'oggetto ha una massa $m = 2\,kg$ e un volume $V = 1\,dm^3$. La catena fa una reazione vincolare verso l'alto $R_v = 10\,N$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di Archimede che agisce sull'oggetto.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare della catena verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_A = F_g - R_v = 2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - 10\,N = 9,6\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0085d$

Testo *[D0085d]* [2 2 1a]
Un oggetto della forma di un cubo si trova fermo, appeso ad una molla di costante elastica $k = 3\,\frac{N}{cm}$, la quale non riuscendo a sorreggerlo si è allungata fino a fargli toccare il pavimento. L'oggetto ha una massa $m = 2\,kg$. Il fondo fa una reazione vincolare verso l'alto $R_v = 10\,N$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza elastica che agisce sull'oggetto.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Sul cubo agiscono tre forze: la reazione vincolare verso l'alto, la forza di gravità verso il basso e la forza elastica verso l'alto.

$$R_v + F_{el} = F_g$$

$$F_{el} = mg - R_v = 2\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - 10\,N = 9,6\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0086$

Testo *[D0086]* [2 2 1a]

Un oggetto di massa $m = 3\,kg$ è appeso ad una molla di costante elastica $K = 4\,\frac{N}{cm}$. Sapendo che la forza di Archimede dovuta all'aria sull'oggetto vale $F_{_A} = 5\,N$, calcolate di quanto si allunga la molla.

Spiegazione Sull'oggetto agiscono tre forze. Se l'oggetto è fermo la somma delle forze è nulla.

Svolgimento Sull'oggetto agisce la forza di gravità che sappiamo essere sempre verso il basso, la forza di Archimede che sappiamo essere sempre verso l'alto e la forza elastica. Dal momento che la somma tra la forza di gravità e la forza elastica da un vettore verso il basso, per avere equilibrio è necessario che la forza elastica sia verso l'alto. Quindi

$$F_g = F_{_A} + F_{el}$$

$$mg - F_{_A} = k\Delta l$$

$$\Delta l = \frac{mg - F_{_A}}{K} = \frac{3\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} - 5\,N}{4\,\frac{N}{cm}} = 6,1\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0087$

Testo *[D0087]* [2 3 1a]

Una sbarra orizzontale lunga $L = 2\,m$ è schiacciata da due forze verticali verso il basso $F_1 = F_2 = 100\,N$ poste ai suoi estremi ed è sorretto da una forza verticale verso l'alto F_3 posta a $d = 40\,cm$ dal centro della sbarra. Quanto deve valere F_3 per avere equilibrio traslazionale? Visto che la sbarra non è in equilibrio rotazionale, quanto vale il momento totale delle tre forze?

Spiegazione Un problema di dinamica nel quale dobbiamo imporre la condizione di equilibrio traslazionale. Fatto questo le forze sono fissate, e i momenti delle forze pure. Quello che capiterà è che la somma di tutti i momenti non sarà zero.

Svolgimento Per avere equilibrio traslazionale si impone che la somma delle forze sia nulla:

$$F_3 = F_1 + F_2 = 200\,N$$

Ogni forza genera un momento torcente. Consideriamo il centro della sbarra come punto di rotazione. I momenti delle tre forze sono:

$$M_1 = F_1 \cdot \frac{L}{2} = 100\,Nm \qquad orario$$

$$M_2 = F_2 \cdot \frac{L}{2} = 100\,Nm \qquad antiorario$$

Ipotizziamo, visto che il testo non lo specifica, che la forza F_3 sia sulla sinistra rispetto al centro della sbarra

$$M_3 = F_3 \cdot d = 80\,Nm \qquad orario$$

e quindi

$$M_{tot} = 100\,Nm + 80\,Nm - 100\,Nm = +80\,Nm$$

Problema di: Dinamica - $D0088$

Testo *[D0088]* [2½ 3 1a]
Una trave orizzontale è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500\,N$ posta nel vertice di sinistra verso il basso, $F_2 = 2000\,N$ posta a $r_2 = 2\,m$ dal vertice di sinistra verso il basso, ed F_3. Determina la posizione, verso e valore di F_3.

Spiegazione La sbarra è tenuta in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla ed è pure nulla la somma dei momenti delle forze. Le tre forze sono verticali; due di queste sono verso il basso, allora quella in mezzo deve essere verso l'alto.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2500\,N$$

La somma dei momenti deve essere nulla. Assumiamo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_3. Chiamiamo d la distanza tra la forza F_3 e la forza F_2. Il momento di F_1 è orario e il momento di F_3 è antiorario. Quindi

$$F_1 r_2 = F_3 d$$

da cui

$$d = \frac{F_1 r_1}{F_3} = \frac{500\,N \cdot 2\,m}{2500\,N} = 40\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0088a$

Testo *[D0088a]* [2½ 3 1a]
Una trave orizzontale di massa trascurabile, è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500\,N$, posta nel vertice di sinistra verso l'alto; F_2 posta a $r_2 = 2\,m$ dal vertice di sinistra e verso l'alto; ed $F_3 = 1500\,N$. Determina la posizione di F_3 ed il valore di F_2.

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento Consideriamo il vertice di sinistra come il punto di rotazione della sbarra. Sappiamo che F_2 genera un momento antiorario e che F_1 genera un momento nullo. Quindi F_3 deve introdurre un momento orario e deve quindi in questo caso essere rivolta verso il basso.

La somma delle forze deve essere nulla, quindi posso scrivere

$$F_1 + F_2 = F_3$$

da cui

$$F_2 = 1000\,N$$

Il momento totale sulla sbarra deve essere nullo, quindi

$$M_2 = M_3$$

$$F_2 b_2 = F_3 b_3$$

da cui

$$b_3 = \frac{F_2 b_2}{F_3} = \frac{4}{3}\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0088b$

Testo [D0088b] [2½ 3 1a]
Una trave orizzontale di massa trascurabile, lunga $d = 3\,m$ è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500\,N$, posta nel vertice di sinistra e verso l'alto, F_2 posta nel vertice di destra e verso l'alto, ed $F_3 = 1500\,N$. Determina la posizione di F_3 ed il valore di F_2.

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi la forza F_3 deve necessariamente essere verso il basso. Avremo che la condizione di equilibrio sarà

$$F_1 + F_2 = F_3$$

da cui

$$F_2 = F_3 - F_1 = 1000\,N$$

Consideriamo come punto di rotazione il vertice di sinistra della sbarra. Chiamiamo x la distanza della forza F_3 dal punto di rotazione. Il momento della forza F_1 è nullo; quello della forza F_2 è antiorario; quello della forza F_3 è orario. Quindi

$$F_2 d = F_3 x$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_3} = 2\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0088c$

Testo [D0088c] [2½ 3 1a]
Una trave orizzontale lunga $L = 2\,m$ è spinta da due forze verticali verso il basso: $F_1 = 1500\,N$, posta nel vertice di sinistra, $F_2 = 2000\,N$ posta nel vertice di destra. A che distanza dal vertice di sinistra metteresti un chiodo per tenerla ferma? Quale forza farebbe il chiodo?

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi la reazione vincolare del chiodo R_v deve necessariamente essere verso l'alto. Avremo che la condizione di equilibrio sarà

$$R_v = F_1 + F_2 = 3500\,N$$

Consideriamo come punto di rotazione il vertice di sinistra della sbarra. Chiamiamo x la distanza del chiodo dal punto di rotazione. Il momento della forza F_1 è nullo; quello della forza F_2 è antiorario; quello della forza R_v è orario. Quindi

$$F_2 L = R_v x$$

$$x = \frac{F_2 L}{R_v} = \frac{8}{7}\,m$$

Problema di: Dinamica - $D0088d$

Testo *[D0088d]* [2½ 3 1a]
Una trave orizzontale lunga $L = 2\,m$ è tenuta ferma da due chiodi messi alle estremità. Una forza verticale verso il basso $F = 100\,N$, posta a $d = 50\,cm$ dal chiodo a sinistra, la spinge verso il basso. Calcola la forza che stanno facendo i due chiodi.

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento Per imporre l'equilibrio traslazionale possiamo scrivere

$$R_{v1} + R_{v2} = F$$

Sciegliendo il chiodo di sinistra come punto di rotazione possiamo scrivere

$$Fd = R_{v2}L$$

$$R_{v2} = 25\,N$$

Con la prima equazione possiamo scrivere adesso

$$R_{v1} = F - R_{v2} = 75\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0089$

Testo *[D0089]* [3½ 4 3a]
Un frigorifero di massa $m = 40\,kg$ e largo $L = 80\,cm$ si trova su di un pavimento con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.8$ e dinamico $\mu_d = 0.7$. Qual é la massima altezza a cui è possibile applicare una forza in modo che il frigo possa strisciare sul pavimento nel verso della larghezza?

Spiegazione Per prima cosa bisogna capire perché debba esistere una massima altezza. La forza che facciamo, necessaria per spostare il frigo, rispetto allo spigolo del frigo poggiato sul pavimento genera un momento che lo fa ruotare... cioè cadere se il contributo alla rotazione della forza di gravità non controbilancia l'effetto. Serve una forza minima per poterlo spostare, quindi un'altezza massima a cui poterla applicare per mantenere la giusta condizione sul momento delle forze.

Svolgimento La forza minima da esercitare sul frigo è pari alla massima forza di attrito statico

$$F = F_{as_{max}} = \mu_s mg$$

Contemporaneamente tale forza genera un momento in funzione dell'altezza h a cui è applicata. Se la forza F è applicata sul lato sinistro del frigo verso destra, lo spigolo che stiamo considerando è quello sul lato opposto, che chiameremo spigolo C ed intorno al quale il frigo ruota in senso orario.

$$M_o = F \cdot h = \mu_s mgh$$

La forza di gravità genera un momento con verso opposto il cui braccio è pari a metà della larghezza del frigo

$$M_a = mg \cdot \frac{L}{2}$$

Se $M_o > M_a$ allora il frigo cade ruotando intorno allo spigolo C Se $M_o \leq M_a$ allora il frigo non può cadere perché di fatto verrebbe ben premuto contro il pavimento, e la cui reazione vincolare ne annulla il momento totale.

Quindi

$$M_o \leq M_a$$

$$\mu_s mgh \leq mg \cdot \frac{L}{2}$$

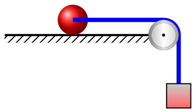
$$h \leq \frac{L}{2\mu_s} = 50\,cm$$

Nell'istante in cui il frigorifero comincia a spostarsi, la forza di attrito diminuisce passando da attrito statico ad attrito dinamico. L'altezza massima a cui applicare la forza quindi aumenta a

$$h \leq \frac{L}{2\mu_d} = 57,1\,cm$$

Problema di: Dinamica - $D0090$

Testo *[D0090]* [4 4 3a]



Una sfera di raggio r e di massa M è trainata, su di un piano orizzontale, da una fune fissata sull'asse di rotazione della sfera. La fune è a sua volta legata ad un peso di massa m. Sapendo che la sfera rotola senza strisciare, con quale accelerazione si muove? Quanto vale la tensione sul filo?

Spiegazione In questo esercizio applichiamo i principi della dinamica tenendo conto che la sfera compie un puro rotolamento e va quindi trattata come un corpo rigido a cui applicare inoltre l'opportuno vincolo.

Svolgimento Consideriamo il peso che si muove accelerando in verticale: avremo che

$$mg - T = ma$$

Consideriamo la traslazione della sfera: essa è spinta in avanti dalla tensione della corda e indietro dalla forza di attrito statico con il pavimento

$$T - F_{as} = Ma$$

Consideriamo la rotazione della sfera: il momento della forza di attrito statico mette in rotazione la sfera

$$M_{as} = I\alpha$$

da cui

$$F_{as} r = I\frac{a}{r}$$

Aggiungendo a queste equazioni il vincolo di puro rotolamento avremo

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - F_{as} = Ma \\ F_{as} r = I\alpha \\ a = \alpha r \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - I\dfrac{a}{r^2} = Ma \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} mg = a\left(M + \dfrac{I}{r^2} + m\right) \\ T = a\left(M + \dfrac{I}{r^2}\right) \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = g\dfrac{m}{\left(M + \dfrac{I}{r^2} + m\right)} \\ T = g\dfrac{m}{\left(M + \dfrac{I}{r^2} + m\right)}\left(M + \dfrac{I}{r^2}\right) \\ F_{as} = g\dfrac{m}{\left(M + \dfrac{I}{r^2} + m\right)}\dfrac{I}{r^2} \\ \alpha = \dfrac{g}{r}\dfrac{m}{\left(M + \dfrac{I}{r^2} + m\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = g\dfrac{1}{(1 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2})} \\ T = mg\dfrac{1}{\left(1 + \frac{mr^2}{Mr^2+I}\right)} \\ F_{as} = mg\dfrac{1}{\left(1 + \frac{(M+m)r^2}{I}\right)} \\ \alpha = \dfrac{g}{r}\dfrac{1}{(1 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2})} \end{cases}$$

Abbiamo risolto il sistema e quindi il problema. Possiamo ora inserire l'ultima informazione: l'oggetto che rotola è una sfera! Quindi

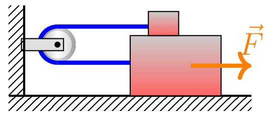
$$I = \frac{2}{5}Mr^2$$

Riscriviamo quindi il sistema introducendo questa informazione.

$$\begin{cases} a = g\dfrac{1}{(1 + \frac{7}{5}\frac{M}{m})} \\ T = mg\dfrac{1}{(1 + \frac{5}{7}\frac{m}{M})} \\ F_{as} = mg\dfrac{1}{\left(1 + \frac{5}{2}\frac{(M+m)}{M}\right)} \\ \alpha = \dfrac{g}{r}\dfrac{1}{(1 + \frac{7}{5}\frac{M}{m})} \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - *D*0091

Testo *[D0091]* [3½ 4 3a]



Un oggetto di massa $M = 10\,kg$ si muove su di un piano orizzontale senza attrito spinto da una forza $F = 90\,N$. Su di esso è appoggiato un secondo oggetto di massa $m = 2\,kg$. Il coefficiente di attrito dinamico tra loro è $\mu_d = 2$. I due blocchi sono uniti da una fune che passa attraverso una carrucola in modo da farli muovere in verso opposto. Calcola l'accelerazione con cui si muove il sistema e la tensione del filo.

Spiegazione In questo esercizio applichiamo i principi della dinamica ottenendo un sistema di equazioni la cui soluzione risponde ai quesiti del problema.

Svolgimento Il filo è inestensibile, quindi le accelerazioni dei due oggetti hanno lo stesso modulo.

Sul blocco inferiore agisce la spinta F, la tensione del filo T e la forza di attrito con il blocco superiore F_a. Scriviamo la legge di Newton per questo oggetto nella prima riga del sistema.

Sul blocco superiore agiscono la tensione del filo T e la forza di attrito con il blocco inferiore F_a. Scriviamo la legge di Newton per questo oggetto nella seconda riga del sistema.

Quindi

$$\begin{cases} F - T - F_a = M\,a \\ T - F_a = m\,a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - T - \mu mg = M\,a \\ T - \mu mg = m\,a \end{cases}$$

da cui, risolvendo, otteniamo

$$\begin{cases} F - 2\mu mg = (M + m)\;a \\ T - \mu mg = m\,a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{F - 2\mu mg}{(M+m)} \\ T = \dfrac{m}{(M+m)}\left[F + \mu\,(M - m)\,g\right] \end{cases}$$

Problema di: Moto armonico - $D0092$

Testo *[D0092]* [4 4 3a]
In un tubo a forma di "U" aperto da entrambi i lati è presente dell'acqua. Inizialmente la differenza di livello dell'acqua nei due bracci del tubo è $\Delta h_i = 10\,cm$. Il tubo è pieno di acqua per una lunghezza $L = 1\,m$. Inizialmente l'acqua è ferma. Calcolate la frequenza con cui il livello dell'acqua comincerà ad oscillare all'interno del tubo.

Spiegazione In questo esercizio il livello del liquido nei due bracci del tubo è differente. Questo significa che il peso della colonna di liquido più alta mette in movimento tutto il liquido nel tubo. La colonna di liquido più alta comincia ad abbassarsi mentre quella più alta a sollevarsi. Quando i due livelli sono uguali, il liquido ha assunto la massima velocità e continua il suo movimento; il braccio del tubo nel quale la colonna di liquido era inizialmente bassa, adesso contiene una colonna di liquido più alta. Si innesca un movimento oscillatorio caratterizzato da una certa frequenza di oscillazione. Per trovare la frequenza di oscillazione è sufficiente trovare la relazione tra l'accelerazione del liquido e l'altezza del dislivello di liquido tra le due colonne.

Svolgimento Cominciamo con il fissare un sistema di riferimento. Noi sappiamo che il liquido nella posizione iniziale occupa due bracci del tubo. Le due colonne di liquido sono una più alta dell'altra. Concentriamo la nostra attenzione sui livelli di liquido nelle due colonne. Durante l'oscillazione il liquido si sposta da una colonna all'altra; il livello del liquido in ognuna delle due colonne oscilla quindi intorno ad un'altezza che si trova, nell'istante iniziale, a metà altezza tra le due colonne. Fissiamo il centro dell'oscillazione del livello del liquido come nostro punto di riferimento.

Per cui, all'inizio, la colonna più alta si trova all'altezza $\Delta x_i = \frac{\Delta h}{2}$ e quella più bassa all'altezza $\Delta x_f = -\frac{\Delta h}{2}$

Per ottenere l'equazione del moto partiamo da

$$F = ma$$

dove m è la massa totale di liquido nel tubo, a è l'accelerazione con cui si muove il liquido nel tubo e F è la forza con cui l'acqua in eccesso da un lato del tubo viene tirata verso il basso. Ciò che innesca il movimento è infatti la forza di gravità; ma tale forza agisce in verso opposto nei due bracci del tubo, per cui la risultante della forza di gravità coincide con la forza che si applica alla sola acqua in eccesso in un lato del tubo.

La forza di gravità che spinge l'acqua nel tubo è quindi soltanto quella che agisce sull'eccesso di acqua in un lato del tubo, per cui

$$\rho \cdot S \cdot 2\Delta x \cdot g = \rho \cdot L \cdot S \cdot a$$

da cui

$$a = \frac{2g}{L}\Delta x$$

L'accelerazione è direttamente proporzionale alla posizione del livello del liquido. Questa equazione indica che siamo di fronte ad un moto armonico che prevede un'oscillazione intorno ad un punto di equilibrio il cui periodo vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

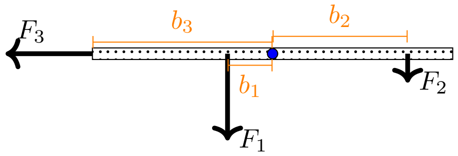
La frequenza è quindi

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Problema di: Dinamica - $D0093$

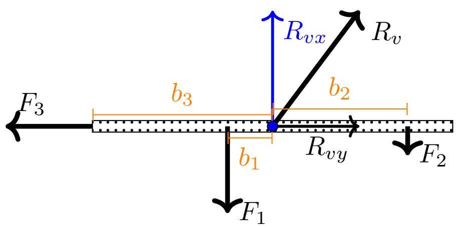
Testo *[D0093]* [3 5 1a]

Una sbarra orizzontale di massa trascurabile è inchiodata nel suo centro libera di ruotare. Due forze $F_1 = 15\,N$ e $F_2 = 5\,N$ vengono applicate alla sbarra verso il basso. La forza F_1 è applicata alla distanza $b_1 = 20\,cm$ a sinistra del chiodo. Un terza forza $F_3 = 15\,N$ è applicata orizzontalmente alla sbarra verso sinistra. Sapendo che la sbarra è ferma, calcola la distanza dal chiodo b_2 a cui è posizionata la forza F_2 e la reazione vincolare del chiodo.



Spiegazione Se la sbarra è ferma, allora è in equilibrio traslazionale e rotazionale. Questo produrrà tre equazioni, due sulle forze ed uno sui momenti delle forze.

Svolgimento In questo esercizio abbiamo quattro forze. Due di esse, F_3 e la reazione vincolare del chiodo, generano un momento della forza nullo. Quindi dal punto di vista della rotazione possiamo scrivere



$$M_1 = M_2$$

in quanto il momento di F_1 è antiorario ed il momento di F_2 è orario.

$$F_1 b_1 = F_2 b_2$$

$$b_2 = \frac{F_1}{F_2} b_1 = 60\,cm$$

La reazione vincolare deve essere scomposta nelle sue componenti orizzontale R_{vx} e verticale R_{vy}. Avremo le equazioni

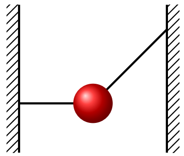
$$\begin{cases} R_{vx} = F_3 = 15\,N \\ R_{vy} = F_1 + F_2 = 20\,N \end{cases}$$

Di conseguenza il modulo di R_v sarà

$$R_v = \sqrt{R_{vx}^2 + R_{vy}^2} = 25\,N$$

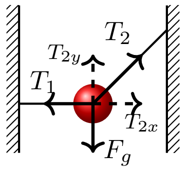
Problema di: Dinamica - $D0094$

Testo *[D0094]* [2 3 1a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ è sostenuto da due cavi attaccati a due pareti verticali. Il primo cavo è orizzontale ed il secondo cavo è inclinato verso l'alto con un angolo di $\alpha = 45°C$. Quanto valgono le due tensioni dei cavi?



Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico traslazionale in due dimensioni. La somma di tutte le forze deve essere nulla.

Svolgimento Le forze del problema sono tre: la forza di gravità in basso e le due tensioni dei fili. La tensione del filo obliquo deve essere scomposta lungo le due direzioni orizzontale e verticale nelle due componenti T_{2x} e T_{2y}. Essendo il cavo inclinato di $45°$, le due componenti saranno uguali. Quindi



$$\begin{cases} mg = T_{2y} \\ T_1 = T_{2x} \end{cases}$$

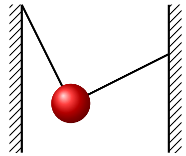
$$\begin{cases} T_{2y} = 19,6\,N \\ T_1 = 19,6\,N \end{cases}$$

Avremo infine

$$T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} = 27,7\,N$$

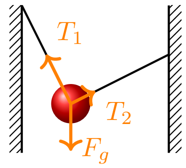
Problema di: Dinamica - $D0094a$

Testo *[D0094]* [2 3 1a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ è sostenuto da due cavi attaccati a due pareti verticali. Tra i due cavi si forma un angolo di $\alpha = 90°C$. Sapendo che una delle due tensioni è doppia dell'altra, determina i loro valori.



Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico traslazionale in due dimensioni. La somma di tutte le forze deve essere nulla.

Svolgimento Le forze del problema sono tre: la forza di gravità in basso e le due tensioni dei fili. Chiamiamo T_1 la tensione del filo attaccato più in alto sulla parete. Sapendo che le due tensioni sono perpendicolari tra loro, possiamo scrivere:



$$mg = \sqrt{T_1 + T_2} = \sqrt{3}T_2$$

$$T_2 = \frac{19,6\,N}{\sqrt{3}} = 11,3\,N$$

$$T_1 = \frac{T_2}{2} = 5,66\,N$$

Problema di: Principi della dinamica - $D0095$

Testo *[D0095]* [2½ 2 3a]
Su di una barca ferma in un lago, lunga $L = 3\,m$ e di massa $M = 150\,kg$, due persone di massa rispettivamente $m_1 = 55\,kg$ e $m_2 = 90\,kg$ sono sedute ai bordi opposti della nave. Di quanto si sposta la barca se le due persone invertono la loro posizione?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo.

Svolgimento Nel sistema di riferimento della barca, considerando l'origine degli assi nella posizione della prima persona, il baricentro del sistema di trova nel punto

$$X_b = \frac{m_1 \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2} + m_2 \cdot L}{m_1 + M + m_2} = \frac{55\,kg \cdot 0\,m + 150\,kg \cdot 1,5\,m + 90\,kg \cdot 3\,m}{295\,kg} = 1\,m$$

Invertendosi le due persone, ora il baricentro si trova, sempre rispetto alla prua della barca, nel punto

$$X_b = \frac{m_2 \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot L}{m_2 + M + m_1} = \frac{90\,kg \cdot 0\,m + 150\,kg \cdot 1,5\,m + 55\,kg \cdot 3\,m}{295\,kg} = 1,322\,m$$

Questo significa che, rispetto all'acqua, tutta la barca deve essersi spostata di $32,2\,cm$

Problema di: Principi della dinamica - $D0097$

Testo *[D0097]* [2½ 2 3a]
Due ragazzi su pattini da ghiaccio sono legati con una fune lunga $L = 10\,m$. Ad un certo punto il ragazzo più pesante due tira la fune per avvicinarsi all'amico. Sapendo che le masse dei ragazzi sono rispettivamente $m_1 = 75\,kg$ e $m_2 = 50\,kg$, di quanti metri è avanzato il ragazzo più pesante?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per avvicinarsi all'amico, il ragazzo può solo tirare la fune e da questa, di conseguenza, essere tirato in avanti. Quindi ogni forza coinvolta è interna al sistema.

Svolgimento Rispetto al ragazzo più pesante, il baricentro del sistema si troverà nel punto

$$X_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{50\,kg \cdot 10\,m}{125\,kg} = 4\,m$$

Tirando la fune, i ragazzi si toccheranno nel baricentro del sistema, quindi il ragazzo più pesante sarà avanzato di esattamente $\Delta S = 4\,m$

Problema di: Principi della dinamica - $D0097a$

Testo *[D0097a]* [2½ 2 3a]
Un acrobata di massa $m = 70\,kg$ si trova appeso ad una fune lunga $L = 10\,m$ sotto una mongolfiera ferma di massa $M = 210\,kg$. Salendo lungo la fune, di quanto si abbassa la mongolfiera?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per avvicinarsi alla mongolfiera, il ragazzo può solo tirare la fune e da questa, di conseguenza, essere tirato in alto. Quindi ogni forza coinvolta è interna al sistema.

Svolgimento Rispetto alla mongolfiera, il baricentro del sistema si troverà nel punto

$$Y_b = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{-70\,kg \cdot 10\,m}{280\,kg} = -2,5\,m$$

Tirando la fune, la mongolfiera scende di esattamente $\Delta S = -2.5\,m$

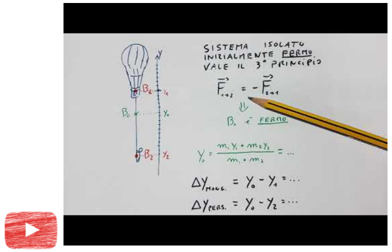


Fig. 5.8: *Guarda il video youtu.be/Vwwkef4ujaw*

Problema di: Principi della dinamica - $D0097b$

Testo *[D0097b]* [2½ 2 3a]
Un batiscafo si trova fermo sott'acqua a $h = 10\,m$ di distanza dal fondo marino. Il batiscafo, completo di equipaggio, ha una massa $M = 2000\,kg$ e trasporta, ancorato fuori di esso, un apparato scientifico di massa $m = 300\,kg$ che deve essere depositato sul fondale calandolo con una fune metallica di massa trascurabile. Quanti metri di fune devono essere utilizzati per l'operazione?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per spostare il carico si agisce unicamente sulla tensione del filo che è di fatto una forza interna al sistema.

Svolgimento Lavoriamo nel sistema di riferimento del baricentro.

Visto che il baricentro del sistema deve rimanere fermo, quando la strumentazione arriverà a toccare il fondo avremo che il batiscafo si sarà sollevato di una certa altezza Δy in modo tale che

$$M\Delta y = mh$$

In questo modo, se calcoliamo la posizione del baricentro, essa continua ad essere nell'origine degli assi.

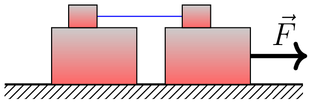
Quindi

$$\Delta y = \frac{m}{M}h = 1,5\,m$$

La distanza tra il batiscafo e la strumentazione, nel momento il cui essa si appoggia al fondo, è quindi $L = h + \Delta y = 11,5\,m$

Problema di: Principi della dinamica - *D*0098

Testo *[D0098]* [4½ 4 3a]



Su di un piano senza attrito sono appoggiati due oggetti di massa M. Su ognuno di essi è appoggiato un oggetto di massa m e tra loro il coefficiente di attrito statico è μ_s. I due oggetti di massa m sono uniti da una corda tesa. Uno degli oggetti che poggia sul piano senza attrito è spinto da una forza F. Qual é la massima forza F che possiamo fare affinché tutti e quattro gli oggetti si muovano con la stessa accelerazione? *[Walter Lewin problem #16]*

Spiegazione Qui semplicemente applichiamo il secondo principio della dinamica. Dobbiamo aver chiaro il concetto di forza di attrito statico sempre minore della massima forza di attrito statico $F_{max} = \mu_s mg$

Svolgimento Indichiamo con a i due oggetti di destra e con b i due oggetti di sinistra. F_a è la forza di attrito sugli oggetti a destra. F_b è la forza di attrito sugli oggetti a sinistra. La forza F agisce sull'oggetto a destra e spinge verso destra.

Una volta disegnate tutte le forze possiamo scrivere quattro equazioni per le forze posizionate in orizzontale

$$\begin{cases} F - F_a = Ma \\ F_a - T = ma \\ T - F_b = ma \\ F_b = Ma \end{cases}$$

A queste quattro equazioni aggiungiamo le due equazioni legate alla forza di attrito

$$\begin{cases} F_a < \mu_s mg \\ F_b < \mu_s mg \end{cases}$$

Dal momento che il sistema accelera verso destra, possiamo affermare con sicurezza, osservando gli oggetti di massa m, che $F_a > T > F_b$

Quindi il limite sulla forza F lo ricaveremo dalla disequazione che coinvolge F_a Risolvendo il sistema avremo

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{2\,(m+M)} \\ T = \dfrac{1}{2}F \\ F_b = \dfrac{M}{2\,(m+M)}F \\ F_a = \dfrac{(2m+M)}{2\,(m+M)}F \end{cases}$$

e quindi

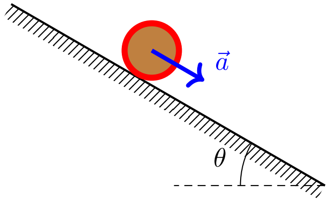
$$\frac{(2m+M)}{2\,(m+M)}F < \mu_s mg$$

da cui

$$F < 2\mu_s g\frac{m\,(m+M)}{(2m+M)}$$

Problema di: Principi della dinamica - $D0099$

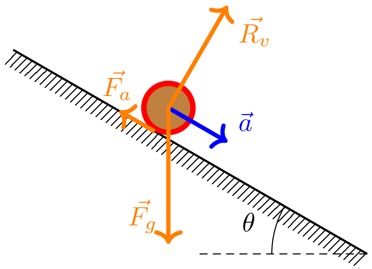
Testo *[D0099]* [4 5 3a]
Su di un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale, rotola senza strisciare un cilindro composito formato da due materiali differenti. Il cilindro è formato da un cilindro interno di piombo, di raggio $r_a = 4\,cm$ e densità $\rho_a = 11,34\,\frac{g}{cm^3}$, e da una corona cilindrica esterna di ferro, di raggio esterno $r_b = 5\,cm$ e densità $\rho_b = 7,85\,\frac{g}{cm^3}$. Il cilindro e la corona sono solidali tra loro. Con quale accelerazione si muove il sistema lungo il piano inclinato?



Spiegazione E' un problema di dinamica in cui si applica il secondo principio della dinamica sia nella forma lineare che rotazionale, e la condizione di puro rotolamento.

Svolgimento Concentriamo la nostra attenzione lungo la linea del piano inclinato in quanto lungo la linea ad esso perpendicolare le forze sono in equilibrio.

Avremo la forza di gravità in avanti e la forza di attrito indietro. Per cui



$$F_g \sin\theta - F_a = ma$$

Dal punto di vista rotazionale possiamo scrivere che

$$F_a \cdot r_b = I\alpha$$

ed infine la condizione di puro rotolamento

$$\alpha r = a$$

Quindi

$$\begin{cases} F_g \sin\theta - F_a = m_{tot}a \\ F_a \cdot r_b = I\alpha \\ \alpha r_b = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a = -m_{tot}a + F_g \sin\theta \\ (-m_{tot}a + F_g \sin\theta) \cdot r_b = I\alpha \\ \dfrac{(-m_{tot}a + F_g \sin\theta) \cdot r_b^2}{I} = a \end{cases}$$

Da cui

$$\left(I + m_{tot}r_b^2\right) a = F_g r_b^2 \sin\theta$$

$$a = \frac{F_g r_b^2 \sin\theta}{I + m_{tot}r_b^2}$$

esplicitiamo la forza di gravità

$$a = \frac{m_{tot} g r_b^2 \sin\theta}{I + m_{tot}r_b^2}$$

e dividiamo per la massa e per il quadrato di r_b

$$a = \frac{g\sin\theta}{\dfrac{I}{m_{tot}r_b^2} + 1}$$

Adesso dobbiamo calcolare il momento di inerzia del cilindro composito. Esso sarà la somma dei momenti di inerzia delle sue due parti.

Per cui

$$I = I_a + I_b = \frac{1}{2}m_a r_a^2 + \frac{1}{2}m_b\left(r_b^2 - r_a^2\right)$$

Indicando con h le altezze dei due oggetti, le masse dei due oggetti sono

$$m_a = \rho_a \cdot \pi r_a^2 h$$

$$m_b = \rho_b \cdot \pi\left(r_b^2 - r_a^2\right) h$$

$$m_{tot} = m_a + m_b = \pi h \left[\rho_a r_a^2 + \rho_b \left(r_b^2 - r_a^2\right)\right]$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2}\rho_a \cdot \pi r_a^4 h + \frac{1}{2}\rho_b \cdot \pi \left(r_b^2 - r_a^2\right)^2 h$$

$$I = \frac{1}{2}\pi h \left[\rho_a r_a^4 + \rho_b \left(r_b^2 - r_a^2\right)^2\right]$$

Ora calcoliamo la quantità

$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2}\frac{\left[\rho_a r_a^4 + \rho_b \left(r_b^2 - r_a^2\right)^2\right]}{r_b^2\left[\rho_a r_a^2 + \rho_b \left(r_b^2 - r_a^2\right)\right]}$$

divido per r_b^4

$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2}\frac{\left[\rho_a \frac{r_a^4}{r_b^4} + \rho_b \left(1 - \frac{r_a^2}{r_b^2}\right)^2\right]}{\left[\rho_a \frac{r_a^2}{r_b^2} + \rho_b \left(1 - \frac{r_a^2}{r_b^2}\right)\right]}$$

Adesso possiamo mettere nei conti i dati del problema

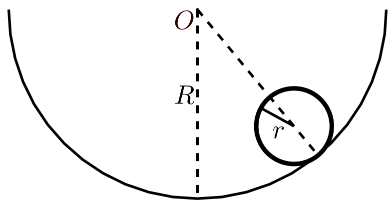
$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2}\frac{\left[11,34\,\frac{g}{cm^3}\cdot 0,41 + 7,85\,\frac{g}{cm^3}\cdot 0,13\right]}{\left[11,34\,\frac{g}{cm^3}\cdot 0,64 + 7,85\,\frac{g}{cm^3}\cdot 0,36\right]} = 0,28$$

e quindi

$$a = 0,14\,g = 1,38\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica del moto armonico - $D0100$

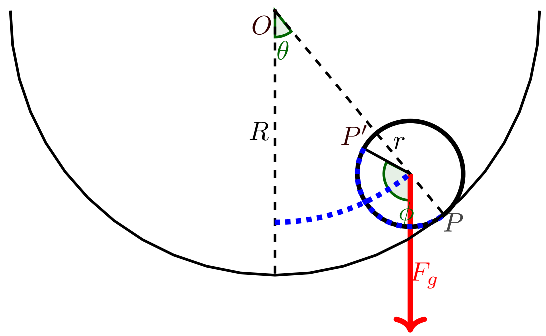
Testo *[D0100]* [5 4 3a]



Un cilindro omogeneo pieno, di massa m e raggio r, rotola senza strisciare all'interno di un cilindro di raggio interno R. Nell'approssimazione di piccoli angoli, esso oscillerà di moto armonico. Calcola il periodo delle oscillazioni. *[Walter Lewin problem #23]*

Spiegazione E' un problema di dinamica del moto armonico per un corpo rigido in condizione di puro rotolamento. Si consiglia di vedere i video Youtube codice rjz0XeK0gr0

Svolgimento Il cilindro mobile, che chiameremo *CM*, è spinto dalla forza di gravità verso il basso e dalla forza di attrito statico con il cilindro fisso. Quest'ultima è la causa del rotolamento.



Il punto di contatto tra i due cilindri non striscia, ed in ogni istante è considerabile come punto di rotazione di CM.

Il momento di inerzia di CM, rispetto al suo asse centrale, è $I = \frac{1}{2}mr^2$. Considerato che il punto P si trova sul bordo del cilindro dobbiamo utilizzare il teorema degli assi paralleli ed otteniamo il momento di inerzia rispetto al punto P

$$I_P = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

Quindi l'equazione che descrive la dinamica della rotazione, rispetto al punto P, è[1]

$$mgr \sin\theta = -\frac{3}{2}mr^2\ddot{\phi}$$
$$g \sin\theta = -\frac{3}{2}r\ddot{\phi}$$

che nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione diventa

$$g\theta = -\frac{3}{2}r\ddot{\phi}$$

Il punto P, considerato come punto su CM, sebbene non strisci sul cilindro, è istante dopo istante un punto differente. La lunghezza dell'arco descritto da P su CM deve essere uguale alla distanza percorsa dall'asse di rotazione di CM.

Imponiamo in questo modo la condizione di puro rotolamento.

$$\theta\,(R-r) = \phi r$$

che per le accelerazioni angolari, essendo i raggi costanti, diventa

$$\ddot{\theta}\,(R-r) = \ddot{\phi} r$$

Quindi otteniamo la formula

$$g\theta = -\frac{3}{2}r\ddot{\theta}\frac{R-r}{r}$$

da cui

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3\,(R-r)}\theta$$

Questa è l'equazione del moto di un moto armonico semplice di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\,(R-r)}{2g}}$$

[1]Per gli studenti del liceo è necessaria una spiegazione sulla simbologia utilizzata nella formula seguente. i due puntini messi sopra una grandezza fisica, in questo caso l'angolo ϕ indicano la derivata seconda rispetto al tempo di quella grandezza. Per cui se ϕ è un angolo, allora $\dot{phi}$ è la velocità angolare e $\ddot{phi}$ è un'accelerazione angolare. Se x è una posizione, allora $\dot{phi}$ è una velocità e $\ddot{phi}$ è un'accelerazione.

Problema di: Dinamica del puro rotolamento - $D0101$

Testo *[D0101]* [5 8 3a]

Una palla da bowling di massa $M = 8\,kg$ viene lanciata con una velocità iniziale $V_0 = 9\,\frac{m}{s}$. Inizialmente non ruota. A causa dell'attrito con la pista ($\mu_d = 0,2$) essa aumenta gradualmente la sua velocità di rotazione fino a raggiungere una condizione di puro rotolamento. Quale velocità avrà e quanta strada avrà fatto in quell'istante?

Spiegazione E' un problema sul moto uniformemente accelerato per un corpo rigido. Serve conoscere la condizione di puro rotolamento. Attenzione che l'applicazione della condizione di puro rotolamento,fatta sulla distanza percorsa, può essere controintuitiva.

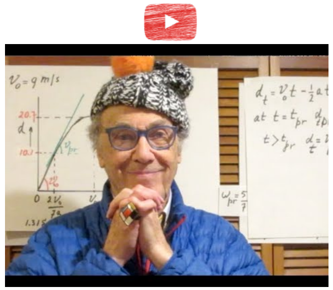


Fig. 5.9: *Guarda il video youtu.be/N4Yy_E6JDyo*

Svolgimento Sappiamo che la palla da bowling inizialmente non ruota, e quindi striscia sulla pista mentre avanza, e sappiamo che gradualmente aumenta la sua velocità di rotazione fino a raggiungere la condizione di puro rotolamento. La rotazione è causata dall'attrito dinamico tra la palla e la pista

$$F_{ad} = \mu_d Mg$$

L'attrito crea un momento torcente sulla palla

$$T = F_{ad}\cdot R = \mu_d MgR$$

il quale per il secondo principio della dinamica vale[2]

$$\mu_d MgR = I\dot{\omega}$$

[2]Ricordo che l'accelerazione angolare che spesso ho indicato con α può essere più comodamente indicata con $\dot{\omega}$ che indica come l'accelerazione sia legata alla variazione nel tempo della velocità angolare.

Il momento di inerzia della sfera è

$$I = \frac{2}{5}\, M\, R^2$$

e quindi

$$\mu_d M g R = \frac{2}{5}\, M\, R^2 \dot{\omega}$$

$$\mu_d g = \frac{2}{5}\, R\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{5\mu_d g}{2R}$$

Come potete vedere l'accelerazione angolare è costante e quindi, rispetto al baricentro della sfera, abbiamo un moto rotazionale uniformemente accelerato di equazione

$$\omega = \dot{\omega}\Delta t + \omega_i = \frac{5\mu_d g}{2R}\Delta t$$

Contemporaneamente la sfera si sta muovendo in avanti Su di essa agisce solo la forza di attrito, e quindi possiamo scrivere

$$F_{ad} = M\, a$$

$$a = \mu_d g$$

Anche l'accelerazione del baricentro della sfera è costante; il baricentro si muove quindi di moto uniformemente accelerato. Teniamo presente che l'accelerazione è rivolta in verso opposto alla velocità, e che quanto scritto rappresenta il modulo dell'accelerazione, quindi

$$V = -a\Delta t + V_i = -\mu_d g \Delta t + V_i$$

La velocità quindi diminuisce man mano che passa il tempo, come effettivamente ci si aspetta in presenza del solo attrito dinamico.

Abbiamo quindi una sfera che avanza con velocità decrescente e rotola con velocità angolare crescente. Mentre questo accade sappiamo che $\omega R < V$ infatti ω partiva da zero, mentre V partiva da un valore non nullo.

Il problema chiede di calcolare due grandezze fisiche nell'instante in cui la sfera raggiunge la condizione di puro rotolamento, rappresentata da una relazione tra la velocità lineare del baricentro e la velocità angolare del corpo rigido.

$$V = \omega R$$

Quindi

$$-\mu_d g \Delta t + V_i = \frac{5\mu_d g}{2R}\Delta t \cdot R$$

$$\Delta t = \frac{V_i}{\frac{5\mu_d g}{2} + \mu_d g}$$

$$\Delta t = \frac{2V_i}{7\mu_d g} = 1{,}312\, \frac{m}{s}$$

Sappiamo quindi adesso quanto tempo passa prima di raggiungere la condizione di puro rotolamento, e possiamo calcolarci velocità e distanza percorsa.

$$V_{pr} = -\mu_d g \frac{2V_i}{7\mu_d g} + V_i$$

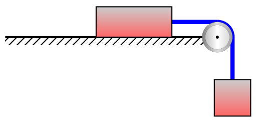
$$V_{pr} = \frac{5V_i}{7} = 6{,}429\, \frac{m}{s}$$

$$\Delta S = -\frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i \Delta t$$

$$\Delta S_{pr} = -\frac{2V_i^2}{49\mu_d g} + V_i \frac{2V_i}{7\mu_d g} = \frac{12V_i^2}{49\mu_d g} = 10{,}121\, m$$

Problema di: Dinamica - $D0102$

Testo *[D0102]* [3 3 2a]



Una slitta di massa $m_1 = 0,12\,kg$ scivola su di un piano orizzontale, partendo da fermo, con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,1$ tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02\,kg$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02\,kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 0,196N$$

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

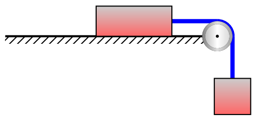
$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - \mu m_1 g = m_1 a \\ R_v = m_1 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2)a$$
$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$$
$$a = \frac{0,02\,kg - 0,1 \cdot 0,12\,kg}{0,14\,kg} \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 0,56\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - $D0102a$

Testo *[D0102a]* [3 3 2a]



Una slitta di massa $m_1 = 0,12\,kg$ scivola su un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,1$, tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02\,kg$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Sapendo che la velocità iniziale del pesino è verso l'alto, con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica. Attenzione a non dimenticare la forza di attrito.

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02\,kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 1,96N$$

Il sistema si muove in modo che il pesino inizialmente ha la velocità verso l'alto, e quindi la slitta si muove verso sinistra, quindi la forza di attrito sulla slitta è nello stesso verso della tensione del filo.

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T + \mu m_1 g = m_1 a \\ R_v = m_2 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$m_2 g + \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a$$
$$a = \frac{m_2 + \mu m_1}{m_1 + m_2} g$$
$$a = \left(\frac{0,032\,kg}{0,14\,kg}\right) \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 2,24\,\frac{m}{s^2}$$

La tensione del filo è

$$T = m_1 \cdot (a - \mu g) = 0,151\,N$$

Tale accelerazione avrà il valore indicato fino a quando la slitta non si ferma e ricomincia a muoversi. In questa fase successiva l'accelerazione del sistema diminuirà.

Problema di: Dinamica - $D0104$

Testo *[D0104]* [3 ⭐ 3 ⌛ 2a 📖]
Le caratteristiche tecniche di un'auto di massa $M = 1500\,kg$, indicano che è in grado di passare da $V_i = 0\,\frac{km}{h}$ a $V_f = 100\,\frac{km}{h}$ in un tempo $\Delta t = 9,26\,s$. Se aggancio all'auto un rimorchio di massa $m = 500\,kg$, e assumo che la forza espressa dal motore rimanga invariata, quale forza deve sopportare il gancio di traino?

Spiegazione Calcolata la forza media espressa dal motore dell'auto, un diagramma di corpo libero risolve il problema.

Svolgimento La forza espressa dal motore dell'auto è

$$F = m\frac{\Delta V}{\Delta t} = 15\,kN$$

In un diagramma di corpo il gancio di traino è modellizzato con una reazione vincolare che frena l'auto e tira il rimorchio. Quindi

$$\begin{cases} F - T = Ma \\ T = ma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{M+m} \\ T = \dfrac{m}{M+m}F \end{cases}$$

Quindi

$$T = 3750\,N$$

Problema di: Dinamica - $D0105$

Testo *[D0105]* [5 ⭐ 4 ⌛ 3a 📖]
Un sistema di carrucole è formato da due carrucole fisse ed una mobile posizionata tra di esse. un cavo ha due pesi ai suoi estremi e sorregge la carrucola nel centro. Il cavo assume sempre posizione verticale tra una carrucola e la successiva. In assenza di attriti e con le carrucole di massa trascurabile, chiamate m_1, m_2 ed m_3 le tre masse, calcola la tensione del filo.

Spiegazione In questo esercizio è sufficiente applicare il secondo principio della dinamica a tutte e tre le masse, e scrivere una relazione tra le tre accelerazioni dei tre oggetti. Le tre accelerazioni sono infatti tutte differenti.

Svolgimento Cominciamo con il dire che le tre accelerazioni sono differenti; non conoscendo il loro verso, le disegniamo tutte verso il basso e ci aspettiamo che una o due possano risultare avere valori negativi.

Il sistema che scriviamo è quindi

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - 2T = m_2 a_2 \\ m_3 g - T = m_3 a_3 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione fondamentalmente dice che il filo è inestensibile. Infatti per ogni centimetro di cavo che ognuno dei pesi tira verso il basso, sempre un centimetro di cavo deve salire nel complesso per quanto riguarda gli altri due pesi. L'unica particolarità è che la carrucola centrale tira un cavo doppio.

Avremo che

$$\begin{cases} g - \dfrac{T}{m_1} = a_1 \\ g - 2\dfrac{T}{m_2} = a_2 \\ g - \dfrac{T}{m_3} = a_3 \\ g - \dfrac{T}{m_1} + 2g - 4\dfrac{T}{m_2} + g - \dfrac{T}{m_3} = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione

$$4g = \left(\frac{1}{m_1} + 4\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) T$$

$$T = \frac{4g}{\left(\frac{1}{m_1} + 4\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)}$$

Problema di: Dinamica - $D0106$

Testo *[D0106]* [2⭐ 4⌛ 2a📖]
Un cilindro di legno ha il diametro di base lungo $d = 20\,cm$ e l'altezza $h = 50\,cm$. La densità del legno è $\rho = 0,6\,\frac{g}{cm^2}$. Se lo spingo nel punto più in alto, ammesso che l'attrito con il terreno sia sufficiente a tenere fermo il bordo del cilindro, quale forza devo fare per rovesciarlo?

Spiegazione Il cilindro cadrà se non è in equilibrio rotazionale a causa delle due forze che subisce.

Svolgimento Se il cilindro cade è perché ruota intorno ad un punto della circonferenza di base. La forza di gravità genera un momento tale da tenere il cilindro in verticale. La forza da voi applicata cerca di far ruotare il cilindro nel verso opposto.

Quindi

$$F \cdot h \geq mg\frac{d}{2}$$

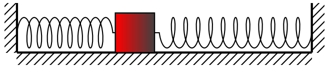
$$F \cdot h \geq \rho \cdot \pi r^2 h \cdot gr$$

$$F \geq \pi \rho r^3 g$$

Curiosamente, definito il materiale, la forza che devo fare non dipende dall'altezza del cilindro.

Problema di: Dinamica - $D0107$

Testo *[D0107]* [3½ 4 3a]



Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ è libero di oscillare su di un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione di due molle posizionate ai lati opposti dell'oggetto. Nella posizione di equilibrio le due molle hanno una lunghezza pari alla loro lunghezza a riposo. Le due molle hanno costante elastica $k_1 = 100\,\frac{N}{cm}$ e $k_2 = 50\,\frac{N}{cm}$. L'oggetto viene spostato dalla posizione di equilibrio di $\Delta l_i = 10\,cm$ e poi lasciato libero. Dopo aver dimostrato che il moto conseguente è un moto armonico, calcolare il periodo del moto. Calcolare inoltre la velocità dell'oggetto quando transita per la posizione di equilibrio.

Spiegazione Un problema sul moto armonico e sulla legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Il corpo è sottoposto a due forze orizzontali concordi tra loro. Spostando infatti l'oggetto a sinistra di una quantità $\vec{x}$ una molla si allunga e lo tira a destra; l'altra si comprime e lo spinge anch'essa a destra. Quindi per il secondo principio della dinamica avremo:

$$-k_1\vec{x} - k_2\vec{x} = m\vec{a}$$

Queste due molle montate in parallelo hanno una costante elastica equivalente

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

$$\vec{a} = -\frac{k_{eq}}{m}\vec{x}$$

Il moto è quindi armonico con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

$$T = 54,4\,s$$

Conoscendo lo spostamento massimo iniziale dell'oggetto possiamo calcolare l'energia immagazzinata inizialmente e utilizzare la legge di conservazione dell'energia sapendo che tutta l'energia potenziale iniziale è trasformata in energia cinetica.

$$\frac{1}{2}k_{eq}\Delta l_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}\Delta l_i$$

Problema di: Dinamica - $D0108$

Testo *[D0108]* [2 2 2a]
La scala graduata di un dinamometro ha una portata massima $P = 1\,N$ ed è lunga $h = 20\,cm$. Attaccando al dinamometro un oggetto di massa $m = 50\,g$ e lasciandolo libero, calcola la frequenza dell'oscillazione che ne consegue.

Spiegazione Un problema sul moto armonico e sull'equilibrio. Le informazioni sullo strumento permettono di conoscere le caratteristiche della sua molla interna. Il resto ne è diretta conseguenza.

Svolgimento Un dinamometro è sostanzialmente una molla. Appendendo ad esso un oggetto esso oscilla di moto armonico con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dove k è la costante elastica della molla. Le caratteristiche tecniche dello strumento ci permettono di risalire a tale costante in quanto sappiamo che se appendiamo un oggetto dal peso $P = 1\,N$ esso si allunga di $\Delta l = 20\,cm$ e quindi

$$k = \frac{P}{\Delta l}$$

Quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta l}{P}}$$

ù

Problema di: Dinamica - $D0109$

Testo *[D0109]* [3½ 4 2a]
Una sbarra di lunghezza $L = 1\,m$ e massa $m = 2\,kg$ è appesa ad un chiodi in una delle sue due estremità. Agiscono sulla sbarra due forze orizzontali $F_1 = 10\,N$ ed $F_2 = 40\,N$, una delle quali posizionata all'estremità opposta rispetto al chiodo. La sbarra rimane ferma in posizione verticale. Indica la posizione dell'ultima forza ed il valore della reazione vincolare.

Spiegazione Un problema di equilibrio rotazionale e traslazionale. Non dimenticate la forza di gravità sulla sbarra. Avendo indicato la massa della sbarra il problema vi sta chiedendo di non trascurarla.

Svolgimento [...]

Problema di: Dinamica rotazionale - $D0110s$

Testo *[D0110]* [4 8 3a]
Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2\,kg$ ed $m_2 = 1\,kg$. La carrucola cilindrica ha massa $M = 4\,kg$. I cavi non scivolano sulla carrucola. La macchina si trova dentro un ascensore che accelera verso l'alto con accelerazione $a = 5\,\frac{m}{s^2}$. Calcola l'accelerazione dei due corpi appesi nel sistema di riferimento dell'ascensore e nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio. Calcola inoltre le tensioni dei fili. Assumi pure che l'accelerazione di gravità della Terra sia $g = 10\,\frac{m}{s^2}$. *[Walter Lewin problem #16]*

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. La carrucola ha un momento di inerzia ed una massa quindi rientra nel sistema di equazioni che definisce il problema. Il tutto si trova in un ascensore che accelera verso l'alto. Quindi bisogna tenere conto di ciò che accade nel sistema di riferimento non inerziale dell'ascensore.

Svolgimento La migliore spiegazione possibile è nel video riportato qui sotto.

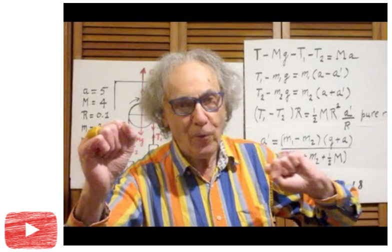


Fig. 5.10: *Guarda il video youtu.be/elDZwKCKQzs*

Problema di: Dinamica - $D0111s$

Testo *[D0110]* [3 8 3a]
Un carrello è libero di oscillare senza attrito attaccato ad una molla di costante elastica K. Il carrello vuoto oscilla con un periodo $T = 10\,s$. Lo stesso carrello caricato con un peso di $m = 10\,kg$, oscilla con un periodo $T_c = 12\,s$. Quanto vale la massa del carrello? Quanto vale la costante elastica della molla?

Spiegazione Parliamo dell'oscillazione di un corpo di massa M collegato ad una molla.

Svolgimento Sappiamo che il periodo di oscillazione di un corpo di massa M, in questo caso il nostro carrello, collegato ad una molla di costante elastica K è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

In modo analogo possiamo scrivere

$$T_c = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \\ T_c = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}} \end{cases}$$

Quindi, elevando al quadrato entrambe le equazioni e dividendo la seconda equazione con la prima, otteniamo

$$\begin{cases} T^2 = 4\pi^2\frac{M}{K} \\ \frac{T_c^2}{T^2} = \frac{M+m}{M} \end{cases}$$

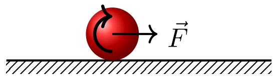
$$\begin{cases} K = 4\pi^2\frac{M}{T^2} \\ M\left(\frac{T_c^2}{T^2} - 1\right) = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = m\dfrac{T^2}{(T_c^2 - T^2)} = 50\,kg K = 4\pi^2\dfrac{M}{T^2} = 2\pi^2\,\dfrac{N}{m} \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - $D0112s$

Testo *[D0112]* [4 4 3a]

Una sfera di raggio $r = 0,3\,m$ e massa $m = 2\,kg$, rotola senza strisciare su di un piano orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale $F = 70\,N$ applicata nel baricentro. Calcola la sua accelerazione. Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico con il piano?



Spiegazione Un esercizio in cui semplicemente applichiamo le leggi della dinamica. Magari è complesso, ma non concettualmente.

Svolgimento Oltre alla forza F agisce la forza di attrito statico dalla parte opposta. La ruota rotola senza strisciare, quindi vale la condizione di puro rotolamento. Infine, la forza di attrito statico genera un momento di una forza che causa l'accelerazione angolare della ruota. Quindi possiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ a = \alpha r \\ F_{as} \cdot r = I\alpha \end{cases}$$

Svolgiamo tutti i passaggi. Per prima cosa ricaviamo α dalla seconda equazione e sostituiamola nella terza.

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \\ F_{as} \cdot r = I\dfrac{a}{r} \end{cases}$$

Successivamente ricaviamo la forza di attrito statica e la sostituiamo nella prima.

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - I\dfrac{a}{r^2} = ma \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \end{cases}$$

A questo punto ricaviamo l'accelerazione dalla prima

$$\begin{cases} F = a\left(\dfrac{I}{r^2} + m\right) \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{\left(\dfrac{I}{r^2} + m\right)} = F\dfrac{r^2}{(I + mr^2)} \\ \alpha = \dfrac{a}{r} \\ F_{as} = I\dfrac{a}{r^2} \end{cases}$$

Ed infine sostituiamo l'accelerazione nelle altre due.

$$\begin{cases} a = F\dfrac{r^2}{(I + mr^2)} \\ \alpha = F\dfrac{r}{(I + mr^2)} \\ F_{as} = F\dfrac{I}{(I + mr^2)} \end{cases}$$

Considerando che l'oggetto è una sfera, e quindi $I = \dfrac{2}{5}mr^2$, il sistema diventa

$$\begin{cases} a = F\dfrac{r^2}{\left(\dfrac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)} = F\dfrac{r^2}{\left(\dfrac{7}{5}mr^2\right)} = \dfrac{5}{7}\dfrac{F}{m} \\ \alpha = \dfrac{5}{7}\dfrac{F}{mr} \\ F_{as} = F\dfrac{\dfrac{2}{5}mr^2}{\left(\dfrac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)} = \dfrac{2}{7}F \end{cases}$$

La forza di attrito statico che effettivamente agisce sulla sfera è

$$F_{as} = 20\,N$$

. La massima forza di attrito che il piano può sviluppare è

$$F_{as-max} = \mu_s mg$$

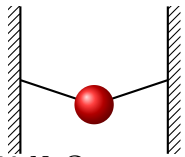
da cui ricaviamo il coefficiente di attrito statico

$$\mu_s mg > F_{as}$$

$$\mu_s > \frac{F_{as}}{mg} = 1,02$$

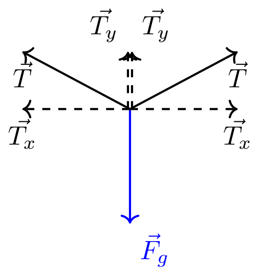
Problema di: generalità - dinamica - $ID0001$

Testo *[ID0001]* [2 2 1a]



A due chiodi messi alla stessa altezza viene legata una corda. Al centro della corda viene appeso un oggetto. La corda assume quindi una forma a V. Sulla corda c'è una tensione $T = 1700\,N$; La componente orizzontale di tale forza vale $T_x = 1500\,N$. Quanto vale la massa dell'oggetto?

Spiegazione Abbiamo una corda che sostiene un peso. La forza di gravità spinge verso il basso; la corda deve spingere verso l'alto con una forza uguale in modulo. La corda spinge in diagonale; spinge cioè dal punto dove è attaccato il peso, verso il punto dove è attaccato il chiodo. Abbiamo quindi due forze, chiamate *Tensione*, che hanno una componente verticale ed una orizzontale. Le due componenti orizzontali si annullano tra loro perché sono opposte; le due componenti verticali si sommano e rappresentano la forza che sostiene il peso.



Svolgimento Utilizziamo il teorema di Pitagora per calcolare la componente verticale della tensione del filo.

$$T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \sqrt{1700^2\,N^2 - 1500^2\,N^2} = 800\,N$$

Imponendo la condizione di equilibrio traslazionale

$$F_g = 2 \cdot T_y$$

$$m \cdot g = 2 \cdot T_y$$

$$m = \frac{2 \cdot T_y}{g} = \frac{1600\,N}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 163,3\,kg$$

Problema di: generalità - dinamica - $ID0002$

Testo *[ID0002]* [1½ 1½ 4a]
Un peso di massa $m = 10\,kg$ è sostenuto e tenuto fermo da due corde sottoposte rispettivamente a tensione $T_1 = 80\,N$ e $T_2 = 50\,N$. Quale angolo si forma tra le due corde?

Spiegazione In questo problema la condizione di equilibrio impone che la somma delle forze sia nulla.

Svolgimento Essendo le due tensioni ad un angolo θ, la loro somma deve essere calcolata utilizzando il teorema di Carnot. Tale somma deve essere uguale alla forza di gravità sulla massa. Dal teorema di Carnot avremo:

$$m^2 g^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos(180° - \theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{m^2g^2 - T_1^2 - T_2^2}{2T_1T_2} = -\frac{704}{8000}$$

$$\theta = 85°$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0001$

Testo *[CD0001]* [3 5 1a]

Per un tempo $\Delta t = 4\,s$, un oggetto di massa $m = 20\,kg$ viene spinto partendo da fermo da una forza $F = 100\,N$ strisciando su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,1$. Successivamente $\vec{F}$ si annulla. Quanta strada avrà percorso prima di fermarsi?

Spiegazione Un oggetto sta strisciando spinto da una certa forza; l'attrito lo frena. In questo primo momento l'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato, aumentando progressivamente la sua velocità. Nel momento che la forza che lo spinge sparisce, rimane soltanto l'attrito che frena l'oggetto fino a farlo fermare.

Svolgimento

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

1. Quanto valgono la forza di gravità e di attrito che agiscono sull'oggetto?
2. Quanto valgono la forza totale che spinge l'oggetto e la sua accelerazione?
3. Quanto spazio avrà percorso e a quale velocità sta viaggiando alla fine dell'intervallo di tempo?
4. Con quale accelerazione si muove quando $\vec{F}$ si annulla, e dopo quanto tempo si ferma?
5. Quanta strada fa l'oggetto prima di fermarsi?

1. La forza di gravità che agisce sull'oggetto è
$$F_g = mg = 20\,kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} = 196\,N$$
2. La forza d'attrito che subisce l'oggetto è
$$F_a = \mu F_g = 0,1 \cdot 196\,N = 19,6\,N$$
3. La forza totale che spinge l'oggetto è
$$F_{tot1} = 100\,N - 19,6\,N = 80,4\,N$$
4. L'accelerazione dell'oggetto è
$$a_{tot} = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{80,4\,N}{20\,kg} = 4,02\frac{m}{s^2}$$
5. Alla fine del primo intervallo di tempo avrà percorso
$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \Delta t^2 + V_{i1}\Delta t = 32,2\,m$$
6. Alla fine del primo intervallo di tempo viaggia alla velocità
$$V_{f1} = a_1 \cdot \Delta t + V_{i1} = 16,1\,\frac{m}{s}$$
7. La velocità finale nel primo tratto di strada corrisponde alla velocità iniziale nel secondo tratto di strada
$$V_{f1} = V_{i2}$$
8. Quando la forza F si annulla la forza totale è quella di attrito, quindi
$$a_2 = \frac{F_a}{m} = -0,98\,\frac{m}{s^2}$$
9. Si ferma dopo
$$\Delta t_2 = \frac{\Delta V_2}{a} = \frac{0 - V_{i2}}{a_2} = 65,6\,s$$
10. L'oggetto avrà percorso
$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \Delta t_2^2 + V_{i2}\Delta t_2 = 131,9\,m$$
11. La distanza complessiva percorsa è quindi
$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 32,2\,m + 131,9\,m = 164,1\,m$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0002$

Testo *[CD0002]* [2 3 1a]
In un giorno di sole, un'automobile sta percorrendo una curva di raggio $r = 48\,m$. Sapendo che il coefficiente di attrito tra la gomma e l'asfalto asciutto vale $\mu = 0,6$, a quale velocità massima può viaggiare senza uscire di strada? In caso di pioggia, il coefficiente di attrito scende fino al valore $\mu = 0,4$; a quale velocità deve scendere l'autista per rimanere in strada?

Spiegazione Nel muoversi in curva la macchina subisce la forza centrifuga, che, al fine di non avere incidenti, deve essere contrastata dalla forza di attrito dei pneumatici sull'asfalto. Se le due forze sono almeno uguali, la macchina riesce a seguire la curva. Attenzione soltanto al significato dei valori che otterrete: tali valori sono calcolati teoricamente e rappresentano i valori massimi... non certo quelli di sicurezza. Bastano infatti piccole e semplici variazioni nell'inclinazione della strata o nella qualità dell'asfalto o nella qualità della pulizia del suolo stradale, che i reali valori di sicurezza per le velocità dell'auto sono sicuramente più bassi.

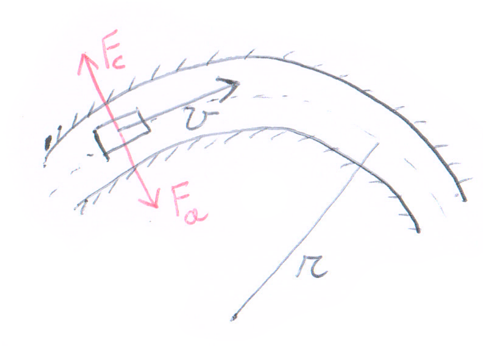


Fig. 5.11: *Un'auto in curva*

Svolgimento La forza centrifuga sull'auto deve essere uguale alla forza di attrito generata dal peso dell'auto sull'asfalto asciutto.

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = \mu m g$$

Semplificando la massa e risolvendo per trovare la velocità avremo (indicando con il simbolo $_a$ il caso di asfalto asciutto):

$$\mathcal{V}_a = \sqrt{\mu g r} = 16,8\,\frac{m}{s} = 60,5\,\frac{km}{h}$$

Ripetendo esattamente gli stessi conti nel caso di asfalto bagnato avremo (indicando con il simbolo $_b$ il caso di asfalto bagnato):

$$\mathcal{V}_b = \sqrt{\mu g r} = 13,7\,\frac{m}{s} = 49,4\,\frac{km}{h}$$

Se analizziamo adesso il fatto che la massa dell'auto non rientra nel problema, in quanto si semplifica nei conti, possiamo affermare che questi conti rimangono validi per qualunque automobile.

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0003$

Testo *[CD0003]* [3 4 3a]
Un ciclista sulla sua bicicletta ha massa complessiva $m = 60\,kg$ e nel rettilineo (con la bicicletta in posizione verticale) il suo baricentro si trova ad altezza $h = 100\,cm$ da terra. Il ciclista affronta poi una curva con velocità $V = 10\,\frac{m}{s}$ inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto alla verticale. Calcola il momento della forza di gravità che tende a far cadere il ciclista, ed il momento della forza centrifuga che lo mantiene in equilibrio. Calcola il raggio della curva che percorre.

Spiegazione Una bicicletta, mentre si muove in un rettilineo, è in posizione verticale. Se percorre una curva, deve inclinarsi. Guardando la bicicletta da dietro e considerando il punto di appoggio delle ruote sull'asfalto, se si muove troppo piano la bicicletta ruota in senso orario e cade; se si muove troppo veloce la bicicletta ruota in senso antiorario, si raddrizza e poi cade dalla parte opposta. La rotazione oraria che fa cadere la bici verso l'interno della curva è data dal momento della forza di gravità; la rotazione antioraria è invece data dal momento della forza centrifuga.

Svolgimento Il momento della forza di gravità vale

$$M_{F_g} = F_g \cdot h \cdot sen(\alpha) = 60\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,m \cdot sen(30°) = 294\,Nm$$

Per mantenere la bicicletta in equilibrio il momento della forza centrifuga deve essere uguale a quello della forza di gravità, in quanto i due momenti sono opposti.

$$M_{F_c} = 294\,Nm$$

Ma sappiamo anche che

$$M_{F_c} = F_c \cdot h \cdot sen(\alpha)$$

da cui

$$Fc = \frac{M_{F_c}}{h \cdot sen(90° - \alpha)} = \frac{294\,Nm}{1\,m \cdot 0,866} = 339,5\,N$$

Visto che conosciamo la forza centrifuga e la velocità della bicicletta, allora possiamo risalire al raggio della curva

$$r = \frac{mV^2}{F_c} = \frac{60\,kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2}}{339,5\,N} = 17,7\,m$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0004$

Testo *[CD0004]* [2 3 1a]
Faccio roteare un mazzo di chiavi attaccato ad un cordino, con una frequenza $\nu = 4\,Hz$, in modo che il cordino descriva la superficie di un cilindro. Il raggio del cerchio percorso dalle chiavi, su un piano orizzontale, è $r = 0,2\,m$; a quale velocità angolare ruotano le chiavi? Se le chiavi hanno una massa $m = 0,1\,kg$, quanto vale la tensione il cordino?

Spiegazione Il mazzo di chiavi è sottoposto a due accelerazioni, quella centrifuga e quella di gravità, perpendicolari tra loro.

Svolgimento La velocità angolare del mazzio di chiavi è

$$\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3,14 \cdot 4\,Hz = 25,13\,\frac{rad}{s}$$

La forza centrifuga vale

$$F_c = m\omega^2 r = 0,1\,kg \cdot (25,13)^2\,\frac{rad^2}{s^2} \cdot 0,2\,m = 12,63\,N$$

La forza di gravità vale

$$F_g = mg = 0,1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 0,98\,N$$

La forza totale, pari alla tensione del cordino, sarà quindi

$$F_{tot} = T = \sqrt{F_c^2 + F_g^2} = \sqrt{(12,63\,N)^2 + (0.98\,N)^2} = 12,67\,N$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0005$

Testo *[CD0005]* [2 2 1a]
Caronte, satellite di Plutone, ruota intorno ad esso con un'orbita circolare di raggio $r = 19571\,km$ in un tempo $T = 6,3872\,giorni$. Quanto vale la massa di Plutone?

Spiegazione Caronte compie un'orbita che assumiamo essere circolare e quindi si muove di moto circolare uniforme. L'accelerazione centripeta necessaria a tale movimento è data dall'attrazione gravitazionale tra i due oggetti.

Svolgimento Impostiamo il problema affermando che la forza centripeta su Caronte è data dalla legge di gravitazione universale

$$M_C \cdot \omega^2 \cdot r = G\frac{M_C \cdot M_P}{r^2}$$

dove M_C e M_P sono le masse di Caronte e Plutone, r è il raggio dell'orbita di Caronte, ω è la velocità angolare del moto di Caronte e G la costante di gravitazione universale.

Svolgendo i passaggi algebrici avremo

$$M_P = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G}$$

$$M_P = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot G}$$

dove T è il periodo di rivoluzione di Caronte. Facciamo le opportune conversioni:

$$r = 19571\,km = 19571000\,m$$

$$T = 6,3872\,giorni = 6,3872 \cdot 24 \cdot 3600\,s = 551854\,s$$

A questo punto è possibile inserire i dati

$$M_P = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot (19571000\,m)^3}{(551854\,s)^2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}}$$

$$M_P = 1,45 \cdot 10^{22}\,kg$$

Questo risultato vale se ipotizziamo inoltre che Plutone abbia una massa molto maggiore di Caronte, cosa non corretta. In tal caso la massa calcolata è in realtà la massa del sistema Plutone + Caronte.

Problema di: Dinamica - $CD0005a$

Testo *[CD0005a]* [2 2 1a]
Un satellite orbita circolarmente ad un'altezza $h = 500\,km$ dalla superficie terrestre. Calcola velocità ed periodo dell'orbita.

Spiegazione Il satellite in questione sta percorrendo un'orbita circolare la cui forza centripeta è data dalla forza di gravità del pianeta Terra.

Svolgimento Indichiamo con M_T la massa della Terra; con m la massa del satellite, con $R_T = 6371\,km$ il raggio della Terra; con $r = R_T + h = 6871\,km$ la distanza del satellite dal centro della Terra; con V la velocità del satellite. Essendo qui la forza di gravità una forza di tipo centripeto possiamo scrivere

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{V^2}{r}$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}\,kg}{6,871 \cdot 10^6\,m}} = 7613\,\frac{m}{s}$$

Il periodo dell'orbita sarà quindi

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi \cdot 6871 \cdot 10^3\,m}{7613\,\frac{m}{s}} = 5671\,s$$

Problema di: Dinamica - $CD0005b$

Testo *[CD0005b]* [2 3 1a]
Sapendo che Venere orbita intorno al Sole ad una distanza $R = 1,08 \cdot 10^{11}\, m$, con periodo $T = 0,615\, anni$, calcola la massa del Sole.

Spiegazione Qui abbiamo un sistema fatto da un pianeta che orbita di moto circolare uniforme attorno al Sole, quindi la forza di gravità dovuta al sole è una forza di tipo centripeto.

Svolgimento Il periodo di rivoluzione del pianeta è $T = 0,615 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\, s = 19394640\, s$

Essendo che il pianeta ha un moto circolare uniforme possiamo scrivere:

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{\mathcal{V}^2}{r}$$

La velocità del pianeta è

$$\mathcal{V} = \frac{2\pi r}{T}$$

per cui

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r}$$

Semplificando

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,26 \cdot 10^{33}\, m^3}{6,67 \cdot 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 3,762 \cdot 10^{14}\, s^2} = 2 \cdot 10^{30}\, kg$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - $CD0006$

Testo *[CD0006]* [3 3 3a]
Immaginate un tunnel che attraversi tutto il pianeta Terra (ipotizzandola come una sfera perfetta ed omogenea) passando per il suo centro. Se lasciamo cadere un oggetto nel tunnel, di che tipo di moto si muoverà?

Spiegazione Per capire di che tipo di moto si muove, bisogna costruirsi la legge oraria del moto. Dobbiamo quindi capire quale accelerazione subisce l'oggetto.

Svolgimento Immaginiamo che l'oggetto si trovi ad una certa distanza r dal centro della terra. La forza che agisce sull'oggetto è la forza di gravità generata su di esso dalla sola massa che si trova a distanze dal centro della Terra minori di quella dell'oggetto. Il guscio sferico esterno infatti non contribuisce. Quindi, indicando con m la massa dell'oggetto e con M la massa della porzione di Terra a distanze dal centro inferiori a quella dell'oggetto, avremo

$$\vec{F} = -G\frac{m \cdot M}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{4}{3}\pi\rho r\vec{u}_r$$

Il segno meno indica che l'accelerazione è sempre rivolta verso il centro della Terra, e quindi opposta al versore $\vec{u}_r$.

Dall'equazione per l'accelerazione si deduce che il moto deve essere di tipo armonico.

Problema di: Dinamica - $CD0008$

Testo *[CD0008]* [2 3 1a]
Sapendo che un satellite orbita intorno ad un pianeta ad una distanza R, con periodo $T = 150\,giorni$, quanto vale il periodo di rotazione di un satellite che ruota intorno allo stesso pianeta ad una distanza $R_2 = 4\,R$?

Spiegazione Il satellite in questione sta percorrendo un'orbita circolare la cui forza centripeta è data dalla forza di gravità del pianeta intorno al quale orbita.

Svolgimento Indichiamo con M la massa del pianeta; con m la massa del satellite, con R il raggio dell'orbita; con $\mathcal{V}$ la velocità del satellite e con T il periodo di rivoluzione. Essendo qui la forza di gravità una forza di tipo centripeto possiamo scrivere

$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{\mathcal{V}^2}{R}$$

da cui

$$V^2 = \frac{GM}{R}$$

Il periodo dell'orbita sarà

$$T = \frac{2\pi r}{\mathcal{V}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\mathcal{V}^2}$$

Unendo le due equazioni avremo

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2 R^3}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

Consideriamo adesso il secondo satellite che orbita a distanza R_2; possiamo scrivere

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 R_2^3}{GM}$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 4^3 \cdot R^3}{GM} = 4^3 T^2$$

da cui

$$T_2 = 8T = 8 * 150\,giorni = 1200\,giorni$$

Problema di: Dinamica - $CD0009$

Testo *[CD0009]* [3 2 2a]
Un sistema binario di stelle è formato da due stelle di massa $M_1 = 2\,M_s$ ed $M_2 = 8\,M_s$. Sapendo che la massa del nostro Sole è $M_s = 2 \cdot 10^{30}\,kg$ e che le due stelle mantengono tra loro una distanza costante $d = 2 \cdot 10^{10}\,m$, quanto vale il periodo di rotazione del sistema?

Spiegazione Il sistema è formato da due stelle che ruotano con lo stesso periodo intorno al baricentro del sistema. La forza che tiene insieme le due stelle è ovviamente la forza di gravità.

Svolgimento Le due stelle compiono un moto circolare uniforme intorno al baricentro del sistema. Il problema si risolve con un sistema di tre equazioni: le prime due indicano la forza centripeta che muove le stelle; la seconda indica che la somma dei due raggi di rotazione è pari alla distanza tra le due stelle.

$$\begin{cases} G\dfrac{M_1 M_2}{d^2} = M_1\dfrac{\mathcal{V}_1^2}{r_1} \\ G\dfrac{M_1 M_2}{d^2} = M_2\dfrac{\mathcal{V}_2^2}{r_2} \\ r_1 + r_2 = d \end{cases}$$

Introduciamo il periodo di rotazione, ovviamente uguale per le due stelle

$$\begin{cases} G\dfrac{M_2}{d^2} = \dfrac{4\pi^2 r_1}{T^2} \\ G\dfrac{M_1}{d^2} = \dfrac{4\pi^2 r_2}{T^2} \\ r_1 + r_2 = d \end{cases}$$

Sappiamo che i due corpi ruotano intorno al baricentro del sistema, per cui

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

$$M_1 r_1 = M_2\,(d - r_1)$$

$$r_1 = \frac{dM_2}{M_1 + M_2}$$

Quindi

$$G\frac{M_2}{d^2} = \frac{4\pi^2 dM_2}{T^2 \cdot (M_1 + M_2)}$$

$$G\frac{(M_1 + M_2)}{d^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

da cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G\,(M_1 + M_2)}}$$

$$T = 486572\,sec = 5,63\,giorni$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0011$

Testo *[CD0011]* [2 3 1a]
La Terra ha la forma di un ellissoide con semiassi maggiori dal centro all'equatore $a = 6378135\,m$, e minore dal centro ai poli $b = 6356750\,m$. Calcola l'accelerazione di gravità ai poli e all'equatore.

Spiegazione La Terra non è una sfera, quindi i punti all'equatore non hanno la stessa distanza dal centro rispetto ai due poli. Inoltre la Terra ruota sul suo asse, quindi un corpo all'equatore sente anche l'accelerazione centrifuga dovuta al moto di rotazione intorno all'asse.

Svolgimento Per una persona ai poli, avremo

$$g_{max} = G\frac{M}{b^2} = 6,67408 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24}\,kg}{(6356750\,m)^2} = 9,8637\,\frac{m}{s^2}$$

Per una persona ai poli, avremo la composizione di due contributi diversi: l'attrazione gravitazionale del pianeta e la forza centrifuga della rotazione dello stesso. Detta ω la velocità angolare del pianeta e T il periodo di rotazione, avremo

$$g_{min} = G\frac{M}{a^2} - \omega^2 a = G\frac{M}{a^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}a$$

$$g_{min} = 6,67408 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24}\,kg}{(6378135\,m)^2} - \frac{4\pi^2}{(23,9345 \cdot 3600\,s)^2} \cdot 6378135\,m$$

$$g_{min} = 9,79769\,\frac{m}{s^2} - 0,03391\,\frac{m}{s^2} = 9,76378\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0012$

Testo *[CD0012]* [3 3 1a]
Da una mongolfiera di massa $M = 170\,kg$ cade un oggetto di massa $m = 10\,kg$. Quanto sarà distante dalla mongolfiera dopo un tempo $\Delta t = 1\,s$?

Spiegazione La mongolfiera inizialmente ferma lascia cadere un corpo che verrà tirato verso il basso dalla forza di gravità. Come conseguenza, ma non per il terzo principio della dinamica, anche la mongolfiera subisce una forza verso l'alto pari alla forza di gravità sull'oggetto. La forza totale, infatti, inizialmente era nulla.

I due oggetti si muovono di moto uniformemente accelerato in verso opposto.

Svolgimento L'accelerazione di gravità con cui il corpo cade e la forza di gravità che subisce sono

$$g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$$

$$F_g = mg = 98\,N$$

Considerato che la forza sull'oggetto sarà uguale alla forza sulla mongolfiera, e considerato che adesso la massa complessiva della mongolfiera è diminuita, l'accelerazione con cui si muove la mogolfiera verso l'alto vale

$$a = \frac{F}{M-m} = \frac{98\,N}{160\,kg} = 0,61\,\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione con cui la mongolfiera vede cadere l'oggetto, risulta quindi

$$a_{rel} = g + a = 10,42\,\frac{m}{s^2}$$

Nell'intervallo di tempo trascorso i due oggetti si sono quindi allontanati di

$$\Delta S = \frac{1}{2}a_{rel}\Delta t^2 = 5,21\,m$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0013$

Testo *[CD0013]* [4 4 3a]

Due satelliti ruotano intorno alla Terra con orbite circolari complanari di verso opposto. Sapendo che le due orbite hanno raggio $r_1 = 2R_T$ ed $r_2 = 3R_T$, ogni quanto tempo i due satelliti si trovano sulla verticale dello stesso luogo?

Spiegazione I due satelliti viaggiano a velocità differenti su orbite di lunghezza differente. Per poter paragonare i due moti è necessario utilizzare la velocità angolare dei due moti.

Svolgimento I due satelliti si muovono in verso opposto e per ritornare allineati devono percorrere complessivamente un intero giro dell'orbita. Quindi

$$2\pi = \omega_1 \cdot \Delta t + \omega_2 \cdot \Delta t$$

Un satellite in orbita circolare subisce come forza centripeta la forza di gravità

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}}$$

per cui avremo

$$\Delta t = \frac{1}{2\pi} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{GM}}{2\pi\sqrt{R_T^3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{1}{27}}\right)$$

$$\Delta t = ...$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0014$

Testo *[CD0014]* [4 4 3a]

Un galleggiante di forma cilindrica, di base S ed altezza H, appesantito sul fondo, galleggia in posizione verticale in acqua, immerso per un'altezza h_i. Spostato leggermente in basso, e poi rilasciato, comincia a oscillare nell'acqua. Quanto vale il periodo dell'oscillazione?

Spiegazione Per dimostrare che il moto è oscillatorio, scriviamo l'equazione del moto e vediamo che ha la forma

$$a = -\omega^2 x$$

Svolgimento Nella condizione di equilibrio, la forza di gravità è uguale alla forza di Archimede

$$mg = \rho_{H_2O} g S h_{imm}$$

Se immergiamo il galleggiante di una quantità x, la forza totale che agisce sul galleggiante sarà

$$mg - \rho_{H_2O} g S (h_{imm} + x) = ma$$

quindi

$$\rho_{H_2O} g S h_{imm} - \rho_{H_2O} g S h_{imm} - \rho_{H_2O} g S x = ma$$

$$-\rho_{H_2O} g S x = ma$$

$$a = -\frac{\rho_{H_2O} g S}{m} x$$

Da qui si capisce che il moto è armonico, quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_{H_2O} g S}}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0015$

Testo *[CD0015]* [3 3 3a]
Un oggetto di massa $m = 10\,kg$ è appoggiato su di una piattaforma rotante di raggio $R = 2\,m$, e con coefficienti di attrito dinamico e statico pari a $\mu_d = 2$ e $\mu_s = 5$, ad una distanza $r = 5 \cdot 10^{-2}\,m$ dall'asse di rotazione. Qual é la minima frequenza necessaria per mettere in movimento l'oggetto?

Spiegazione Nel sistema di riferimento dell'oggetto, la forza centrifuga spinge verso l'esterno, mentre la forza di attrito statico mantiene l'oggetto in equilibrio.

Svolgimento Per mettere in moto l'oggetto inizialmente fermo, è necessario che la forza centrifuga sia almeno uguale alla massima forza di attrito statico.

$$m\omega^2 r \geq \mu_s m g$$

$$4\pi^2 r \nu^2 \geq \mu_s g$$

$$\nu \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_s g}{r}}$$

A questo punto possiamo inserire i valori ed ottenere il risultato

$$\nu \geq \frac{1}{6,28}\sqrt{\frac{49\,\frac{m}{s^2}}{0,05\,m}} = 4,98\,Hz$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0015a$

Testo *[CD0015a]* [3 3 3a]
Un oggetto di massa $m = 10\,kg$ è appoggiato su di una piattaforma rotante di raggio $R = 2\,m$, e con coefficienti di attrito dinamico e statico pari a $\mu_d = 2$, ad una distanza $r = 5 \cdot 10^{-2}\,m$ dall'asse di rotazione. Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico per permettere alla piattaforma di ruotare con una frequenza $\nu = 6\,Hz$?

Spiegazione Nel sistema di riferimento dell'oggetto, la forza centrifuga spinge verso l'esterno, mentre la forza di attrito statico mantiene l'oggetto in equilibrio.

Svolgimento Per mantenere fermo l'oggetto, è necessario che la forza centrifuga sia minore della massima forza di attrito statico.

$$m\omega^2 r < \mu_s m g$$

$$4\pi^2 r \nu^2 < \mu_s g$$

$$4\pi^2 r \nu^2 < \mu_s g$$

$$\mu_s > \frac{4\pi^2 r \nu^2}{g}$$

A questo punto possiamo inserire i valori ed ottenere il risultato

Problema di: Cinematica e Dinamica - $CD0016$

Testo *[CD0016]* [3 3 3a]
Un sistema binario di stelle è formato da due stelle tra loro distanti $d = 10^{10}\, km$ e di massa rispettivamente $M_1 = 5\, M_s$ ed $M_2 = 20\, M_s$, con $M_s = 2 \cdot 10^{30}\, kg$ la massa del sole. Calcola il periodo di rotazione del sistema nell'ipotesi di orbite circolari.

Spiegazione Le due stelle, a causa dell'attrazione gravitazionale, ruotano attorno al centro di massa del sistema.

Svolgimento La forza di gravità che le fa attrarre è

$$F = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Calcolando la posizione del baricentro troviamo quanto dista la prima stella dista dal centro di massa.

$$x_b = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

Mettendoci nel sistema di riferimento del baricentro abbiamo $x_b = 0$ e quindi

$$M_1 x_1 + M_2 x_2$$

$$x_1 = -\frac{M_2}{M_1} x_2$$

in termini di valore assoluto della distanza, le distanze sono definite positive, e quindi

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1} r_2$$

ipotizziamo orbite circolari, le quali preservano nel tempo la distanza tra le due stelle che il testo ipotizza costante.

Quindi

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{M_2}{M_1} r_2 \\ d = r_1 + r_2 \end{cases}$$

e risolvendo

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} d \\ r_2 = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} d \end{cases}$$

Il periodo di rotazione del sistema equivale ai periodi di rotazione delle due stelle che sono ovviamente uguali. Considerando la prima stella, sappiamo che la forza che subisce è di tipo centripeto, quindi possiamo scrivere

$$M_1 \omega^2 r_1 = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{M_2}{M_1 + M_2} d = G\frac{M_2}{d^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M_1 + M_2}{d^3}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G\,(M_1 + M_2)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G\,(M_1 + M_2)}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{10^{39}\, m^3}{6,674 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 50 \cdot 10^{30}\, kg}} = 2\pi\sqrt{3 \cdot 10^{14}\, s^2} = 3,44 \cdot 10^9\, s = 109,4\, anni$$

Problema di: Cinematica - $CD0017$

Testo *[CD0017]* [2½ 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 100\,g$ viene appeso ad una molla, la quale di conseguenza si allunga di $\Delta l = 20\,cm$. Se l'oggetto viene spostato e poi lasciato libero, con quale frequenza oscilla?

Spiegazione L'oggetto è in equilibrio. Con questa informazione possiamo calcolare la costante elastica della molla e di conseguenza calcolare la frequenza del moto armonico.

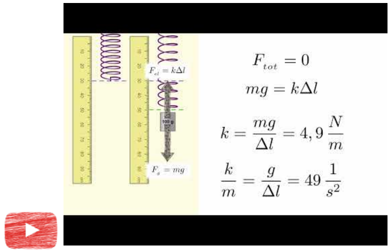


Fig. 5.12: *Guarda il video youtu.be/GcJv0Ghg-Ks*

Svolgimento Sull'oggetto appeso agiscono due forze: la forza di gravità $F_g = mg$ verso il basso e la forza elastica $F_{el} = k\Delta l$ verso l'alto.

Considerando l'equilibrio iniziale avremo che la forza totale è nulla

$$F_{tot} = 0$$

$$mg = k\Delta l$$

dalla cui equazione ricaviamo la costante elastica della molla

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = 4,9\,\frac{N}{m}$$

Da questa espressione possiamo anche ricavare il rapporto tra la costante elastica e la massa appesa

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l} = 49\,\frac{1}{s^2}$$

Il periodo del moto armonico è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,898\,s$$

La frequenza del moto armonico è

$$\nu = \frac{1}{T} = 1,114\,Hz$$

Problema di: Cinematica - Dinamica $CD0018$

Testo *[CD0018]* [2½ 3 3a]
Un oscillatore armonico, formato da una molla e da un corpo di massa $m = 1\,kg$, oscilla tra una posizione minima ed una massima distanti tra loro $h = 10\,cm$. Il periodo dell'oscillazione è $T = 2\,s$. Calcolate la massima accelerazione subita dal corpo.

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo in sequenza le formule del moto armonico generato da una molla, ed i principi della dinamica.

Svolgimento Per prima cosa possiamo trovare la costante elastica della molla dal periodo del moto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = \frac{T^2 m}{4\pi^2} = 0,1\,\frac{N}{m}$$

L'ampiezza dell'oscillazione è

$$A = \frac{h}{2} = 5\,cm$$

L'accelerazione massima del corpo è quindi

$$a = \frac{kA}{m} = 0,005\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - Energia - Momento angolare$G0001$

Testo *[G0001]* [4 5 3a]
Un satellite di massa m sta compiendo un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M a distanza r_1. Per passare ad un'orbita circolare di raggio r_3 compie una manovra chiamata *trasferimento alla Hohmann* che consiste nel modificare la sua velocità al fine di entrare in un'orbita ellittica di trasferimento, con perigeo r_{2p} e apogeo r_{2a}. Raggiunto l'apogeo il satellite modifica nuovamente la sua velocità e si immette nell'orbita circolare di raggio r_3. Calcola le velocità U_1 e U_3 del satellite nelle due orbite circolari, e le due velocità U_{2p} e U_{2a} del satellite al perigeo ed all'apogeo dell'orbita di trasferimento. Calcola quanto tempo dura il trasferimento tra le due orbite. Calcola quanta energia serve per compiere il trasferimento.

Spiegazione Il problema si suddivide in tre fasi. La prima fase mentre il satellite si muove di moto circolare uniforme intorno alla Terra. La seconda fase nella quale il satellite segue un'orbita ellittica. La terza fase nella quale il satellite ritorna a seguire un'orbita circolare. I dati del problema, oltre alla massa del pianeta, sono i valori dei raggi delle orbita circolari minore e maggiore. L'orbita ellittica ha come apogeo e perigeo i valori dei due raggi delle orbite circolari.

Svolgimento [...]

Cominciamo a considerare l'orbita circolare inferiore di raggio r_1. Possiamo scrivere

$$G\frac{Mm}{r_1^2} = m\frac{U_1^2}{r_1}$$

e ricavare la velocità del satellite in quell'orbita

$$U_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

Lo stesso calcolo ci permette di trovare la velocità dell'orbita circolare superiore

$$U_3 = \sqrt{\frac{GM}{r_3}}$$

Analizziamo adesso l'orbita ellittica intermedia Sicuramente valgono sia la legge di conservazione dell'energia che la legge di conservazione del momento angolare.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m\mathcal{V}_{2p}^2 - G\dfrac{M\,m}{r_{2p}} = \dfrac{1}{2}m\mathcal{V}_{2a}^2 - G\dfrac{M\,m}{r_{2a}} \\ m\mathcal{V}_{2p}r_{2p} = m\mathcal{V}_{2a}r_{2a} \end{cases}$$

dalle quali otteniamo

$$\mathcal{V}_{2p} = \mathcal{V}_{2a}\frac{r_{2a}}{r_{2p}}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - G\frac{M}{r_{2p}} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2 - G\frac{M}{r_{2a}}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - 1\right) = GM\left(\frac{1}{r_{2p}} - \frac{1}{r_{2a}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - 1\right) = 2G\,M\left(\frac{1}{r_{2p}} - \frac{1}{r_{2a}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2 - r_{2p}^2}{r_{2p}^2}\right) = 2G\,M\left(\frac{r_{2a} - r_{2p}}{r_{2a}r_{2p}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2 = 2G\,M\left(\frac{r_{2p}}{r_{2a}\left(r_{2a} + r_{2p}\right)}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2 = G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_{2p}}{r_{2a}}\right) == G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_1}{r_3}\right)$$

e quindi

$$\mathcal{V}_{2p}^2 = G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)$$

Leggi di conservazione: soluzioni — Scheda 6

Problema di: Meccanica - $L0001$

Testo *[L0001]* [1 2 2a]
Un corpo di massa $m = 50\,kg$ viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_i = 10\frac{m}{s}$. Ad un certo punto viene spinto da una forza $F = 100\,N$ per una distanza $\Delta S = 24\,m$ nella stessa direzione e nello stesso verso del movimento. Calcola la velocità finale del corpo.

Spiegazione L'oggetto sta viaggiando ad una certa velocità, quindi ha energia cinetica. L'azione della forza è quella di fare un lavoro sull'oggetto, cioè dargli dell'energia in modo da far aumentare la sua energia cinetica.

Svolgimento

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Prova a rispondere, nell'ordine, alle seguenti domande:

1. Quanto lavoro ha fatto la forza? Quel lavoro è negativo o positivo?
2. Quanta energia cinetica ha l'oggetto all'inizio e dopo l'azione della forza?
3. A quale velocità finale viaggia l'oggetto?

1. Il lavoro fatto dalla forza è
$$L = F\,\Delta S = 100\,N \cdot 24\,m = 2400\,J$$
2. Le energie cinetiche dell'oggetto all'inizio e alla fine sono
$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 50\,kg \cdot 100\frac{m^2}{s^2} = 2500\,J$$
$$E_{cf} = E_{ci} + L = 4900\,J$$
3. Per trovare la velocità finale dell'oggetto scriveremo
$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{2E_{cf}}{m}} = 14\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Meccanica - $L0001a$

Testo *[L0001a]* [1 2 2a]
Un corpo di massa $m = 50\,kg$ viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_i = 10\frac{m}{s}$. Ad un certo punto viene spinto da una forza $F = 100\,N$ per una distanza $\Delta S = 24\,m$ nella stessa direzione ma con verso opposto a quello del movimento. Calcola la velocità finale del corpo.

Spiegazione L'oggetto sta viaggiando ad una certa velocità, quindi ha energia cinetica. L'azione della forza è quella di fare un lavoro sull'oggetto, cioè dargli dell'energia in modo da far aumentare la sua energia cinetica.

Svolgimento

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

Prova a rispondere, nell'ordine, alle seguenti domande:

1. Quanto lavoro ha fatto la forza? Quel lavoro è negativo o positivo?
2. Quanta energia cinetica ha l'oggetto all'inizio e dopo l'azione della forza?
3. A quale velocità finale viaggia l'oggetto?

1. Per calcolare il lavoro della forza è necessario tenere conto anche del verso del vettore forza rispetto al verso del vettore spostamento. Il lavoro fatto dalla forza è quindi
$$L = F\,\Delta S = -100\,N \cdot 24\,m = -2400\,J$$
2. Le energie cinetiche dell'oggetto all'inizio e alla fine sono
$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 50\,kg \cdot 100\frac{m^2}{s^2} = 2500\,J$$
$$E_{cf} = E_{ci} + L = 2500\,J + (-2400\,J) = 100\,J$$

3. Per trovare la velocità finale dell'oggetto scriveremo

$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{2E_{cf}}{m}} = \sqrt{\frac{200\,J}{50\,kg}} = 2\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0003$

Testo *[L0003]* [2 2 2a]

Se lascio cadere un oggetto di massa $m = 1\,kg$ inizialmente fermo da un'altezza $h_i = 8\,m$, e arriva a terra con una velocità $\mathcal{V}_f = 10\,\frac{m}{s}$; quanta energia si è dissipata sotto forma di calore a causa dell'attrito con l'aria?

Spiegazione L'oggetto che cade partendo da fermo, perde energia potenziale gravitazione in quanto diminuisce la sua altezza. Contemporaneamente aumenta l'energia cinetica dell'oggetto e, a causa del lavoro della forza d'attrito con l'aria, viene dissipato del calore. Vale la legge di conservazione dell'energia totale.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia totale

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f + Q$$

Il termine Q è dovuto all'effetto della forza di attrito che converte parte dell'energia cinetica dell'oggetto in calore.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f + Q$$

L'altezza finale raggiunta dall'oggetto è nulla; la velocità iniziale dell'oggetto è nulla.

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + Q$$

da cui troviamo il calore prodotto

$$Q = mgh_i - \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

$$Q = 1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 8\,m - \frac{1}{2} \cdot 1\,kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 28,4\,J$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0004$

Testo *[L0004]* [2 1 2a]
Un oggetto di massa $m = 500\,kg$ striscia su di un piano orizzontale con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$, rallentando a causa delle forze di attrito fino alla velocità $\mathcal{V}_f = 4\,\frac{m}{s}$. Quanta energia è stata dispersa sotto forma di calore?

Spiegazione L'oggetto muovendosi in orizzontale non varia mai la sua energia potenziale gravitazionale. Le forze d'attrito trasformano parte dell'energia cinetica dell'oggetto in calore.

Svolgimento L'energia cinetica iniziale dell'oggetto è

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\,kg\cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 25000\,J$$

L'energia cinetica finale dell'oggetto è

$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\,kg\cdot 16\,\frac{m^2}{s^2} = 4000\,J$$

Il calore prodotto dalle forze d'attrito è quindi

$$\Delta Q = E_{ci} - E_{cf} = 21000\,J$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0005$

Testo *[L0005]* [2 2 2a]
Un oggetto si muove in salita su di un piano inclinato con attrito, con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$, rallentando fino a fermarsi. L'oggetto si è sollevato, rispetto all'altezza iniziale, fino all'altezza $h_f = 3\,m$ e il calore generato dalle forze d'attrito vale $Q = 2\,J$. Calcola la massa dell'oggetto.

Spiegazione L'oggetto, muovendosi sul piano inclinato, perde la sua energia cinetica che viene trasformata in parte in energia potenziale gravitazionale (l'oggetto si trova infatti più in alto) ed in parte in calore (a causa delle forze di attrito). Per questo esercizio vale la legge di conservazione dell'energia; l'applicazione di tale legge ci porterà alla soluzione del problema.

Svolgimento La legge di conservazione dell'energia ci permette di scrivere che l'energia totale iniziale del sistema è uguale all'energia totale finale del sistema:

$$E_{tot-i} = E_{tot-f}$$

Da cui

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f + Q$$

A questo punto bisogna notare che alcuni di questi termini sono nulli. In particolare l'altezza iniziale dell'oggetto $h_i = 0$ in quanto prendiamo come sistema di riferimento proprio l'altezza iniziale dell'oggetto, e la velocità finale dell'oggetto $\mathcal{V}_i = 0$. L'equazione precedente diventa

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = mgh_f + Q$$

da cui

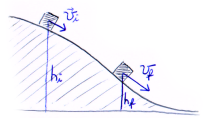
$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 - mgh_f = Q$$

$$m(\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 - gh_f) = Q$$

$$m = \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 - gh_f\right)} = \frac{2\,J}{\frac{1}{2}\cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} - 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 3\,m} = 0,097\,kg = 97\,g$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0006$

Testo *[L0006]* [1 3 2a]



Un blocco di pietra di massa $m = 40\,kg$ scivola lungo una discesa partendo con una velocità iniziale $U_i = 5\,\frac{m}{s}$. All'inizio si trovava all'altezza $h_i = 10\,m$ per poi scendere fino all'altezza $h_f = 2\,m$.

1. Calcola le energie cinetica e potenziale gravitazionale iniziali del blocco.
2. Quanta energia cinetica finale avrebbe il blocco se non ci fosse attrito?
3. Se l'energia cinetica finale del blocco fosse metà di quella iniziale, quanta energia si è persa a causa delle forze d'attrito?

Spiegazione Il blocco di pietra si muove in discesa nel rispetto della legge di conservazione dell'energia totale del sistema. Se le prime due domande semplicemente chiedono di eseguire un conto conoscendo una formula, nella terza domanda si chiede di applicare la legge di conservazione dell'energia in assenza di attrito. Nell'ultima domanda si richiede di fare la stessa cosa ma considerando gli effetti dell'attrito.

Svolgimento Considerati i dati, l'energia cinetica iniziale dell'oggetto vale

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m V_i^2 = 500\,J$$

Considerati i dati, l'energia potenziale gravitazionale iniziale dell'oggetto vale

$$U_i = mgh_i = 3920\,J$$

Considerati i dati, l'energia potenziale gravitazionale finale dell'oggetto vale

$$U_f = mgh_f = 784\,J$$

La legge di conservazione dell'energia, considerando il caso di assenza di attrito, ci permette di affermare che

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

per cui

$$E_{cf} = E_{ci} + U_i - U_f$$

e quindi

$$E_{cf} = 3636\, J$$

Nel caso in cui teniamo conto dell'attrito, l'esercizio ci dice che l'energia cinetica finale dell'oggetto vale $E_{cf} = 250\, J$, per cui

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f + Q$$

per cui

$$Q = E_{ci} + U_i - E_{cf} - U_f$$

e quindi

$$Q = 3386\, J$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0007$

Testo *[L0007]* [2 2 2a]
Un proiettile di massa $m = 15\, g$ è sparato da un fucile, posto al livello del suolo, in diagonale verso l'alto. Al momento dello sparo riceve una spinta $F = 100\, N$ per un tragitto $\Delta S = 60\, cm$ pari alla lunghezza della canna del fucile. Nel punto di massima altezza ha ancora una velocità $\mathcal{V}_f = 20\frac{m}{s}$. Trascuriamo gli effetti dell'attrito con l'aria. A quale altezza è arrivato?

Spiegazione Il proiettile riceve energia all'interno del fucile. Appena ne esce, si muove nell'aria nel rispetto della legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Cominciamo con il convertire la massa del proiettile in $m = 0,015\, kg$.

1. Per calcolare il lavoro delle forze di attrito avremo

$$L = F \cdot \Delta S = 100\, N \cdot 0,6\, m = 60\, J$$

2. Il proiettile, inizialmente fermo nel fucile, aquista energia cinetica in quanto viene fatto su di lui un lavoro. Per cui $E_{ci} = 60\, J$

3. Nel punto di massima altezza

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,015\, kg \cdot 400\, \frac{m^2}{s^2} = 3\, J$$

4. Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$U_f = E_{ci} + U_i - E_{cf} = 57\, J$$

5. Utilizzando la formula dell'energia potenziale gravitazionale

$$h_f = \frac{U_f}{mg} = \frac{57\, J}{0,015\, kg \cdot 9,8\, \frac{m}{s^2}} = 387,76\, m$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0008$

Testo *[L0008]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 5\,kg$ ha un'energia potenziale gravitazionale iniziale $U_i = 100\,J$ e sta cadendo con una velocità $\mathcal{V}_i = 10\frac{m}{s}$. Arrivato all'altezza $h_f = 0\,m$, colpisce e comprime una molla di costante elastica $k = 200\frac{N}{cm}$, inizialmente a riposo. Di quanto si è compressa la molla?

Spiegazione Questo problema tratta di un oggetto che,trovandosi inizialmente ad una certa altezza, ha una certa energia potenziale gravitazionale. Cadendo, per la legge di conservazione dell'energia, trasforma la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e poi, successivamente, la sua energia cinetica in energia potenziale elastica.

Svolgimento

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

1. A quale altezza si trova inizialmente l'oggetto?
2. Quanta energia cinetica ha l'oggetto inizialmente?
3. Quanta energia potenziale gravitazionale ha l'oggetto quando arriva a terra?
4. Quanta energia potenziale elastica ha la molla inizialmente?
5. Quanta energia cinetica ha l'oggetto alla fine del suo movimento?
6. Quanta energia potenziale elastica ha immagazzinato la molla nel momento di massima compressione?
7. Di quanto si è compressa la molla?

1. Conoscendo l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto e la sua massa, avremo che
$$h_i = \frac{U_i}{mg} = \frac{100\,J}{5\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 2,04\,m$$

2. Per l'energia cinetica avremo
$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\,kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 250\,J$$

3. Essendo il terreno ad altezza zero
$$U_f = mgh_f = 0\,J$$

4. La molla inizialmente è del tutto scarica, quindi
$$V_{el.i} = \frac{1}{2}k\,(\Delta l)^2 = 0\,J$$

5. Alla fine della caduta l'oggetto è nuovamente fermo, quindi
$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = 0\,J$$

6. Per la legge di conservazione dell'energia
$$E_{ci} + U_i + V_{el.i} = E_{cf} + U_f + V_{el.f}$$
$$250\,J + 100\,J + 0\,J = 0\,J + 0\,J + V_{el.f}$$
$$V_{el.f} = 350\,J$$

7. Utilizzando infine la formula inversa dell'energia potenziale elastica finale
$$\Delta l^2 = \frac{2V_{el.f}}{k} = \frac{2 \cdot 350\,J}{20000\frac{N}{m}} = 0,035\,m^2$$
$$\Delta l = 0,187\,m = 18,7\,cm$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0009$

Testo *[L0009]* [1 1 2a]
Un motore di potenza $P = 2\,kW$ solleva un oggetto di massa $m = 500\,kg$ da un'altezza $h_i = 2\,m$ fino ad un'altezza $h_f = 32\,m$. Quanto tempo ci impiega?

Spiegazione Il motore in questione, visto che sta sollevando un oggetto, gli sta fornendo energia potenziale gravitazionale. Conoscendo la potenza del motore potremo calcolarci in quanto tempo tale energia viene fornita.

Svolgimento L'energia fornita all'oggetto vale

$$L = \Delta U = U_f - U_i$$

$$L = mgh_f - mgh_i = mg\Delta h = 500\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m = 147000\,J$$

Il tempo impiegato dal motore sarà quindi

$$\Delta t = \frac{L}{P} = \frac{147000\,J}{2000\,Watt} = 73,5\,s$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0009a$

Testo *[L0009a]* [1 1 2a]
In quanto tempo un motore di potenza $P = 30\,W$ può sollevare un oggetto di massa $m = 4\,kg$ di un'altezza $\Delta h = 5\,m$?

Spiegazione Per poter aumentare la sua altezza, l'oggetto deve ricevere energia potenziale gravitazionale. Tale energia viene fornita dal motore.

Svolgimento Applicando la legge di conservazione dell'energia, possiamo affermare che l'energia potenziale gravitazionale iniziale più il lavoro fatto dal motore è uguale all'energia potenziale gravitazionale finale.

$$U_i + L = U_f$$

$$L = U_f - U_i$$

Il lavoro fatto dal motore è dato dalla potenza del motore per il tempo di funzionamento del motore.

$$P \cdot \Delta t = \Delta U$$

$$\Delta t = \frac{mg\Delta h}{P}$$

$$\Delta t = \frac{4\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,m}{30\,W} = 6,53\,s$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0010$

Testo *[L0010]* [2 2 2a]
Un tuffatore salta dalla piattaforma alta $h_i = 10\,m$. Con quale velocità l'atleta entra in acqua?

Spiegazione Durante il tuffo vale la legge di conservazione dell'energia. Il problema si risolve applicando tale legge.

Svolgimento Impostiamo la legge di conservazione dell'energia.

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

Il tuffatore parte da fermo, quindi $\mathcal{V}_i = 0$; consideriamo inoltre il livello dell'acqua ad altezza $h_f = 0$ Avremo quindi

$$mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2$$

Facendo la formula inversa avremo

$$\mathcal{V}_f^2 = \frac{mgh_i}{\frac{1}{2} m} = 2gh_i$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{2gh_i} = 14\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0010a$

Testo *[L0010a]* [2 2 2a]
Da quale altezza deve saltare un tuffatore per entrare in acqua con una velocità $\mathcal{V}_f = 15\,\frac{m}{s}$?

Spiegazione Durante il tuffo vale la legge di conservazione dell'energia. Il problema si risolve applicando tale legge.

Svolgimento Impostiamo la legge di conservazione dell'energia.

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

Il tuffatore parte da fermo, quindi $\mathcal{V}_i = 0$; consideriamo inoltre il livello dell'acqua ad altezza $h_f = 0$ Avremo quindi

$$mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2$$

e quindi

$$h_i = \frac{m \mathcal{V}_f^2}{2mg} = \frac{\mathcal{V}_f^2}{2g} = 11,5\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0010b$

Testo *[L0010b]* [2 2 2a]
Se lascio cadere un oggetto inizialmente fermo da un'altezza $h_i = 8\,m$, con quale velocità arriverà a terra?

Spiegazione L'oggetto che cade partendo da fermo, accelera aumentando la sua velocità. Durante la caduta vale la legge di conservazione dell'energia meccanica; man mano che l'altezza diminuisce, e quindi diminuisce l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto, aumenta l'energia cinetica dell'oggetto, e quindi la sua velocità.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

L'altezza finale raggiunta dall'oggetto è nulla; la velocità iniziale dell'oggetto è nulla.

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

da cui

$$gh_i = \frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2$$

da quest'ultima equazione troviamo la velocità finale dell'oggetto

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{2gh_i} = 12,52\,\frac{m}{s}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Un oggetto di massa $m = 4\,kg$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale con la velocità $\mathcal{V} = 5\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto l'oggetto incontra una molla comprimendola di $\Delta l = 0,2\,m$. Quanto vale la costante elastica della molla? *[$k = 2500\,\frac{N}{m}$]*

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0010c$

Testo *[L0010c]* [2 2 2a]
Quale altezza raggiunge un oggetto lanciato da terra verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 25\,\frac{m}{s}$?

Spiegazione Nel muoversi verso l'alto l'oggetto converte energia cinetica in energia potenziale gravitazionale. Vale infatti la legge di conservazione dell'energia. In questo esercizio trascuriamo gli effetti dell'attrito con l'aria.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia totale

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

La velocità finale raggiunta dall'oggetto è nulla; l'altezza iniziale dell'oggetto è nulla in quanto l'oggetto parte da terra.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = mgh_f$$

$$h_f = \frac{\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2}{mg} = \frac{\mathcal{V}_i^2}{2g} = \frac{625\,\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 31,9\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0010d$

Testo *[L0010d]* [2 2 2a]
Un proiettile viene sparato in aria con la velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 100\,\frac{m}{s}$. Trascurando l'effetto dell'aria, a quale altezza arriverebbe il proiettile?

Spiegazione Il proiettile parte verso l'alto con una certa velocità iniziale e quindi con una certa energia cinetica. Mentre sale, il lavoro della forza di gravità converte tale energia cinetica in energia potenziale gravitazionale. il problema si risolve imponendo la legge di conservazione dell'energia totale.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

L'altezza iniziale dell'oggetto è nulla; la velocità finale dell'oggetto è nulla.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = mgh_f$$

da cui

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 = gh_f$$

da quest'ultima equazione troviamo l'altezza finale dell'oggetto

$$h_f = \frac{\mathcal{V}_i^2}{2g} = 510\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0010e$

Testo *[L0010e]* [2 2 2a]
Un atleta di salto con l'asta durante la sua corsa viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_i = 9\frac{m}{s}$, quanto salterebbe in alto se riuscisse a convertire tutta la sua energia cinetica in energia potenziale gravitazionale?

Spiegazione L'atleta ha energia cinetica a causa della sua corsa. Grazie all'asta riesce a convertire il moto in orizzontale in un moto in verticale e trasformare la sua energia cinetica in energia potenziale gravitazionale. Vale quindi la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

La velocità finale nel punto di massima altezzaa è nulla e quindi è nulla l'energia cinetica finale. L'atleta si trova al suolo, quindi è nulla l'altezza iniziale e di conseguenza è nulla l'energia potenziale gravitazionale iniziale. L'altezza finale raggiunta dall'atleta.

$$mgh_f = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2$$

da cui

$$gh_f = \frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2$$

da quest'ultima equazione troviamo l'altezzi finale

$$h_f = \frac{\mathcal{V}_i^2}{2g} = \frac{81\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 4,13\,m$$

Problema di: Energia - $L0010f$

Testo *[L0010f]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ viene lanciato verso l'alto con una velocità $\mathcal{V}_i = 4\,\frac{m}{s}$ partendo da una certa altezza. Arriva a terra con una velocità $\mathcal{V}_f = 5\,\frac{m}{s}$. Quanta energia potenziale gravitazionale aveva all'inizio? Da quale altezza è partito?

Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia. Bisogna semplicemente applicarla.

Svolgimento In questo problema non si tiene conto dell'effetto dell'attrito con l'aria, quindi le uniche energie in gioco sono l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$U_i = E_{cf} - E_{ci} + U_f = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_f$$

$$U_i = \frac{1}{2}\cdot 2\,kg\cdot 25\,\frac{m^2}{s^2} - \cdot 2\,kg\cdot 16\,\frac{m^2}{s^2} + 2\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 0\,m$$

$$U_i = \frac{1}{2}\cdot 2\,kg\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2} = 9\,J$$

$$h_i = \frac{U_i}{mg} = \frac{9\,J}{2\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 0,46\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0013$

Testo *[L0013]* [2 2 2a]
Un'automobile di massa $m = 1000\,kg$ rallenta in uno spazio $\Delta S = 50\,m$ dalla velocità $\mathcal{V}_i = 20\,\frac{m}{s}$ fino alla velocità $\mathcal{V}_f = 10\,\frac{m}{s}$. Quanto lavoro hanno fatto le forze d'attrito? Quanto valgono le forze d'attrito?

Spiegazione In questo esercizio un'auto si muove ed ha quindi energia cinetica. L'automobile rallenta in quanto la forza d'attrito, facendo un lavoro, converte parte dell'energia cinetica della macchina in calore.

Svolgimento Le energie cinetiche iniziale e finale della macchina sono

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = 500\,kg\cdot 400\,\frac{m^2}{s^2} = 200\,kJ$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = 500\,kg\cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 50\,kJ$$

Dalla legge di conservazione dell'energia, l'energia cinetica iniziale sommata al lavoro delle forze di attrito deve essere uguale all'energia cinetica finale.

$$E_{ci} + L = E_{cf}$$

$$L = E_{cf} - E_{ci} = 50\,kJ - 200\,kJ = -150\,kJ$$

Il lavoro viene giustamente negativo in quanto la forza di attrito è sempre opposta allo spostamento dell'oggetto. La forza di attrito media, considerando che l'angolo tra lo spostamento e la forza è $180°$, sarà

$$F_a = \frac{L}{\Delta S\cdot cos(180°)} = \frac{-150000\,J}{50\,m\cdot(-1)} = 3000\,N$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0014$

Testo *[L0014]* [1 4 2a]
Esercizi *banali*:

1. Quanto lavoro viene fatto su di un oggetto che si é spostato di $\Delta S = 50\,m$ rallentato da una forza d'attrito $F = 100\,N$? [$L = -5000\,J$]
2. Quanto lavoro compie la forza centripeta che fa muovere un oggetto di moto circolare uniforme? [$L = 0\,J$]
3. Quanto consuma una lampadina di potenza $P = 150\,W$ tenuta accesa per un tempo $\Delta t = 2\,h$? [$\Delta E = 300\,J$]
4. Per quanto tempo deve funzionare un motore di potenza $P = 2000\,W$ per poter fornire un'energia $\Delta E = 500\,J$? [$\Delta t = 0,25\,s$]

Spiegazione In questo esercizio ho raccolto tutte quelle domande *banali* che possono essere fatte su questo argomento. Per *banale* si intende un problema nel quale la domanda consiste semplicemente nel fornire dei dati da inserire in una formula. Non è quindi richiesta alcuna particolare capacità di ragionamento, ne particolari doti matematiche. Questo esercizio serve unicamente ad acquisire dimestichezza con l'esecuzione dei conti numerici con le unità di misura.

Svolgimento

1. Tenendo presente che la forza di attrito è sempre opposta al vettore velocità e quindi al vettore spostamento, l'angolo tra i due vettori della formula è $\alpha = 180°$. Per cui

$$L = \vec{F}_x\vec{\Delta S} = F \cdot \Delta S \cdot cos(\alpha) = 100\,N \cdot 50\,m \cdot cos(180°) = -5000\,J$$

2. Una forza centripeta è sempre perpendicolare al vettore velocità e quindi al vettore spostamento, l'angolo tra i due vettori della formula è $\alpha = 90°$. Per cui

$$L = \vec(F)x\vec{\Delta S} = F \cdot \Delta S \cdot cos(\alpha) = 100\,N \cdot 50\,m \cdot cos(90°) = 0\,J$$

3. Utilizzando la formula della potenza:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 150\,W \cdot 3600\,s = 540000\,J = 540\,kJ$$

4. Utilizzando la formula della potenza:

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{500\,J}{2000\,W} = 0,25\,s$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0015$

Testo *[L0015]* [2 3 2a]
Un pallone di massa $m = 0,4\,kg$ si trova ad una altezza $h_i = 1\,m$ da terra e viene calciato verticalmente verso l'alto alla velocità $\mathcal{V}_i = 15\,\frac{m}{s}$. A quale altezza arriva il pallone? Se il pallone avesse avuto una massa doppia a quale altezza sarebbe arrivato?

Spiegazione Questo è un esercizio guidato, nel quale i vari passaggi che si farebbero in un normale esercizio sono qui presentati come singole domande. Il pallone si trova ad una certa altezza ed ha quindi una certa energia potenziale gravitazionale; parte anche verso l'alto con una certa velocità iniziale ed ha quindi una certa energia cinetica. Visto che parte verticalmente, nel punto di massima altezza sarà fermo.

Svolgimento

Traccia di lavoro: ***prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.***

1. Quanta energia cinetica e quanta energia potenziale gravitazionale ha il pallone all'inizio?
2. Quanto vale l'energia totale che ha quel pallone?
3. Quanta energia cinetica e quanta energia potenziale gravitazionale ha il pallone nel punto di massima altezza?
4. A quale altezza arriva il pallone?
5. Se il pallone avesse avuto una massa doppia a quale altezza sarebbe arrivato?

Rispondiamo alle domande una alla volta:

1. L'energia cinetica iniziale è

$$E_{ci} = \frac{1}{2}mV_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4\,kg \cdot 225\,\frac{m^2}{s^2} = 45\,J$$

L'energia potenziale gravitazionale è

$$U_i = mgh_i = 0,4\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,m = 3,9\,J$$

2. Visto che nel sistema c'è un solo oggetto che ha solo energia cinetica e potenziale gravitazionale, allora l'energia totale del sistema è

$$E_{tot} = U_i + E_{ci} = 48,9\,J$$

3. Nel punto di massima altezza il pallone è fermo e quindi ha energia cinetica pari a zero

$$E_{cf} = 0$$

Per la legge di conservazione dell'energia, il pallone ha energia potenziale gravitazionale finale pari a

$$U_f + E_{cf} = U_i + E_{ci}$$
$$U_f = 48,9\,J$$

4. Conoscendo l'energia potenziale gravitazionale finale posso conoscere l'altezza raggiunta

$$h_f = \frac{U_f}{mg} = \frac{48,9\,J}{0,4\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 12,5\,m$$

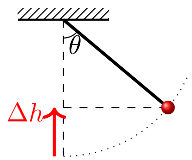
5. Nella legge di conservazione dell'energia si semplifica la massa dell'oggetto che è quindi ininfluente sul risultato dell'altezza raggiunta

$$U_f + E_{cf} = U_i + E_{ci}$$
$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$
$$m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i\right) = m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f\right)$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i = \frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0017$

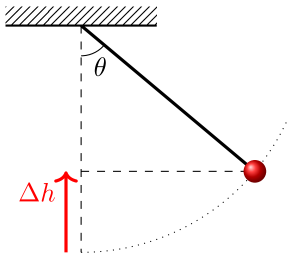
Testo *[L0017]* [2 2 2a]

Un pendolo formato da un filo di lunghezza $l = 1\,m$ ed una massa legata al fondo, viene inclinato in modo da sollevare la massa di $\Delta h = 10\,cm$, e viene tenuto inizialmente fermo. Con quale velocità il pendolo viaggerà quando la massa avrà raggiunto la sua minima altezza?



Spiegazione Questo problema è concettualmente identico al problema di un oggetto in caduta libera. Mentre il peso scende, il lavoro della forza di gravità converte l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto in energia cinetica.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia



$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

Sappiamo che la velocità iniziale è nulla e conosciamo il valore del dislivello $\Delta h = h_f - h_i$, per cui

$$-\left(mgh_f - mgh_i\right) = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

$$-mg\Delta h = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

$$-2g\Delta h = \mathcal{V}_f^2$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{-2g\Delta h}$$

Se la massa era stata sollevata di $\Delta h = 10\,cm$, allora essa è poi scesa di $\Delta h = -10\,cm$. Sostituendo i valori nella formula avremo

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{-2 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (-10\,cm)} = 1,4\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0018$

Testo *[L0018]* [2 2 2a]

Di quanto viene compressa una molla di costante elastica $k = 100\,\frac{N}{m}$ se a comprimerla è un oggetto di massa $m = 49\,kg$ lanciato orizzontalmente alla velocità $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$?

Spiegazione Questo problema è concettualmente identico al problema di un oggetto in caduta libera, con l'unica differenza determinata dal fatto che invece dell'energia potenziale gravitazionale dovremo tenere conto dell'energia potenziale elastica della molla.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + V_{ei} = E_{cf} + V_{ef}$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_f^2$$

La molla inizialmente è scarica, mentre l'oggetto, quando ha compresso completamente la molla, è fermo.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}k\Delta l_f^2$$

da cui semplificando posso calcolare la variazione di lunghezza della molla

$$m\mathcal{V}_i^2 = k\Delta l_f^2$$

$$\Delta l_f = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathcal{V}_i$$

$$\Delta l_f = \sqrt{\frac{49\,kg}{100\,\frac{N}{m}}}\,10\,\frac{m}{s} = 7\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0018a$

Testo *[L0018a]* [2 2 2a]
Su di una catapulta viene posizionata una pietra di massa $m = 30\,kg$, comprimendo di $\Delta l = 50\,cm$ una molla di costante elastica $k = 6000\frac{N}{m}$. A quale velocità viaggia la pietra nel momento in cui viene lanciata?

Spiegazione Una catapulta funziona secondo il principio per cui prima viene immagazzinata energia nella *molla* (in generale un qualunque dispositivo elastico) e poi rilasciata al proiettile sotto forma di energia cinetica.

Svolgimento L'energia potenziale elastica immagazzinata inizialmente è

$$V_{el-i} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2} \cdot 6000\frac{N}{m} \cdot 0,25\,m^2 = 750\,J$$

L'energia cinetica del proiettile a lancio effettuato sarà esattamente quella immagazzinata dalla molla

$$E_{c-f} = V_{el-i} = 750\,J$$

Dalla formula inversa dell'energia cinetica

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{1500\,J}{30\,kg}} = 7,07\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0021$

Testo *[L0021]* [1 1 2a]
Quanta energia devo dare ad un oggetto di massa $m = 2\,kg$ che si muove con velocità $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$ per fargli raddoppiare la velocità?

Spiegazione Un oggetto si muove e quindi ha energia cinetica. L'energia da dare sarà la differenza tra l'energia cinetica finale e quella iniziale.

Svolgimento L'energia cinetica iniziale dell'oggetto vale

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 100\,J$$

L'energia cinetica finale dell'oggetto, quando la velocità è raddoppiata, vale

$$E_{cf} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,kg \cdot 400\,\frac{m^2}{s^2} = 400\,J$$

L'energia da dare vale

$$L = E_{cf} - E_{ci} = 300\,J$$

Esercizi concettualmente identici

1. Quanta energia devo dare ad un oggetto di massa $m = 20\,kg$ per sollevarlo dall'altezza iniziale $h_i = 50\,m$ fino all'altezza $h_f = 75\,m$? *[$\Delta U = 2940\,J$]*
2. Quanta energia devo dare ad un oggetto di massa $m = 20\,kg$ per aumentare la sua velocità da un valore $\mathcal{V}_i = 15\frac{m}{s}$ fino ad un valore $\mathcal{V}_f = 25\frac{m}{s}$? *[$\Delta E_c = 78400\,J$]*
3. Un blocco di cemento di massa $m = 500\,kg$ è tenuto da una gru ad un'altezza $h_i = 10\,m$ e poi appoggiato dentro un pozzo ad una profondità $h_f = -5\,m$ sotto il livello del terreno. Quanto valgono le energie potenziali gravitazionali iniziale e finale del blocco di cemento? Quanta energia potenziale gravitazionale ha acquisito l'oggetto a causa del suo spostamento? *[$U_i = 49000\,J; U_f = -29500\,J; \Delta U = -78500\,J$]*

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0023$

Testo *[L0023]* [1 1 2a]
Un corpo di massa $m = 2\,kg$, sulla cima di una collina, viaggia con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$ ed ha un'energia potenziale gravitazionale $U_i = 1000\,J$. Frenato dalle forze d'attrito, arriva in fondo alla collina ad altezza $h_f = 0\,m$ con una velocità finale $V_f = 20\,\frac{m}{s}$. Di quante volte è aumentata l'energia cinetica *(raddoppiata, triplicata, quadruplicata)*? Quanta energia si è trasformata in calore?

Spiegazione In questo esercizio si applica la legge di conservazione dell'energia. Inizialmente il sistema fisico ha l'energia cinetica e potenziale gravitazionale dell'oggetto. Alla fine il sistema fisico ha l'energia conetica e energia potenziale gravitazionale dell'oggetto ed il calore prodotto dalle forze di attrito. L'oggetto ha perso energia potenziale gravitazionale, la quale è stata trasformata una parte in energia cinetica ed in parte in calore.

Svolgimento Le energie cinetiche iniziali e finali dell'oggetto valgono

$$E_{c-i} = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = 100\,J$$

$$E_{c-f} = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,kg \cdot 400\,\frac{m^2}{s^2} = 400\,J$$

L'energia cinetica è quindi quadruplicata. Inizialmente l'energia totale, calcolata utilizzando i valori iniziali, è

$$E_{tot} = E_{c-i} + U_i = 1100\,J$$

Visto che $h_f = 0\,m$ allora $U_f = mgh_f = 0\,J$. Quindi:

$$Q + E_{c-f} + U_f = E_{tot}$$

$$Q = E_{tot} - E_{c-f} = 700\,J$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0024$

Testo *[L0024]* [4 7 3a]
Ad una molla, di lunghezza a riposo $L_0 = 20\,cm$ e costante elastica $k = 10\,\frac{N}{m}$, viene appeso un oggetto di massa $m = 100\,g$. Dalla posizione di equilibrio raggiunta, l'oggetto viene sollevato di $\Delta x = +5\,cm$. Lasciato libero, fino a quale altezza minima si abbassa?

Spiegazione In questo esercizio bisogna applicare la legge di conservazione dell'energia. Inizialmente il sistema, quando si trova fermo in equilibrio, ha dell'energia poteniale elastica in quanto la molla è allungata rispetyto alla posizione a riposo, ed ha dell'energia potenziale gravitazionale in quanto l'oggetto si trova ad una certa altezza da terra.

Risulta importante in un sistema come questo, la scelta del sistema di riferimento rispetto al quale misuriamo le singole altezze. La scelta più comoda è quella in cui lo zero delle altezze si trova nel punto più in alto in cui viene posizionato il pesino. Per questo motivo, quando lasceremo il pesino libero di cadere, esso oscillerà tra l'altezza zero ed un'opportuna altezza negativa.

Svolgimento Cominciamo con il calcolarci di quanto si allunga la molla sotto l'azione del pesino. In condizioni di equilibrio la forza di gravità verso il basso sarà uguale alla forza elastica verso l'alto

$$F_g = F_{el}$$

$$m \cdot g = k \cdot \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$\Delta l = \frac{0,1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}{10\,\frac{N}{m}} = 0,098\,m = 9,8\,cm$$

Nel nostro sistema di riferimento, il pesino si trova ad altezza zero e poi viene sollevato fino all'altezza iniziale

$$h_i = \Delta x$$

Il problema chiede di trovare l'altezza minima h_f raggiunta dal pesino. Impostiamo la legge di conservazione dell'energia. Definiamo lo stato iniziale come il punto più in alto raggiunto dal pesino. Definiamo come stato finale il punto più in basso raggiunto dal pesino. In entrambi i casi l'energia cinetica del pesino è nulla.

L'energia potenziale gravitazionale è

$$U = m \cdot g \cdot h$$

L'energia potenziale elastica è

$$V = \frac{1}{2}k\left(\Delta l - h\right)^2$$

La legge di conservazione dell'energia diventa

$$m \cdot g \cdot h_i + \frac{1}{2}k\left(\Delta l - h_i\right)^2 = m \cdot g \cdot h_f + \frac{1}{2}k\left(\Delta l - h_f\right)^2$$

$$m \cdot g \cdot (h_i - h_f) = \frac{1}{2}k\left(\Delta l - h_f\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\Delta l - h_i\right)^2$$

$$m \cdot g \cdot (h_i - h_f) = \frac{1}{2}k\left[\left(\Delta l - h_f\right)^2 - \left(\Delta l - h_i\right)^2\right]$$

$$2\frac{m \cdot g}{k}\left(h_i - h_f\right) = \left(\Delta l - h_f + \Delta l - h_i\right) \cdot \left(\Delta l - h_f - \Delta l + h_i\right)$$

$$2\frac{m \cdot g}{k}\left(h_i - h_f\right) = \left(2\Delta l - h_f - h_i\right) \cdot \left(-h_f + h_i\right)$$

$$2\frac{m \cdot g}{k}\left(h_i - h_f\right) - \left(2\Delta l - h_f - h_i\right) \cdot \left(-h_f + h_i\right) = 0$$

$$\left(h_i - h_f\right)\left[2\frac{m \cdot g}{k} - \left(2\Delta l - h_f - h_i\right)\right] = 0$$

$$\left(h_i - h_f\right)\left(2\frac{m \cdot g}{k} - 2\Delta l + h_f + h_i\right) = 0$$

di qui troviamo le due soluzioni per h_f coincidenti con gli stati iniziale e finale del problema

$$\begin{cases} h_i - h_f = 0 \\ 2\frac{m \cdot g}{k} - 2\Delta l + h_f + h_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_f = h_i \\ h_f = -h_i - 2\frac{m \cdot g}{k} + 2\Delta l \end{cases}$$

Se adesso andiamo a riprendere il risultato iniziale sull'equilibrio raggiunto dalla molla con il peso ad essa appeso $\Delta l = \frac{m \cdot g}{k}$ otteniamo

$$\begin{cases} h_f = h_i = +5\,cm \\ h_f = -h_i = -5\,cm \end{cases}$$

Proviamo adesso a rifare lo stesso esercizio mettendo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui l'estremità della molla si trova prima che venga appeso l'oggetto. La formula per l'energia poteniale gravitazionale non cambia, mentre quella per l'energia poteniale elastica diventa:

L'energia potenziale elastica è

$$V = \frac{1}{2}k\left(h\right)^2$$

infatti la coordinata stessa dell'altezza rappresenta anche la variazione di lunghezza della molla. La legge di conservazione dell'energia diventa adesso:

$$m \cdot g \cdot h_i + \frac{1}{2}k\left(h_i\right)^2 = m \cdot g \cdot h_f + \frac{1}{2}k\left(h_f\right)^2$$

$$m \cdot g\left(h_i - h_f\right) = \frac{1}{2}k\left(h_f\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(h_i\right)^2$$

$$\frac{2mg}{k}\left(h_i - h_f\right) = \left(h_f + h_i\right)\left(h_f - h_i\right)$$

$$\frac{2mg}{k}\left(h_i - h_f\right) - \left(h_f + h_i\right)\left(h_f - h_i\right) = 0$$

$$\frac{2mg}{k}\left(h_i - h_f\right) + \left(h_f + h_i\right)\left(h_i - h_f\right) = 0$$

$$\left(h_i - h_f\right)\left[\frac{2mg}{k} + \left(h_f + h_i\right)\right] = 0$$

di qui troviamo le due soluzioni per h_f coincidenti con gli stati iniziale e finale del problema

$$\begin{cases} h_i - h_f = 0 \\ \frac{2mg}{k} + h_f + h_i = 0 \end{cases}$$

Teniamo adesso presente che rispetto alla posizione a riposo della molla, l'altessa iniziale $h_i = -\Delta l + \Delta x$; inoltre vale sempre che l'allungamento della molla dovuto al posizionamento del pesino vale $\Delta l = \frac{mg}{k}$. Avremo quindi:

$$\begin{cases} h_f = h_i = -\Delta l + \Delta x \\ h_f = -h_i - \frac{2mg}{k} = \Delta l - \Delta x - \frac{2mg}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_f = h_i = -\frac{mg}{k} + \Delta x = -4,8\,cm \\ h_f = -\frac{mg}{k} - \Delta x = -14,8\,cm \end{cases}$$

Questi valori di fatto rappresentano gli stessi punti di partenza e di arrivo per l'oscillazione del pesino ottenuti precedentemente. Si vede infatti che i valori di altezza ottenuti sono ricavabili dai precedenti con una semplice traslazione del sistema di riferimento, che è esattamente quello che abbiamo fatto all'inizio.

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0025$

Testo *[L0025]* [1 2 2a]

Un oggetto cade da una certa altezza. Trascuriamo l'effetto dell'aria. Rispondi alle seguenti domande:

- Come variano l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica dell'oggetto? Come varia l'energia totale dell'oggetto?

Consideriamo adesso il caso della presenza dell'aria.

- In che modo la forza di attrito interviene sulle trasformazioni energetiche del fenomeno in questione? Vale ancora la legge di conservazione dell'energia totale?

Spiegazione Durante la caduta di un oggetto, l'energia da esso posseduta subisce una serie di trasformazioni. Per sapere come avvengono tali trasformazioni è sufficiente comprendere i concetti teorici alla base del fenomeno della legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento

- *Come varia l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto?* La formula per l'energia potenziale gravitazionale è $U = mgh$. Diminuendo l'altezza da terra diminuisce l'energia potenziale gravitazionale.

- *Come varia l'energia cinetica dell'oggetto?* Man mano che l'oggetto scende, trasforma la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. L'oggetto va infatti sempre più veloce. L'energia cinetica aumenta.

- *Come varia l'energia totale dell'oggetto?* Per la legge di conservazione dell'energia, l'energia totale di un sistema isolato si conserva.

Consideriamo adesso il caso della presenza dell'aria.

- *In che modo la forza di attrito interviene sulle trasformazioni energetiche del fenomeno in questione?* La forza di attrito trasforma l'energia cinetica dell'oggetto in calore, rallentandolo.

- *Vale ancora la legge di conservazione dell'energia totale?* La legge di conservazione dell'energia totale è sempre valida

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0026$

Testo *[L0026]* [2 2 2a]
Un elastico inizialmente fermo, di massa $m = 40\,g$ e costante elastica $k = 5\,\frac{N}{cm}$, si trova all'altezza $h_i = 2\,m$ e viene lanciato verso l'alto. L'energia necessaria è data dall'elastico stesso essendo stato allungato di $\Delta l = 10\,cm$. A quale altezza arriva l'elastico? .

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia totale. L'energia Porenziale elastica dell'elastico viene convertita in energia cinetica e successivamente l'energia cinetica in energia potenziale gravitazionale.

Svolgimento L'energia potenziale elastica immagazzinata è

$$V_{el-i} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\frac{N}{m}\cdot 0,01\,m^2 = 2,5\,J$$

Nel punto di massima altezza l'elastico sarà fermo, e quindi con $E_{cf} = 0$.
L'elastico si è scaricato dell'energia in esso immagazzinata e quindi $V_{el-f} = 0$.
Per la legge di conservazione dell'energia avremo che

$$U_i + E_{ci} + V_i = U_f + E_{cf} + V_f$$

$$mgh_i + 0 + V_{el-i} = U_f + 0 + 0$$

da cui

$$U_f = mgh_f = 0,04\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 2\,m + 2,5\,J = 3,284\,J$$

L'altezza raggiunta sarà quindi calcolabile utilizzando la formula inversa

$$h_f = \frac{U_f}{m\cdot g} = \frac{3,284\,J}{0,04\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 8,38\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0028$

Testo *[L0028]* [2 2 2a]
Un corpo di massa $m = 4\,kg$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale con velocità $\mathcal{V} = 5\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto esso incontra una molla comprimendola di $\Delta l = 0,2\,m$. Calcola la costante elastica della molla.

Spiegazione L'oggetto che si muove ha energia cinetica; incontrando la molla trasferisce la sua energia alla molla trasformandola in energia potenziale elastica. Vale quindi la legge di conservazi9one dell'energia.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia

$$E_{ci} + V_i = E_{cf} + V_f$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_f^2$$

L'oggetto comprime la molla che inizialmente era scarica. Quando l'oggetto si ferma ha perso tutta la sua energia cinetica in quanto l'ha trasferita alla molla.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}k\Delta l_f^2$$

da cui

$$k = \frac{m \cdot \mathcal{V}_i^2}{\Delta l_f^2}$$

$$k = \frac{4\,kg \cdot 25\,\frac{m^2}{s^2}}{0,04\,m^2} = 2500\,\frac{N}{m}$$

Problema di: Meccanica - $L0029$

Testo *[L0029]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ viene lasciato cadere da una certa altezza. Arrivato a terra, penetra nel terreno per un tratto $d = 0,5\,m$. Assumendo che le forze di attrito con il terreno abbiano un valore medio $F_a = 500\,N$, da quale altezza è caduto l'oggetto?

Spiegazione Questo oggetto cade, quindi perde energia potenziale gravitazionale e la trasforma in energia cinetica. Nel tratto in cui penetra nel terreno, perde ulteriormente energia potenziale gravitazionale, ma a causa del lavoro delle forze di attrito perde anche l'energia cinetica, la quale viene convertita in calore.

Svolgimento La legge di conservazione dell'energia appicata a questo contesto è:

$$U_i + E_{ci} = U_f + E_{cf} + \Delta Q$$

$$mgh_i + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = -mgd + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + F_a \cdot d$$

da cui

$$h_i = \frac{-mgd + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + F_a \cdot d - \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2}{mg}$$

Considerato che l'oggetto parte ed arriva con velocità nulla

$$h_i = -d + \frac{F_a \cdot d}{mg} = d\left(\frac{F_a}{mg} - 1\right)$$

$$h_i = 0,5\,m \cdot \left(\frac{500\,N}{19,6\,N} - 1\right) = 12,26\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0030$

Testo *[L0030]* [2 2 2a]
Un proiettile di massa $m = 5\,g$ viene sparato orizzontalmente contro un bersaglio fisso vicino, penetrando in esso per un tratto $d = 0,5\,m$. Assumendo che le forze di attrito sul proiettile nel bersaglio abbiano un valore medio $F_a = 500\,N$, con quale velocità è stato sparato il proiettile?

Spiegazione Il proiettile si ferma in quanto le forze d'attrito, facendo un lavoro negativo, dissipano l'energia cinetica del proiettile in calore.

Svolgimento Trascuriamo in questo problem sia l'effetto dell'attrito con l'aria, sia quello della caduta del proiettile dovuto alla forza di gravità. L'energia cinetica del proiettile sarà pari al modulo del lavoro della forza di attrito.

$$F \cdot d = \frac{1}{2} m \mathcal{V}^2$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} = \sqrt{10000\,\frac{m^2}{s^2}} = 100\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0031$

Testo *[L0031]* [1 1 2a]
Un blocco di cemento di massa $m = 500\,kg$ è tenuto da una gru ad un'altezza $h_i = 10\,m$ e poi appoggiato dentro un pozzo ad una profondità $h_f = -5\,m$ sotto il livello del terreno. Di quanto è variata l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto a causa del suo spostamento?

Spiegazione Il blocco di cemento cambia la sua altezza e quindi cambia il suo valore di energia potenziale gravitazionale.

Svolgimento L'energia potenziale gravitazionale iniziale dell'oggetto vale

$$U_i = mgh_i = 500\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 10\,m = 49000\,J$$

L'energia potenziale gravitazionale finale dell'oggetto vale

$$U_f = mgh_f = 500\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (-5\,m) = -24500\,J$$

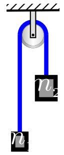
Quindi

$$\Delta U = U_f - U_i = -73500\,J$$

che giustamente è negativa visto che il blocco di cemento sta scendendo.

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0032$

Testo *[L0032]* [2 2 2a]
Ad una macchina di Atwood senza attrito sono appesi due corpi di massa $m_1 = 2\,kg$ e $m_2 = 3\,kg$. Il corpo più leggero è inizialmente fermo appoggiato a terra, mentre quello più pesante si trova a $h = 2\,m$ da terra. Con quale velocità il più pesante toccherà terra?



Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Nell'ipotesi di attriti trascurabili avremo

$$E_{c1-i} + U_{1-i} + E_{c2-i} + U_{2-i} = E_{c1-f} + U_{1-f} + E_{c2-f} + U_{2-f}$$

Inizialmente il sistema è fermo, quindi $E_{c1-i} = E_{c2-i} = 0$. Inoltre il primo corpo si trova a terra con $U_{1-i} = 0$.

$$U_{2-i} = E_{c1-f} + U_{1-f} + E_{c2-f} + U_{2-f}$$

Nello stato finale il secondo corpo si troverà a terra con $U_{2-f} = 0$ mentre il primo si troverà all'altezza h. Mentre i corpi si muovono, essi avranno la stessa velocità visto che sono collegati da una corda inestensibile. Avremo quindi

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1 V_f^2 + m_1gh + \frac{1}{2}m_2 V_f^2$$

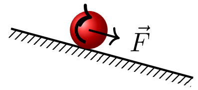
$$(m_2 - m_1)\,gh = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,V_f^2$$

$$V_f^2 = \frac{2\,(m_2 - m_1)\,gh}{(m_1 + m_2)}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{2\,(m_2 - m_1)\,gh}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 2\,m}{5\,kg}} = 2,8\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0033$

Testo *[L0033]* [3 3 3a]
Una sfera di raggio $r = 10\,cm$ rotola senza strisciare lungo un piano inclinato partendo, da ferma, da un'altezza $h_i = 30\,cm$. Quale tipo di attrito determina questa condizione di rotolamento? Con quale velocità arriva alla fine del piano inclinato?



Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia. Considerato che la sfera rotola senza strisciare, per prima cosa dobbiamo considerare anche l'energia cinetica rotazionale, ed in secondo luogo dobbiamo tenere conto che rotolando *senza* strisciare, la velocità angolare di rotolamento è in relazione con la velocità del baricentro.

Svolgimento La condizione di puro rotolamento è determinata dalla presenza di attrito statico tra la sfera ed il piano inclinato.

Per la legge di conservazione dell'energia, la sfera inizialmente ferma ha soltanto energia potenziale gravitazionale. Alla fine del percorso l'oggetto ha perso tutta l'energia potenziale ed ha solo più energia cinetica traslazionale e rotazionale

$$U_i = E_{ci} + E_{ri}$$

$$mgh_i = \frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Nel rotolamento, il punto di appoggio è fermo per un istante, ed il centro della sfera, a distanza r si muove a velocità V. Rispetto al baricentro, il punto di contatto al suolo, sempre a distanza r si muove a velocità opposta di pari modulo V. Quindi la velocità angolare della sfera è

$$\omega = \frac{V}{r}$$

quindi

$$mgh_i = \frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\frac{V_f^2}{r^2}$$

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{5}m\mathcal{V}_f^2$$

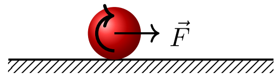
$$mgh_i = \frac{7}{10}m\mathcal{V}_f^2$$

ed infine

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{10}{7}gh_i}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0034$

Testo *[L0034]* [3 3 3a]



Una sfera di raggio $r = 0,1\,m$ e massa $m = 2\,kg$, rotola senza strisciare su di un piano orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale applicata nel baricentro. La velocità iniziale della sfera è nulla, e dopo un percorso $\Delta S = 2\,m$ è $\mathcal{V}_f = 4\,\frac{m}{s}$. Quanto vale la forza F?

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia. Dal momento che parliamo di una sfera che rotola senza strisciare, allora dobbiamo considerare anche l'energia cinetica rotazionale.

Svolgimento Per il teorema dell'energia cinetica

$$L = \Delta E_c = E_{cf} + E_{rf} - E_{ci} - E_{rf}$$

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Sapendo che parliamo di una sfera e che la sfera non striscia ma rotola, allora

$$L = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\mathcal{V}_f^2}{r^2}$$

$$F \cdot \Delta S = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{5}m\mathcal{V}_f^2 = \frac{7}{10}m\mathcal{V}_f^2$$

$$F = \frac{\frac{7}{10}m\mathcal{V}_f^2}{\Delta S} = 11,2\,N$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0035$

Testo *[L0035]* [3 4 3a]
Un oscillatore armonico è realizzato da un corpo di massa m che oscilla orizzontalmente attaccato ad una molla di costante elastica k. Sapendo che ha una velocità $\mathcal{V}_1 = 8\,\frac{m}{s}$ quando si trova a distanza $\Delta l_1 = 4\,m$ dal punto di equilibrio, e una velocità $\mathcal{V}_2 = 2\,\frac{m}{s}$ quando si trova a distanza $\Delta l_2 = 6\,m$ dal punto di equilibrio, determinare la massima distanza dal punto di equilibrio.

Spiegazione In questo problema vogliamo desumere una delle caratteristiche del moto armonico conoscendo velocità e posizione dell'oggetto in due particolari istanti. L'unica cosa che sappiamo con certezza è che in un moto armonico vale la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia, sapendo che alla massima distanza dal punto di equilibrio l'energia cinetica del corpo è nulla, avremo

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\mathcal{V}_1^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_1^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_2^2 \\ \frac{1}{2}m\mathcal{V}_1^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_1^2 = \frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\mathcal{V}_1^2 + k\Delta l_1^2 = m\mathcal{V}_2^2 + k\Delta l_2^2 \\ m\mathcal{V}_1^2 + k\Delta l_1^2 = k\Delta l_{max}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\left(\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\right) = +k\left(\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2\right) \\ \frac{m}{k}\mathcal{V}_1^2 + \Delta l_1^2 = \Delta l_{max}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{k} = \frac{\left(\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2\right)}{\left(\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\right)} \\ \frac{\left(\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2\right)}{\left(\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\right)} \cdot \mathcal{V}_1^2 + \Delta l_1^2 = \Delta l_{max}^2 \end{cases}$$

quindi

$$\frac{\left(\Delta l_2^2\mathcal{V}_1^2 - \Delta l_1^2\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_1^2\Delta l_1^2 - \mathcal{V}_2^2\Delta l_1^2\right)}{\left(\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\right)} = \Delta l_{max}^2$$

$$\frac{\left(\Delta l_2^2\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\Delta l_1^2\right)}{\left(\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2\right)} = \Delta l_{max}^2$$

$$\Delta l_{max}^2 = 80\,m^2$$

$$\Delta l_{max} = 8,94\,m$$

Problema di: Energia - $L0037$

Testo *[L0037]* [3 3 3a]
Un cilindro di raggio $r = 2\,cm$ con un filo lungo $L = 1\,m$ arrotolato intorno ad esso, cade partendo fa fermo. Con quale velocità arriverà al suolo?

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia, tenendo conto che il cilindro nello scendere contemporaneamente rotola sotto la condizione di puro rotolamento.

Svolgimento Applichiamo la legge di conservazione dell'energia.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Considerando che l'oggetto parte da fermo avremo

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Considerando che l'altezza finale è più bassa dell'altezza iniziale esattamente della lunghezza del filo, avremo:

$$mgL = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Imponiamo adesso la condizione di puro rotolamento $\mathcal{V} = \omega r$ e avremo

$$mgL = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\mathcal{V}_f^2$$

$$mgL = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\mathcal{V}_f^2$$

Il momento di inerzia del cilindro è $I = \frac{1}{2}mr^2$, quindi

$$mgL = \frac{3}{4}m\mathcal{V}_f^2$$

$$\frac{4}{3}gL = \mathcal{V}_f^2$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{4}{3}gL} = 3,6\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Energia - $L0038$

Testo *[L0038]* [2 2 2a]
Una scala mobile inclinata di $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale, sposta le persone a velocità $\mathcal{V} = 1\,\frac{m}{s}$. Se ogni persona ha massa $m = 80\,kg$, quale potenza deve avere il motore per sollevare una sola persona?

Spiegazione Applichiamo semplicemente la definizione di Potenza

Svolgimento Ad ogni persona la scala mobile fornisce energia potenziale gravitazionale, quindi

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t}$$

Ogni persona in u intervallo di tempo Δt percorre uno spostamento lineare $\Delta S = \mathcal{V} \cdot \Delta t$ che corrisponde ad un incremento di altezza

$$\Delta h = \mathcal{V} \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha$$

Quindi

$$P = \frac{mg\mathcal{V} \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha}{\Delta t} = mg\mathcal{V} \cdot \sin\alpha = 554\,W$$

Problema di: Energia - $L0038a$

Testo *[L0038a]* [2 2 2a]
Un montacarichi solleva le persone a velocità $\mathcal{V} = 1\,\frac{m}{s}$. Se ogni persona ha massa $m = 80\,kg$, quale potenza deve avere il motore per sollevare una sola persona?

Spiegazione Applichiamo semplicemente la definizione di Potenza

Svolgimento Ad ogni persona la scala mobile fornisce energia potenziale gravitazionale, quindi

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t}$$

Ogni persona in un intervallo di tempo Δt percorre uno spostamento lineare $\Delta S = \mathcal{V} \cdot \Delta t$ che corrisponde ad un incremento di altezza

$$\Delta h = \mathcal{V} \cdot \Delta t$$

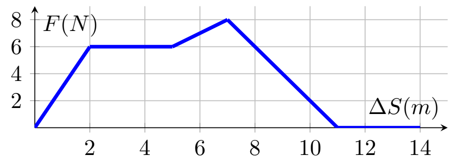
Quindi

$$P = \frac{mg\mathcal{V} \cdot \Delta t}{\Delta t} = mg\mathcal{V} = 784\,W$$

Problema di: Energia - $L0039$

Testo *[L0039]* [2 3 2a]

Un corpo di massa $m = 2\,kg$ si muove lungo una retta, partendo da fermo, sotto l'azione di una forza F come indicato dal seguente grafico *Forza-posizione*. Indica: per quanto tempo la velocità è stata costante, il lavoro fatto dalla forza, la velocità raggiunta.



Spiegazione Per questo esercizio è sufficiente conoscere il concetto di *Lavoro di una forza*

Svolgimento L'oggetto si muove di moto rettilineo uniforme solo se la forza su di lui è costantemente nulla, quindi in questo esercizio dalle 11 alle 14

Il lavoro della forza è l'area sottesa dalla curva che giustamente ha le dimensioni di un'energia.

$$L = 48\,J$$

La velocità raggiunta la si trova con il teorema dell'energia cinetica

$$L = E_{cf} - E_{ci}$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 6,93\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Conservazione dell'energia - $L0040$

Testo *[L0040]* [4 3 3a]

Due sfere di massa $m_1 = 2\,kg$ e $m_2 = 1\,kg$ sono collegate da una sbarra di massa trascurabile lunga $L = 1\,m$ ed inchiodata in un punto a $d = 40\,cm$ dalla massa minore. La sbarra è inizialmente ferma, in equilibrio instabile, con la massa minore verso il basso. Con quale velocità angolare ruota l'asta quando la massa maggiore raggiungerà il punto più basso?

Spiegazione In questo sistema fisico vale la legge di conservazione dell'energia

Svolgimento Indichiamo con h_1 l'altezza della prima massa e con h_2 l'altezza della seconda massa. Applicando la legge di conservazione dell'energia avremo

$$m_1gh_{1i} + m_2gh_{2i} = m_1gh_{1f} + m_2gh_{2f} + \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2$$

$$m_1gh_{1i} - m_1gh_{1f} + m_2gh_{2i} - m_2gh_{2f} = +\frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2$$

$$m_1g\left(h_{1i} - h_{1f}\right) + m_2g\left(h_{2i} - h_{2f}\right) = +\frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2$$

$$2m_1g\left(L-d\right) - 2m_2gd = +\frac{1}{2}\left[m_1\left(L-d\right)^2 + m_2d^2\right]\omega^2$$

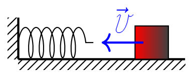
$$2g\left[m_1\left(L-d\right) - m_2d\right] = +\frac{1}{2}\left[m_1\left(L-d\right)^2 + m_2d^2\right]\omega^2$$

$$\left[m_1\left(L-d\right)^2 + m_2d^2\right]\omega^2 = 4g\left[m_1\left(L-d\right) - m_2d\right]$$

$$\omega^2 = \frac{4g\left[m_1\left(L-d\right) - m_2d\right]}{\left[m_1\left(L-d\right)^2 + m_2d^2\right]}$$

Problema di: Dinamica - $L0042$

Testo *[L0042]* [3 3 3a]



Un oggetto di massa $M = 10\,kg$ si muove su di un piano orizzontale con coefficienti di attrito $\mu_s = 4$ e $\mu_d = 2$, verso una molla di costante elastica $K = 10\,\frac{N}{cm}$. Nell'istante in cui tocca la molla esso si muove con velocità $\mathcal{V} = 10\,\frac{m}{s}$. Quanto vale lo schiacciamento che la molla avrà subito quando avrà fatto fermare l'oggetto?

Spiegazione L'oggetto si ferma perché la molla, schiacciandosi, toglie energia cinetica all'oggetto trasformandola in energia potenziale gravitazionale; inoltre la forzxa di attrito toglie energia cinetica all'oggetto trasformandola in calore. Il problema si risolve con la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento per la legge di conservazione dell'energia avremo:

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}K\Delta l^2 + \mu_d mg \cdot \Delta l$$

In questa equazione Δl indica lo schiacciamento della molla ed è definito positivo. Quindi

$$0 = K\Delta l^2 + 2\mu_d mg \cdot \Delta l - m\mathcal{V}_i^2$$

$$\Delta l = \frac{-\mu_d mg \pm \sqrt{\mu_d^2 m^2 g^2 + Km\mathcal{V}_i^2}}{K}$$

a questo punto solo la soluzione positiva è contemplabile, quindi

$$\Delta l = \frac{-\mu_d mg + \sqrt{\mu_d^2 m^2 g^2 + Km\mathcal{V}_i^2}}{K}$$

$$\Delta l = \frac{-196\,N + \sqrt{38416\,N^2 + 10^6\,N^2}}{10\,\frac{N}{cm}} = 82,3\,cm$$

Problema di: Leggi di conservazione - $L0043$

Testo *[L0043]* [4 4 3a]

Un satellite artificiale di massa $m = 500\,kg$, sta orbitando su di un orbita circolare intorno alla Terra ad una altezza $h_i = 100\,km$ sopra la superficie. Al rientro in atmosfera parte della sua energia è dispersa sotto forma di calore a causa dell'attrito con l'aria. Quanta energia è stata trasformata in calore da quando il satellite era in orbita a quando atterra al suolo?

Spiegazione Per la legge di conservazione dell'energia, l'energia meccanica persa dal satellite è stata convertita in calore dalle forze di attrito. Questo problema si risolve semplicemente applicando la legge di conservazione dell'energia

Svolgimento Indicando con R_T il raggio della Terra, chiamiamo r_i la distanza del satellite dal centro della terra, per cui

$$r_i = R_T + h_i$$

ed avremo poi che

$$r_f = R_T$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 - G\frac{M_T m}{r_i} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 - G\frac{M_T m}{r_f} + \Delta Q$$

Essendo il satellite su di un'orbita circolare, avremo

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{\mathcal{V}^2}{r}$$

Inoltre, sulla superficie della Terra, il satellite ruota intorno al centro della Terra con la velocità determinata dalla rotazione della Terra, con periodo $T = 1\,giorno$.

$$\mathcal{V}_f = \frac{2\pi R_T}{T}$$

L'equazione iniziale diventa quindi

$$-\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r_i} = m\frac{2\pi^2 R_T^2}{T^2} - G\frac{M_T m}{R_T} + \Delta Q$$

$$G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{GM_T m}{2r_i} - m\frac{2\pi^2 R_T^2}{T^2} = \Delta Q$$

$$GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r_i}\right) - m\frac{2\pi^2 R_T^2}{T^2} = \Delta Q$$

Problema di: Cinematica - $L0044$

Testo *[L0044]* [1 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si sta muovendo alla velocità $V_i = 10\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto subisce una forza $F_1 = 5\,N$ nella stessa direzione e verso della velocità. Dopo uno spostamento $\Delta S_1 = 50\,m$ la forza cambia e diventa $F_2 = 4\,N$ posta perpendicolarmente alla velocità. Dopo un tempo $\Delta t_2 = 5\,s$, la forza cambia di nuovo e vale $F_3 = 3\,N$ posta nella stessa direzione ma con verso opposto a quello della velocità. L'oggetto si sposta quindi per altri $\Delta S_3 = 20\,m$. Quale velocità avrà il corpo alla fine?

Spiegazione In questo problema una forza agisce su di un oggetto che si sta spostando. Possiamo quindi calcolarci il lavoro di quella forza.

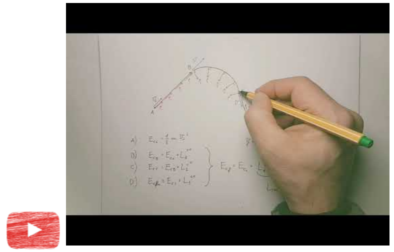


Fig. 6.1: *Guarda il video youtu.be/_2Hu4GcOS9Y*

Svolgimento Nel primo tratto l'angolo tra forza e spostamento è nullo, quindi

$$L_1 = F \cdot \Delta S = 5\,N \cdot 50\,m = 250\,J$$

Nel secondo tratto l'angolo tra forza e spostamento è di $90°$, quindi

$$L_2 = 0$$

Nel terzo tratto l'angolo tra forza e spostamento è di $180°$, quindi

$$L_3 = F \cdot \Delta S = -3\,N \cdot 20\,m = -60\,J$$

Per la legge di conservazione dell'energia, il lavoro fatto dalla forza si somma all'energia cinetica iniziale per dare l'energia cinetica finale.

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + L_{tot}$$

$$\mathcal{V}_f^2 = \mathcal{V}_i^2 + \frac{2L_{tot}}{m} = 100\,\frac{m^2}{s^2} + \frac{2\cdot 190\,J}{2\,kg} = 290\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{V}_f = 17,03\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica - $L0045$

Testo *[L0045]* [2 2 2a]
Una molla di costante elastica $K_1 = 200\,\frac{N}{m}$, schiacciata inizialmente di $\Delta l_{1i} = 0,05\,m$ spinge un oggetto di massa $m = 2\,kg$ il quale poi, muovendosi in orizzontale, viene fermato da una seconda molla di costante elastica $K_2 = 800\,\frac{N}{m}$. Di quanto viene schiacciata la seconda molla?

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia. L'energia accumulata nella prima molla si trasferisce all'oggetto sotto forma di energia cinetica e successivamente i trasferisce alla seconda molla.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i + \frac{1}{2}K_1\Delta l_{1i}^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2i}^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}K_1\Delta l_{1f}^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2f}^2$$

I due termini rappresentanti l'energia cinetica dell'oggetto all'inizio ed alla vine sono nulli, perché l'oggetto parte da fermo e poi alla fine viene fermato dalla seconda molla

$$0 + mgh_i + \frac{1}{2}K_1\Delta l_{1i}^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2i}^2 = 0 + mgh_f + \frac{1}{2}K_1\Delta l_{1f}^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2f}^2$$

La seconda molla all'inizio è scarica, mentre alla fine la prima molla è scarica, quindi

$$0 + mgh_i + \frac{1}{2}K_1\Delta l_{1i}^2 + 0 = 0 + mgh_f + 0 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2f}^2$$

L'oggetto si muove in orizzontale, quindi le energie potenziali gravitazionali sono uguali e si possono semplificare. Alla fine l'equazione si riduce a

$$\frac{1}{2}K_1\Delta l_{1i}^2 = \frac{1}{2}K_2\Delta l_{2f}^2$$

ed otteniamo quindi

$$K_1\Delta l_{1i}^2 = K_2\Delta l_{2f}^2$$

$$\frac{K_1}{K_2}\Delta l_{1i}^2 = \Delta l_{2f}^2$$

$$\Delta l_{2f} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\Delta l_{1i}$$

$$\Delta l_{2f} = \frac{1}{2}\cdot 5\,cm = 2,5\,cm$$

Problema di: Energia - $L0046$

Testo *[L0046]* [2 3 2a]
Un oggetto di massa $m = 10\,kg$ viaggia alla velocità $V_i = 50\,\frac{m}{s}$. Quanto lavoro bisogna fare per portare la velocità a $V_f = 30\,\frac{m}{s}$? Sapendo che l'oggetto ha rallentato in uno spazio $\Delta S = 40\,m$, quanto vale la forza che lo ha fatto rallentare?

Spiegazione Un problema sul teorema dell'energia cinetica... basta semplicemente applicarlo.

Svolgimento Per il teorema dell'energia cinetica avremo

$$L = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}m\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\cdot 10\,kg\left(2500\,\frac{m^2}{s^2} - 900\,\frac{m^2}{s^2}\right) = -8000\,J$$

Il lavoro è negativo, quindi la forza esercitata sul corpo è opposta al suo spostamento

Dalla definizione di lavoro

$$L = F\Delta S\cdot\cos(180°)$$

$$F = \frac{-L}{\Delta S} = \frac{8000\,J}{40\,m} = 200\,N$$

Problema di: Energia - $L0048$

Testo *[L0048]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ viene lasciato cadere lungo un piano inclinato partendo da fermo e da un'altezza $h_i = 4\,m$. Arriva a terra e prosegue su di un piano orizzontale fino a fermarsi. Scrivi la legge di conservazione dell'energia applicata a questo esercizio. Quanto calore è stato generato a causa dell'attrito?

Spiegazione Come suggerisce il problema stesso, la soluzione al quesito la si ottiene applicando la legge di conservazione dell'energia al sistema fisico descritto.

Svolgimento Le energie in gioco in questo problema sono:

- Energia cinetica, perché l'oggetto si muove.
- Energia potenziale gravitazionale, perché l'oggetto si trova ad una certa altezza.
- Calore, in quanto nel problema è presente la forza di attrito che rallenta il moto dell'oggetto.

Per cui

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f + Q$$

Alcune di queste energie sono nulle e quindi le possiamo escludere dall'equazione. L'oggetto parte da fermo, arriva a fermarsi ed arriva a terra.

$$U_i = Q$$

$$Q = mgh_i = 2\,kg \cdot 4\,m \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 78,4\,J$$

Problema di: Energia - $L0049$

Testo *[L0049]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 5\,kg$ si sta muovendo orizzontalmente con velocità $V_i = 20\,\frac{m}{s}$. Viene spinto da una forza $F = 10\,N$ per un tratto $\Delta S = 40\,m$ nella stessa direzione e verso del moto. Sapendo che si sono persi $\Delta Q = 100\,J$ di calore a causa dell'attrito, quanta energia cinetica avrà l'oggetto alla fine? A quale velocità viaggerà?

Spiegazione Utilizziamo in questo esercizio la legge di conservazione dell'energia. All'energia cinetica e potenziale dell'oggetto all'inizio si somma il lavoro fatto dalla forza e si ottiene l'energia totale dell'oggetto. Alla fine della spinta l'energia totale sarà pari alla somma delle energie cinetica e potenziale dell'oggetto e del calore prodotto.

Svolgimento L'energia cinetica dell'oggetto all'inizio è

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m V_i^2 = 1000\,J$$

Il lavoro fatto dalla forza è positivo in quanto la forza è parallela e nello stesso verso dello spostamento

$$L = F \cdot \Delta S = +400\,J$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo:

$$E_{ci} + U_i + L = E_{cf} + U_f + Q$$

Dal momento che l'oggetto si muove orizzontalmente avremo $U_i = U_f$ e quindi

$$E_{cf} = E_{ci} + L - Q = 1300\,J$$

Problema di: Energia - $L0049a$

Testo *[L0049a]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 5\,kg$ si sta muovendo con velocità $\mathcal{V}_i = 20\,\frac{m}{s}$. Viene spinto da una forza $F = 5\,N$ per un tratto $\Delta S = 40\,m$ nella stessa direzione ma in verso opposto verso del moto. Sapendo che si sono persi $\Delta Q = 100\,J$ di calore a causa dell'attrito, quanta energia cinetica avrà l'oggetto alla fine? A quale velocità viaggerà?

Spiegazione Utilizziamo in questo esercizio la legge di conservazione dell'energia. All'energia cinetica e potenziale dell'oggetto all'inizio si somma il lavoro fatto dalla forza e si ottiene l'energia totale dell'oggetto. Alla fine della spinta l'energia totale sarà pari alla somma delle energie cinetica e potenziale dell'oggetto e del calore prodotto.

Svolgimento L'energia cinetica dell'oggetto all'inizio è

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 = 1000\,J$$

Il lavoro fatto dalla forza è positivo in quanto la forza è parallela e nello stesso verso dello spostamento

$$L = F \cdot \Delta S = -400\,J$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo:

$$E_{ci} + U_i + L = E_{cf} + U_f + Q$$

Dal momento che l'oggetto si muove orizzontalmente avremo $U_i = U_f$ e quindi

$$E_{cf} = E_{ci} + L - Q = 500\,J$$

Problema di: Energia - $L0050$

Testo *[L0050]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ viene lasciato cadere, partendo da fermo, da un'altezza $h_i = 20\,m$. Con quale velocità l'oggetto impatta contro il suolo? C'è uno di questi dati del problema che non è necessario per rispondere alla domanda?

Spiegazione Applichiamo la legge di conservazione dell'energia ed arriviamo alla soluzione del problema.

Svolgimento In questo problema le energie da considerare sono soltanto quella cinetica e quella potenziale gravitazionale

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

Mettendo le formule

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

raccogliamo la massa

$$m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i\right) = m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f\right)$$

ora possiamo semplificare la massa che quindi esce dall'equazione

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i = \frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f$$

La velocità di impatto al suolo sarà quindi

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{2gh_f - 2gh_i + \mathcal{V}_i^2} = 19,8\,\frac{m}{s}$$

Qualunque sia il valore della massa esso non influisce sul valore della velocità di impatto

Problema di: Energia - $L0050a$

Testo *[L0050a]* [2 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ viene lanciato verticalmente verso l'alto, partendo da terra, con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 20\,\frac{m}{s}$. A quale altezza arriva l'oggetto? C'è uno di questi dati del problema che non è necessario per rispondere alla domanda?

Spiegazione Applichiamo la legge di conservazione dell'energia ed arriviamo alla soluzione del problema.

Svolgimento In questo problema le energie da considerare sono soltanto quella cinetica e quella potenziale gravitazionale

$$E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f$$

Mettendo le formule

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

raccogliamo la massa

$$m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i\right) = m\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f\right)$$

ora possiamo semplificare la massa che quindi esce dall'equazione

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 + gh_i = \frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 + gh_f$$

La massima altezza raggiunta sarà quindi

$$h_f = h_i + \frac{\mathcal{V}_i^2}{2g} = 20,41\,m$$

Qualunque sia il valore della massa esso non influisce sul valore della velocità di impatto.

Problema di: Energia - $L0051$

Testo *[L0051]* [1 2 2a]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si sta muovendo alla velocità $\mathcal{V}_i = 10\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto subisce una forza $F_1 = 5\,N$ nella stessa direzione e verso della velocità. Dopo uno spostamento $\Delta S_1 = 50\,m$ la forza cambia e l'oggetto comincia a rallentare a causa di una forza $F_2 = 4\,N$ posta nella stessa direzione ma con verso opposto a quello della velocità. L'oggetto si sposta quindi per altri $\Delta S_2 = 20\,m$. Quanta energia cinetica avrà alla fine?

Spiegazione Qui basta applicare il teorema dell'energia cinetica.

Svolgimento Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$E_{cf} = E_{ci} + F_1\Delta S_1 - F_2\Delta S_2 = 100\,J + 250\,J - 80\,J = 270\,J$$

Problema di: Energia - $L0051a$

Testo *[L0051a]* [1 ⭐ 2 ⌛ 2a 📖]
Un oggetto di massa $m = 2\,kg$ si sta muovendo alla velocità $V_i = 10\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto subisce una forza $F_1 = 5\,N$ nella stessa direzione e verso della velocità. Dopo uno spostamento $\Delta S_1 = 50\,m$ la forza cambia e diventa $F_2 = 4\,N$ posta perpendicolarmente alla velocità, ed in questa situazione l'oggetto si sposta per altri $\Delta S_2 = 20\,m$. Quanta energia cinetica avrà alla fine?

Spiegazione Qui basta applicare il teorema dell'energia cinetica.

Svolgimento Dato che la seconda forza non compie lavoro perché perpendicolare allo spostamento, dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$E_{cf} = E_{ci} + F_1 \Delta S_1 = 10\,J + 250\,J = 260\,J$$

Problema di: Energia - $L0052$

Testo *[L0052]* [3 ⭐ 6 ⌛ 3a 📖]
La massa di un pendolo di lunghezza $L = 2\,m$ ha nel punto più basso una velocità $V = 1\,\frac{m}{s}$. Calcola l'angolo dell'oscillazione e la velocità di quella massa ad un angolo pari alla metà dell'angolo di oscillazione.

Spiegazione La massa del pendolo, oscillando, sale e scende in base alla legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Dalla legge di conservazione dell'energia si ottiene la massima altezza raggiunta dal corpo

$$\frac{1}{2} m V_i^2 = mgh_f$$

$$h_f = \frac{V^2}{2g} = 0,05\,m$$

Dalla geometria del sistema si ricava

$$\cos\theta = \frac{L - h_f}{L} = 0,975$$

$$\theta = 12,8^\circ$$

Per la seconda parte del problema calcoliamo a che altezza h'_f arriverà il corpo.

$$\theta = 6,4^\circ$$

$$h'_f = L\,(1 - \cos\theta) = 0,0125\,m$$

ed utilizziamo adesso la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m V_i^2 = mgh'_f + \frac{1}{2} m V_f^2$$

$$V_i^2 = 2gh'_f + V_f^2$$

$$\mathcal{V}_f^2 = \mathcal{V}_i^2 - 2gh'_f = 1\,\frac{m^2}{s^2} - 0,245\,\frac{m^2}{s^2} = 0,755\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{V}_f = 0,495\,\frac{m}{s}$$

La formula completa della velocità in funzione dell'angolo è

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\mathcal{V}_i^2 - 2gL\,(1-\cos\theta)}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0053$

Testo *[L0053]* [3 3 3a]
Una molla di costante elastica K è compressa di $\Delta L = 50\,cm$. Essa spinge una palla da bowling di massa $m = 7\,kg$ inizialmente ferma. Rotolando senza strisciare, la palla percorrerà una rampa che la solleverà di $\Delta h = 1,6\,m$ facendola arrivare alla velocità $\mathcal{V} = 1\,\frac{m}{s}$. Trascurando gli attriti, quanto deve valere la costante elastica della molla?

Spiegazione Questo esercizio si risolve con la legge di conservazione dell'energia. L'energia iniziale è contenuta bella molla. Alla fine la molla è scarica e tutta l'energia è stata trasferita nell'energia cinetica della palla e nella sua energia potenziale gravitazionale.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}k\Delta l_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Dove con $\mathcal{V}$ si intende la velocità del baricentro della sfera. Visto che la palla rotola senza strisciare, avremo la condizione di puro rotolamento

$$\mathcal{V} = \omega r$$

e quindi

$$k\Delta l_i^2 = 2mgh_f + m\mathcal{V}_f^2 + \frac{2}{5}m\mathcal{V}_f^2$$

$$k\Delta l_i^2 = 2mgh_f + \frac{7}{5}m\mathcal{V}_f^2$$

$$k = \frac{10mgh_f + 7m\mathcal{V}_f^2}{5\Delta l_i^2}$$

$$k = \frac{10\cdot 7\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 1,6\,m + 7\cdot 7\,kg\cdot\,\frac{m^2}{s^2}}{5\cdot 0,25\,m^2}$$

$$k = 917\,\frac{N}{m}$$

Problema di: Conservazione dell'energia - $L0054$

Testo *[L0054]* [5 4 3a]
Ad una molla di costante elastica $K = 100\,\frac{N}{m}$ e di massa trascurabile, è appeso un oggetto di massa $m = 2\,kg$. L'oggetto è tenuto inizialmente fermo in modo tale che la molla sia $d_i = 10\,cm$ più corta della sua lunghezza a riposo. Di quanto risulta allungata al massimo la molla se lasciamo l'oggetto libero di cadere? *[Walter Lewin problem* $\#78$*]*

Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Il sistema possiede all'inizio ed alla fine solo energia poenziale gravitazionale ed energia cinetica.

Prendendo come zero delle altezze la posizione che vede la molla a riposo, e indichiamo le altezze crescenti verso l'alto. Avremo

$$mgd_i + \frac{1}{2}Kd_i^2 = mgd_f + \frac{1}{2}Kd_f^2$$

Sappiamo che una delle due soluzioni è $d_f = d_i$, quindi cerchiamo di riportare l'equazione nella forma

$$(d_f - d_i)\,(Ad_f - B) = 0$$

con A è B coefficienti da determinare. La soluzione del problema sarà

$$d_f = \frac{B}{A}$$

Per determinare i coefficienti scriviamo

$$Ad_f^2 - Ad_fd_i - Bd_f + Bd_i = 0$$

per cui

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}K \\ B = -\left(mg + \dfrac{1}{2}Kd_i\right) \end{cases}$$

e quindi

$$d_f = -\frac{2mg + Kd_i}{K} = -2\frac{m\,g}{K} - d_i$$

Con i dati a disposizione abbiamo

$$d_f = -0,1\,m - 2\frac{19,6}{100}\,m = -0,492\,m$$

Problema di: Energia - $L0055$

Testo *[L0055]* [5 5 5a]
Calcola l'energia potenziale gravitazionale nel centro della Terra *[Walter Lewin problem #100]*

Spiegazione Per svolgere in modo corretto questo problema è necessario fare il calcolo integrale seguendo la definizione di energia potenziale in un punto come il lavoro per portare la carica da quel punto all'infinito.

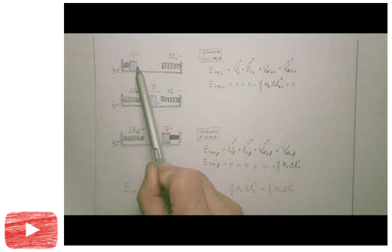


Fig. 6.2: *Guarda il video youtu.be/Rq1uWcv4rCs*

Svolgimento Sappiamo che l'energia potenziale di un corpo sulla superficie del pianeta è data da

$$U_s = -G\frac{M\,m}{R_T}$$

Per un generico punto all'interno della Terra, a distanza $r \leq R_T$ dal centro, l'attrazione gravitazionale che subisce è data solo dalla parte del pianeta al di sotto del punto indicato. Il guscio sferico esterno non contribuisce alla forza di gravità. La forza è quindi

$$F = G\frac{M \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot m}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 r^2}$$

$$F_{int} = G\frac{M \cdot r \cdot m}{R_T^3}$$

L'energia potenziale richiesta è quindi

$$U = \int_0^{R_T} -F_{int}dr + \int_{R_T}^{\infty} -F_{ext}dr$$

Il secondo integrale è l'energia potenziale sulla superficie del pianeta.

Il primo è

$$\int_r^{R_T} -F_{int} dr = \int_0^{R_T} -G\frac{M \cdot r \cdot m}{R_T^3} dr =$$

$$= \left[\frac{-GM \cdot m \cdot r^2}{2R_T^3}\right]_0^{R_T} = \frac{-M \cdot m}{2R_T}$$

Quindi l'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m nel centro di un qualunque pianeta P è

$$U = -\frac{3}{2}\frac{M_P\, m}{R_P^2}$$

Problema di: Dinamica gravitazionale - $L0056$

Testo *[L0056]* [2 3 3a]
Un oggetto viene sparato verticalmente dalla superficie terrestre e raggiunge la distanza massima dalla superficie pari a tre volte il raggio della Terra. Con quale velocità è stato sparato?

Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia per il campo gravitazionale terrestre

Svolgimento Indichiamo con M la massa della Terra e con R il suo raggio. Per la legge di conservazione dell'energia abbiamo che

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 - G\frac{M\,m}{(R)^2} = -G\frac{M\,m}{(4R)^2}$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 = G\frac{15\,M\,m}{16\,(R)^2}$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{G\frac{15\,M}{8\,(R)^2}}$$

Problema di: Oscillatore armonico - $L0057$

Testo *[L0057]* [3 5 3a]
Un corpo di massa $m = 600\,g$ si muove di moto armonico semplice. All'istante iniziale le energie potenziale e cinetica valgono entrambe $E_i = 0,01\,J$. Il periodo del moto è $T = 2\,s$. Determinare la costante elastica della molla, la massima velocità del corpo, l'ampiezza dell'oscillazione.

Spiegazione Un problema sull'oscillatore armonico nel quale, a parte la formula per il periodo dell'oscillatore, è necessario ragionare in termini di conservazione dell'energia.

Svolgimento Il periodo dell'oscillatore è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

quindi

$$k = \frac{mT^2}{4\pi^2} = 6,1 \cdot 10^{-2}\,\frac{N}{m}$$

Sappiamo che l'energia totale dell'oscillatore è la somma della sua energia cinetica e di quella potenziale.

$$E_{tot} = 0,02\,J$$

Nel punto di massima distanza dal punto di equilibrio, cioè quando la distanza corrisponde all'ampiezza dell'oscillazione, e nel quale l'oscillatore ha solo energia potenziale, avremo:

$$\frac{1}{2}kA^2 = E_{tot}$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{k}} = 0,81\,m$$

Lo stesso ragionamento lo possiamo fare per calcolare la velocità massima dell'oggetto scegliendo di lavorare nel punto di equilibrio, nel quale l'oggetto ha solo energia cinetica

$$\frac{1}{2}mU_{max}^2 = E_{tot}$$

$$U_{max} = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}} = 0,26\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Conservazione dell'energia - $L0058$

Testo *[L0058]* [4 5 3a]
Un corpo di massa $m = 2\,kg$ si muove verticalmente. All'istante iniziale le energie potenziale gravitazionale e cinetica valgono entrambe $E_i = 100\,J$ ed il corpo si sta muovendo verso l'alto. Determina dopo quanto tempo il corpo arriva a terra.

Spiegazione Un problema sul moto uniformemente accelerato, con alcuni valori ricavabili dalle informazioni sull'energia.

Svolgimento Poniamo $g = +9,8\,\frac{m}{s^2}$
L'equazione oraria del moto è

$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t$$

Utilizzando le informazioni del problema avremo:

$$mgh_i = E_i$$

$$h_i = \frac{E_i}{mg} = 5,1\,m$$

e successivamente

$$\frac{1}{2}mV_i^2 = E_i$$

$$V_i = \sqrt{\frac{2E_i}{m}} = 10\,\frac{m}{s}$$

Quindi l'oggetto arriverà a terra quando

$$\Delta S = -h_i$$

$$\frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_i\Delta t = -h_i$$

$$-g\Delta t^2 + 2V_i\Delta t + 2h_i = 0$$

$$g\Delta t^2 - 2V_i\Delta t - 2h_i = 0$$

$$\Delta t = \frac{V_i \pm \sqrt{V_i^2 + 8gh_i}}{g}$$

Delle due soluzioni ci interessa quella positiva (infatti la domanda del problema chiede un istante nel futuro).

$$\Delta t = \frac{10 + \sqrt{100 + 8 \cdot 5,1 \cdot 9,8}}{9,8}\,s = 3,3\,s$$

Problema di: Conservazione dell'energia - $L0059$

Testo *[L0059]* [3 5 3a]
Calcola, mostrando come si costruisce l'equazione necessaria, l'energia totale di un oscillatore armonico con ampiezza $A = 1\,cm$ e frequenza $\nu = 20\,Hz$ realizzato da una molla a cui è attaccato un corpo di massa m.

Spiegazione L'energia di un oscillatore armonico è data dalla somma dell'energia cinetica del corpo oscillante e di quella potenziale elastica della molla. Per tale oscillatore conosciamo inoltre la formula per il periodo e quindi per la frequenza.

Svolgimento L'energia totale di un oscillatore armonico è data da:

$$E_{tot} = E_c + V_{el} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 + \frac{1}{2}K\Delta l^2$$

L'energia si conserva, quindi possiamo calcolarla per un qualunque momento dell'oscillazione. Scegliamo il momento in cui l'oscillatore assume la massima distanza dal punto di equilibrio e avremo

$$E_{tot} = 0 + V_{el-max} = \frac{1}{2}KA^2$$

Sappiamo che un oscillatore armonico realizzato con una molla oscilla con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

quindi

$$K = 4\pi^2 m\nu$$

e infine

$$E_{tot} = 2\pi^2 m\nu A^2$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0060$

Testo *[L0060]* [3 3 3a]
Ad una macchina di Atwood senza attrito, con una carrucola cilindrica di massa $m = 0,5\,kg$ e raggio $r = 10\,cm$, sono appesi due corpi di massa $m_1 = 1\,kg$ e $m_2 = 2\,kg$. Il corpo più leggero è inizialmente fermo appoggiato a terra, mentre quello più pesante si trova a $h = 3\,m$ da terra. Con quale velocità il più pesante toccherà terra?

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Nell'ipotesi di attriti trascurabili, ma con carrucola reale con momento di inerzia, avremo

$$E_{c1-i} + U_{1-i} + E_{c2-i} + U_{2-i} + E_{cr-i} = E_{c1-f} + U_{1-f} + E_{c2-f} + U_{2-f} + E_{cr-f}$$

Inizialmente il sistema è fermo, quindi $E_{c1-i} = E_{c2-i} = E_{cr-i} = 0$. Inoltre il primo corpo si trova a terra con $U_{1-i} = 0$.

$$U_{2-i} = E_{c1-f} + U_{1-f} + E_{c2-f} + U_{2-f} + E_{cr-f}$$

Nello stato finale il secondo corpo si troverà a terra con $U_{2-f} = 0$ mentre il primo si troverà all'altezza h. Mentre i corpi si muovono, essi avranno la stessa velocità visto che sono collegati da una corda inestensibile. Inoltre, nell'ipotesi di puro rotolamento, il bordo della carrucola si muoverà alla stessa velocità della corda. Avremo quindi

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1\mathcal{V}_f^2 + m_1gh + \frac{1}{2}m_2\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1\mathcal{V}_f^2 + m_1gh + \frac{1}{2}m_2\mathcal{V}_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_cr^2\right)\frac{\mathcal{V}_f^2}{r^2}$$

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1\mathcal{V}_f^2 + m_1gh + \left(\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}m_c\right) + \mathcal{V}_f^2$$

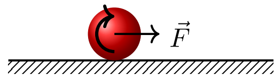
$$(m_2 - m_1)\,gh = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_c\right)V_f^2$$

$$\mathcal{V}_f^2 = \frac{2\,(m_2 - m_1)\,gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_c\right)}$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{2\,(m_2 - m_1)\,gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_c\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,kg \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,m}{3,25\,kg}} = 4,25\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $L0062$

Testo *[L0062]* [3 3 3a]



Una sfera di raggio $r = 0,1\,m$ e massa $m = 2\,kg$, rotola su di un piano orizzontale senza strisciare fino a fermarsi. La velocità iniziale della sfera è $\mathcal{V}_i = 4\,\frac{m}{s}$. Quanto calore si è generato a causa degli attriti?

Spiegazione In questo problema vale la legge di conservazione dell'energia. Dal momento che parliamo di una sfera che rotola senza strisciare, allora dobbiamo considerare anche l'energia cinetica rotazionale.

Svolgimento Per la conservazione dell'energia abbiamo che

$$E_{ci} + E_{ri} = \Delta Q$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\frac{\mathcal{V}_i^2}{r^2} = \Delta Q$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)m\mathcal{V}_i^2 = \Delta Q$$

$$\Delta Q = 22,4\,J$$

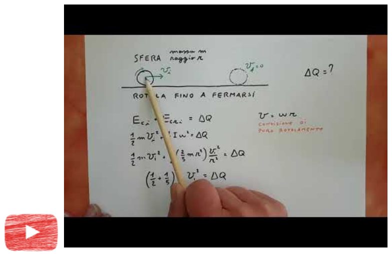


Fig. 6.3: *Guarda il video youtu.be/kiwLZ3gdQCw*

Problema di: Cinematica - $CL0001$

Testo *[CL0001]* [2 3 3a]
Un proiettile viene sparato verso l'alto con una velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 50\,\frac{m}{s}$ inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. A quale altezza arriva?

Spiegazione Questo è un esercizio sul moto parabolico e sulla legge di conservazione dell'energia. Basta avere chiaro cosa sia un moto parabolico e come applicare la legge di conservazione dell'energia per arrivare alla soluzione del problema. L'unica vera difficoltà è nel fatto che i dati danno la velocità iniziale è l'angolo rispetto all'orizzontale.

Svolgimento La componente orizzontale della velocità, costante durante tutto il moto dell'oggetto e quindi uguale alla velocità finale dell'oggetto, è

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_i \cos\alpha = \mathcal{V}_f$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

l'oggetto parte da terra

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2\cos^2\alpha + mgh_f$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 - \frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2\cos^2\alpha = gh_f$$

$$h_f = \mathcal{V}_i^2\frac{1-\cos^2\alpha}{2g}$$

$$h_f = \mathcal{V}_i^2\frac{\sin^2\alpha}{2g}$$

Problema di: Dinamica - $DL0001$

Testo *[DL0001]* [2 2 2a]
Un corpo striscia con velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 20\,\frac{m}{s}$ su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.5$. Quale velocità avrà dopo aver percorso $\Delta S = 30\,m$.

Spiegazione In questo esercizio la forza di attrito che frena l'oggetto, sta convertendo la sua energia cinetica in calore. Vale quindi la legge di conservazione dell'energia totale.

Svolgimento La forza di attrito in questo caso è causata dalla forza di gravità che schiaccia l'oggetto sul piano. Detta m la massa dell'oggetto, per calcolare il calore prodotto avremo:

$$\Delta Q = F_{att}\cdot\Delta S = \mu_d\cdot m\cdot g\cdot\Delta S$$

La legge di conservazione dell'energia totale ci dice, tenendo conto che l'altezza a cui si trova il corpo non cambia, che

$$E_{ci} = E_{cf} + \Delta Q$$

da cui

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + \mu_d\cdot m\cdot g\cdot\Delta S$$

$$\mathcal{V}_i^2 = \mathcal{V}_f^2 + 2\mu_d\cdot g\cdot\Delta S$$

ed infine

$$\mathcal{V}_f^2 = \mathcal{V}_i^2 - 2\mu_d\cdot g\cdot\Delta S$$

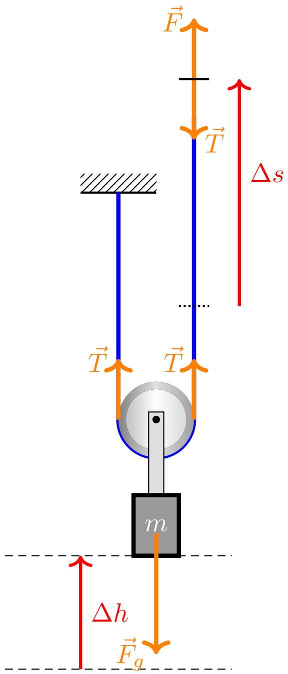
$$\mathcal{V}_f^2 = 400\,\frac{m^2}{s^2} - 2\cdot 0,5\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 30\,m = 106\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{V}_f = 10,3\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Dinamica - $DL0002$

Testo *[DL0002]* [2 3 2a]
Disegna lo schema di un sistema di sollevamento a carrucola mobile per sollevare un peso di massa $m = 10\,kg$. Indica il valore della forza $\vec{F}$ che devi esercitare sull'estremità del cavo e lo spostamento ΔS dell'estremità del cavo, sapendo che la massa si solleva di $\Delta h = 20\,cm$.

Spiegazione Un sistema di carrucole mobili è una macchina semplice il cui funzionamento si basa sul concetto di equilibrio statico $\vec{F}_{tot} = 0$ Il sistema di carrucole di cui si parla è il seguente.



Svolgimento Analizzando l'estremità del cavo e la carrucola mobile possiamo scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2T = F_g \\ T = F \end{cases}$$

da cui

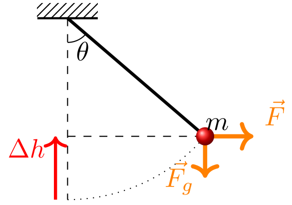
$$2F = F_g$$
$$F = \frac{1}{2}F_g = 49\,N$$

Vale sempre la legge di conservazione dell'energia. Per cui, indicando con L il lavoro della forza F avremo che

$$U_i + L = U_f$$
$$L = U_f - U_i = mg(h_f - h_i) = mg\Delta h = F_g\Delta h$$
$$F\Delta S = F_g\Delta h$$
$$\Delta S = \frac{F_g}{F}\Delta h = 40\,cm$$

Problema di: Dinamica - $DL0003$

Testo *[DL0003]* [3 4 3a]
Un pendolo è realizzato con un peso di massa $m = 900\,g$ ed un filo di lunghezza $L = 1\,m$. Esso viene tirato in orizzontale da una forza $F = 10\,N$ fino a raggiungere l'equilibrio. Quanto vale la tensione del filo che sorregge il peso? Di quanto si solleva il peso rispetto alla posizione di minima altezza? Quanta energia viene fornita al peso per sollevarlo?



Spiegazione In questo problema abbiamo tre forze disposte su di un piano: la forza di gravità verso il basso, la forza esterna in orizzontale (immaginiamo verso destra) e la tensione del filo in diagonale lungo il filo. In una condizione di equilibrio la somma delle tre forze è nulla. La forza di gravità è compensata dalla componente verticale della tensione del filo; la forza esterna è compensata dalla componente orizzontale della tensione del filo. É inoltre importante notare che il triangolo rettangolo formato dalle tre forze è simile al triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti).

Svolgimento La tensione del filo è in modulo pari alla somma della forza di gravità e della forza esterna

$$T = \sqrt{F_g^2 + F^2} = \sqrt{m^2g^2 + F^2} = \sqrt{0,81\,kg^2 \cdot 96,04\,\frac{m^2}{s^4} + 100\,N^2}$$
$$T = 13,3\,N$$

Consideriamo adesso il triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti) Il cateto verticale lo si trova sfruttando la similitudine tra triangoli e la conseguente proporzionalità tra i lati.

$$y : F_g = L : T$$

per cui

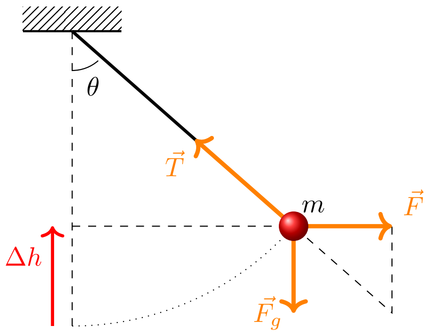
$$y = L \cdot \frac{F_g}{T} = L \cdot \frac{F_g}{\sqrt{Fg^2 + F^2}}$$

La massa attaccata al pendolo si è quindi sollevata di una quantità

$$\Delta h = L - y = L \cdot \left(1 - \frac{F_g}{\sqrt{Fg^2 + F^2}}\right) = 0,68\, m$$

L'energia data all'oggetto è quindi immagazzinata da esso sotto forma di energia potenziale gravitazionale

$$E = \Delta U = m \cdot g \cdot \Delta h = 0,9\, kg \cdot 9,8\, \frac{m}{s^2} \cdot 0,68\, m = 6\, J$$



Problema di: Dinamica - $DL0004$

Testo *[DL0004]* [4 5 3a]
Un oggetto è posto sulla cima di una superficie semisferica. Esso comincia a scivolare senza attrito lungo tale superficie. In quale punto esso si stacca dalla superficie? *[Credit: Walter Lewin Youtube Channel]*

Spiegazione La migliore spiegazione possibile è nel video riportato qui sotto.

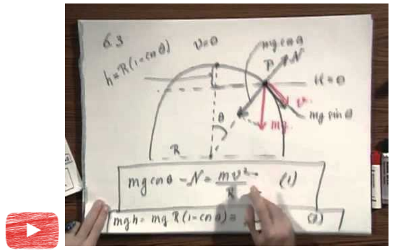


Fig. 6.4: *Guarda il video youtu.be/hDSZ4Nf-REw*

Svolgimento

Problema di: Dinamica - $DL0005$

Testo *[DL0005]* [4 3 3a]
Un pendolo di massa $m = 300\,g$ e lunghezza $L = 1\,m$ viene spostato dalla posizione di equilibrio di un angolo $\theta_i = 45°$. Quando è lasciato libero di oscillare, partendo da fermo, quale tensione esercita la corda quando il peso si trova ad un angolo $\theta_f = 30°$ dalla posizione di equilibrio?

Spiegazione Nel sistema fisico in questione, quello cioè di un pendolo semplice, le leggi che lo descrivono sono la legge di conservazione dell'energia e la seconda legge della dinamica. Con queste due leggi riusciremo a risolvere il problema. Di sicuro, visto che il percorso del peso è circolare, l'accelerazione lungo il filo deve essere un'accelerazione centripeta $a = \frac{\mathcal{V}^2}{r}$. La forza di gravità, essendo sempre verticale, dovrà essere scomposta in due vettori, uno tangente al percorso circolare, ed uno parallelo al filo del pendolo.

Svolgimento Cominciamo con lo scrivere la legge di conservazione dell'energia tra lo stato iniziale e lo stato finale indicati dai due angoli θ_i e θ_f

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 + mgh_f$$

Sapendo che $\mathcal{V}_i = 0$ e indicando con lo zero delle altezze il punto di rotazione, avremo

$$-mgL\cos\theta_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 - mgL\cos\theta_f$$

$$2mgL\left(\cos\theta_f - cos\theta_i\right) = m\mathcal{V}_f^2$$

Scomponendo la forza di gravità nelle sue due componenti avremo

$$\begin{cases} F_{g\parallel} = F_g\sin\theta \\ F_{g\perp} = F_g\cos\theta \end{cases}$$

Per cui, applicando il secondo principio della dinamica lungo il filo del pendolo

$$T - F_{g\perp} = m\frac{\mathcal{V}_f^2}{L}$$

$$T = m\frac{\mathcal{V}_f^2}{L} + mg\cos\theta_f$$

Utilizziamo adesso la legge di conservazione dell'energia

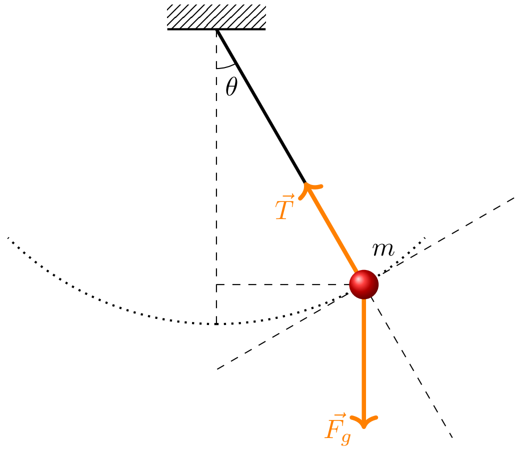
$$T = \frac{m\mathcal{V}_f^2 + mgL\cos\theta_f}{L}$$

$$T = \frac{2mgL\left(\cos\theta_f - cos\theta_i\right) + mgL\cos\theta_f}{L}$$

$$T = mgL \cdot \frac{2\cos\theta_f - 2cos\theta_i + \cos\theta_f}{L}$$

$$T = mg\left(2\cos\theta_f - 2cos\theta_i + \cos\theta_f\right)$$

$$T = 0{,}3\,kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right) = 3{,}5\,N$$



Problema di: Energia - $DL0006$

Testo *[DL0006]* [4 4 3a]

Un oggetto di massa $M = 5\,kg$ si trova fermo su di un piano orizzontale scabro ($\mu_s = 9$ e $\mu_d = 2$), e sta schiacciando una molla di costante elastica $K = 10\,\frac{N}{cm}$. Calcola il massimo schiacciamento che la molla può subire prima che l'oggetto venga spinto via. Quanta strada farà il blocco, dalla posizione di massimo schiacciamento, prima di fermarsi nuovamente?

Spiegazione Per la legge di conservazione dell'energia avremo che l'energia potenziale elastica si converte in energia cinetica ed in calore a causa del lavoro della forza di attrito

Svolgimento La massima compressione della molla la otteniamo eguagliando la forza elastica con la massima forza di attrito esprimibile dal piano

$$K\Delta l_{max} = \mu_s mg$$

$$\Delta l_{max} = \frac{\mu_s mg}{K}$$

Mentre l'oggetto si muove il punto di equilibrio tra forza della molla e forza di attrito è

$$\Delta l_{eq} = \frac{\mu_d mg}{K}$$

Da questo punto il poi l'oggetto comincia a rallentare

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}K\Delta l_{max}^2 = F_{att}\cdot\Delta S$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mu_s^2 m^2 g^2}{K} = \mu_d mg\cdot\Delta S$$

$$\frac{\mu_s^2 mg}{2\mu_d K} = \Delta S$$

Questo risultato ha senso se numericamente risulta che

$$\Delta S > \Delta l_{max}$$

cioè

$$\mu_s > 2\mu_d$$

In caso contrario l'oggetto si ferma prima

Problema di: Dinamica - $DL0011$

Testo *[DL0011]* [3½ 4 3a]
Un pendolo semplice è realizzato con una corda di lunghezza $L = 2\,m$ con all'estremità una massa $m = 2\,kg$. Tale pendolo sta oscillando attaccato ad un chiodo all'altezza $h_c = 3\,m$. La massima altezza raggiunta dal pendolo è $h_i = 1,4\,m$. La corda può sopportare una tensione massima $T_{max} = 30\,N$. Il pendolo si romperà?

Spiegazione Il questo esercizio abbiamo un pendolo che oscilla. La massa attaccata al filo esegue un moto circolare, in quanto essa si trova sempre alla stessa distanza dal chiodo. La forza che agisce sulla massa sarà in ogni istante la somma della forza di gravità e della forza esercitata dal filo. Con i dati del problema è possibile calcolare quale sarà la forza massima esercitata richiesta dalla massa per eseguire il movimento; se tale forza massima è maggiore della tensione di rottura del filo, allora il filo si spezzerà.

Svolgimento

$$\frac{1}{2}mV_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mV_f^2 + mgh_f$$

considerando che nel punto più alto dell'oscillazione del pendolo la velocità è $V_i = 0$ e che il pendolo nel suo percorso verso il punto più basso scende di $\Delta h = h_f - h_i = -0,4\,m$

$$mV_f^2 = -2mg\Delta h$$

Utilizzando adesso il secondo principio della dinamica. L'oggetto appeso al filo segue un percorso perfettamente circolare, quindi è sottoposto ad una accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{V^2}{r}$$

per cui

$$T - mg = m\frac{V_f^2}{r}$$

$$T - mg = \frac{-2mg\Delta h}{r}$$

$$T = \frac{-2mg\Delta h}{r} + mg = mg\left[\frac{-2\Delta h}{r} + 1\right] = 27,44\,N$$

Problema di: Dinamica - $DL0012$

Testo *[DL0012]* [2 3 2a]
Un'auto di massa $m = 500\,kg$ rallenta dalla velocità $V_i = 252\,\frac{km}{h}$ fino alla velocità $V_f = 108\,\frac{km}{h}$ in uno spazio $\Delta S = 100\,m$. Quanto lavoro hanno fatto le forze d'attrito? Calcola forza e accelerazione d'attrito.

Spiegazione Un'auto si sta muovendo con una certa energia cinetica. Una forza di attrito converte parte di quell'energia cinetica in calore, riducendo la velocità dell'auto

Svolgimento Per prima cosa convertiamo le unità di misura della velocità

$$V_i = 252\,\frac{km}{h} = 252\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 70\,\frac{m}{s}$$

$$V_f = 108\,\frac{km}{h} = 108\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 30\,\frac{m}{s}$$

L'energia cinetica iniziale dell'auto vale

$$E_{ci} = \frac{1}{2}mV_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\,kg \cdot 4900\,\frac{m^2}{s^2} = 1225\,kJ$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2}mV_f^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\,kg \cdot 900\,\frac{m^2}{s^2} = 225\,kJ$$

La perdita di energia cinetica sarà pari al lavoro fatto dalle forze di attrito

$$L = E_{cf} - E_{ci} = -1000\,kJ$$

La forza d'attrito sarà

$$F_a = \frac{L}{\Delta S} = \frac{-1000\,kJ}{100\,m} = -10\,kN$$

dove quel meno indica che la forza è opposta allo spostamento dell'auto.

L'accelerazione che ne consegue sarà

$$a = \frac{F_a}{m} = \frac{-10\,N}{500\,kg} = -0,02\,\frac{m}{s^2}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Un oggetto di massa $m = 50\,kg$ viaggia ad una velocità $V = 10\frac{m}{s}$. Ad un certo punto viene spinto da una forza $F = 100\,N$ per una distanza $\Delta S = 24\,m$ nella stessa direzione e nello stesso verso del movimento. Quanta energia cinetica ha l'oggetto all'inizio? Quanto lavoro ha fatto la forza? Quel lavoro è negativo o positivo? Quanta energia cinetica ha l'oggetto dopo l'azione della forza? A quale velocità finale viaggia l'oggetto? *[$E_{ci} = 2500\,J$; $L_{pos} = 2400\,J$; $E_{cf} = 4900\,J$; $V = 14\,\frac{m}{s}$]*

Problema di: Dinamica e leggi di conservazione - $DL0055$

Testo *[DL0055]* [4 5 3a]
Un'asticella, di massa m e lunghezza L, è inizialmente ferma e appoggiata sullo spigolo tra un muro ed il pavimento, senza attrito. Essa inizialmente forma un angolo $\alpha = 15°$ con la parete verticale. Mentre cade, per un certo valore β dell'angolo con la parete, l'asticella si stacca da terra. Calcola β. *[Walter Lewin problem* $\#116$*]*

Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia e sul moto circolare uniforme. Infatti il baricentro dell'asticella si muove inizialmente di moto circolare (non uniforme), per poi compiere un moto parabolico.

Svolgimento Nel baricentro dell'asticella è applicata la forza di gravità. Fino a quando l'asticella rimane attaccata al terreno, esso si muove di moto circolare, infatti la distanza del baricentro è sempre pari a metà della lunghezza dell'asticella.

L'asticella si staccherà quando la forza che la schiaccia contro lo spigolo è minore o uguale della forza centrifuga

$$F_c = m\frac{\mathcal{V}^2}{\frac{L}{2}}$$

dovuta alla velocità $\mathcal{V}_f$ dell'asticella.

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$U_i + E_{ci} = U_f + E_{cf}$$

$$mgL\cos\alpha + 0 = mgL\cos\beta + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2$$

e quindi

$$m\mathcal{V}_f^2 = 2mgL\cos\alpha - 2mgL\cos\beta$$

La forza che schiaccia l'asticella lungo lo spigolo è la componente della forza di gravità lungo l'asticella

$$F_\parallel = mg\cos\beta$$

L'asticella si stacca quando

$$2m\frac{\mathcal{V}_f^2}{L} = mg\cos\beta$$

Utilizzando la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{4mgL\cos\alpha - 4mgL\cos\beta}{L} = mg\cos\beta$$

$$4mg\cos\alpha - 4mg\cos\beta = mg\cos\beta$$

$$4\cos\alpha - 4\cos\beta = \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5}\cos\alpha$$

$$\beta = 39,4°$$

Problema di: Leggi di conservazione - $P0001$

Testo *[P0001]* [2 1 2a]
Un oggetto che ha massa $m_1 = 50\,kg$ viaggia ad una velocità $\mathcal{U}_1 = 11\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto urta contro un oggetto di massa $m_2 = 100\,kg$ che viaggia nel verso opposto ad una velocità $\mathcal{U}_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Nell'urto di due oggetti rimangono attaccati. A quale velocità finale si muove il blocco?

Spiegazione Ognuno dei due oggetti si sta muovendo, e quindi ha una certa quantità di moto. Visto che quando urtano tra loro rimangono attaccati, allora si tratta di un urto anelastico nel quale si conserva la sola quantità di moto.

Svolgimento Vale la legge di conservazione della quantità di moto; quindi la quantità di moto totale iniziale è uguale alla quantità di moto totale finale.

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{tot.f}$$

$$m_{1i}\mathcal{U}_{1i} + m_{2i}\mathcal{U}_{2i} = m_{tot}\mathcal{U}_f$$

In questa equazione si vede che dopo l'urto è presente un solo oggetto la cui massa è pari alla somma delle masse dei due oggetti prima dell'urto.

$$\mathcal{U}_f = \frac{m_{1i}\mathcal{U}_{1i} + m_{2i}\mathcal{U}_{2i}}{m_{tot}}$$

$$\mathcal{U}_f = \frac{550\,\frac{kg\,m}{s} - 100\,\frac{kg\,m}{s}}{150\,kg} = 3\,\frac{m}{s}$$

Il meno nella formula indica che il secondo oggetto viaggia in direzione opposta rispetto al primo; il fatto che il risultato sia positivo indica che il blocco dei due oggetti viaggia, dopo l'urto, nello stesso verso del primo blocco prima dell'urto.

Problema di: Leggi di conservazione - $P0002$

Testo *[P0002]* [2 1 2a]
Un oggetto che ha massa $m_1 = 50\,kg$ viaggia ad una velocità $\mathcal{U}_1 = 11\,\frac{m}{s}$. Ad un certo punto urta contro un oggetto di massa $m_2 = 100\,kg$ che viaggia nello stesso verso ad una velocità $\mathcal{U}_2 = 1\,\frac{m}{s}$. Nell'urto i due oggetti rimangono attaccati. A quale velocità finale si muove il blocco?

Spiegazione Ognuno dei due oggetti si sta muovendo, e quindi ha una certa quantità di moto. Visto che quando urtano tra loro rimangono attaccati, allora si tratta di un urto anelastico nel quale si conserva la sola quantità di moto.

Svolgimento Vale la legge di conservazione della quantità di moto; quindi la quantità di moto totale iniziale è uguale alla quantità di moto totale finale.

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{tot.f}$$

$$m_{1i}\mathcal{U}_{1i} + m_{2i}\mathcal{U}_{2i} = m_{tot}\mathcal{U}_f$$

In questa equazione si vede che dopo l'urto è presente un solo oggetto la cui massa è pari alla somma delle masse dei due oggetti prima dell'urto.

$$\mathcal{U}_f = \frac{m_{1i}\mathcal{U}_{1i} + m_{2i}\mathcal{U}_{2i}}{m_{tot}}$$

$$\mathcal{U}_f = \frac{550\,\frac{kg\,m}{s} + 100\,\frac{kg\,m}{s}}{150\,kg} = \frac{13}{3}\,\frac{m}{s}$$

Il fatto che il risultato sia positivo indica che il blocco dei due oggetti viaggia, dopo l'urto, nello stesso verso dei blocchi prima dell'urto.

Problema di: Leggi di conservazione - $P0003$

Testo *[P0003]* [3 2 2a]
Due auto procedono verso un incrocio su strade perpendicolari tra loro. La prima ha una massa $m_1 = 650\,kg$ e viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_1 = 60\,\frac{km}{h}$. La seconda ha una massa $m_2 = 500\,kg$ e viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_2 = 90\,\frac{km}{h}$. Ipotizzando un urto anelastico nel quale le due auto rimangono attaccate, con quale velocità si muoveranno i rottami dopo l'urto?

Spiegazione Il problema suggerisce la soluzione in quanto dice che l'urto in questione è anelastico. Vale di conseguenza la legge di conservazione dell'impulso che in questo caso va scritta in due dimensioni.

Svolgimento Scomponiamo il problema su due direzioni che indicheremo con le lettere x e y: quelle delle due strade. Avremo

$$\begin{cases} m_1\mathcal{V}_{1x} = (m_1 + m_2)\,\mathcal{V}_{fx} \\ m_2\mathcal{V}_{2y} = (m_1 + m_2)\,\mathcal{V}_{fy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\mathcal{V}_{1x}}{(m_1 + m_2)} = \mathcal{V}_{fx} \\ \dfrac{m_2\mathcal{V}_{2y}}{(m_1 + m_2)} = \mathcal{V}_{fy} \end{cases}$$

La velocità dopo l'urto sarà quindi

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\mathcal{V}_{fx}^2 + \mathcal{V}_{fy}^2} = \frac{\sqrt{m_1^2\mathcal{V}_1^2 + m_2^2\mathcal{V}_2^2}}{(m_1 + m_2)}$$

$$\mathcal{V}_f = 51,8\,\frac{km}{h}$$

Problema di: Leggi di conservazione - $P0005$

Testo *[P0005]* [2 2 2a]
Un cacciatore di massa $m_c = 60\,kg$, che si trova su un carrello di massa $M = 40\,kg$ inizialmente fermo e libero di muoversi senza attrito, spara un colpo di fucile. Il proiettile ha una massa $m = 20\,g$ e viene sparato con una velocità $\mathcal{V} = 600\,\frac{m}{s}$. Di quanto si è spostato il carrello in un tempo $\Delta t = 10\,s$?

Spiegazione Questo problema è completamente descritto dalla legge di conservazione della quantità di moto. Con il colpo di fucile il carrello si muoverà nella direzione opposta allo sparo.

Svolgimento La quantità di moto iniziale del sistema è nulla in quanto tutti gli oggetti sono fermi. Dopo lo sparo, il proiettile si muove in un verso e il sistema *"carrello + persona"* si muove in verso opposto. La quantità di moto del carrello con la persona sopra è pari alla quantità di moto del proiettile. Avremo quindi

$$m\mathcal{V} = (M + m_c)\,\mathcal{V}_c$$

$$\mathcal{V}_c = \frac{m}{(M + m_c)}\mathcal{V} = 0,12\,\frac{m}{s}$$

La strada percorsa nel frattempo dal carrello sarà

$$\Delta S = \mathcal{V}_c \cdot \Delta t = 0,12\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s = 1,2\,m$$

Problema di: Leggi di conservazione - $P0006$

Testo *[P0006]* [3 2 2a]
Un fuoco artificiale inizialmente ferma esplode dividendo l'involucro in tre frammenti di eguale massa, i quali partono in direzioni differenti. Due di questi hanno la stessa velocità $V = 50\,\frac{m}{s}$ ed il terzo ha una velocità differente. Sapendo che l'angolo tra i primi due frammenti è $\theta = 90°$, quanto vale la velocità V_3 del terzo frammento?

Spiegazione Questo problema è completamente descritto dalla legge di conservazione della quantità di moto.

Svolgimento La quantità di moto totale prima dell'esplosione è nulla. Dopo l'esplosione la quantità di moto del terzo frammento deve essere eguale ed opposta alla somma delle quantità di moto dei due frammenti iniziali. Per cui

$$P_3 = mV_3 = \sqrt{m^2V^2 + m^2V^2} = \sqrt{2}mV$$

da cui

$$V_3 = \sqrt{2}V = 70,7\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0007$

Testo *[P0007]* [3 3 2a]
Un proiettile di massa $m = 3\,kg$ si muove con velocità $V = 400\,\frac{m}{s}$. A seguito di una piccola esplosione, il proiettile si rompe in due frammenti di massa uno doppia dell'altro, che si muovono rispettivamente con una direzione inclinata di $\alpha = \pm 30°$ rispetto alla velocità iniziale del proiettile. Con quale velocità si muovono i due frammenti?

Spiegazione L'esplosione genera una coppia di forze interne che sono causa dell'allontanamento dei due proiettili. Vale la legge di conservazione dell'impulso. Con la legge di conservazione dell'energia possiamo poi stimare il lavoro in ingresso.

Svolgimento I due frammanto del proiettile hanno uno una massa doppia dell'altro, quindi possiamo definire le loro masse come $M_1 = m$ ed $M_2 = 2m$. La massa del proiettile sarà $M_p = 3m$

Scriviamo la legge di conservazione dell'impulso

$$\begin{cases} 3mV_p = mV_{1x} + 2mV_{2x} \\ 0 = mV_{1y} - 2mV_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_p = V_{1x} + 2V_{2x} \\ V_{1y} = 2V_{2y} \end{cases}$$

Dal momento che i due frammenti si muovono con lo stesso angolo α rispetto all'orizzontale, avremo

$$\begin{cases} V_{1y} = V_1 \sin\alpha = \frac{1}{2}V_1 \\ V_{2y} = V_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}V_2 \\ V_{1x} = V_1 \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}V_1 \\ V_{2x} = V_2 \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}V_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} 3\mathcal{V}_p = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_1 + \sqrt{3}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\mathcal{V}_p = \sqrt{3}\mathcal{V}_2 + \sqrt{3}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_p = 346,4\,\dfrac{m}{s} \\ \mathcal{V}_1 = \sqrt{3}\mathcal{V}_p = 692,8\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0008$

Testo *[P0008]* [3 4 3a]
Un corpo di massa $m_1 = 2\,kg$ in moto a velocità $\mathcal{V}_1 = 10\,\frac{m}{s}$ urta elasticamente un secondo corpo fermo. Sapendo che i due corpi dopo l'urto avranno la stessa velocità, quanto vale la massa del corpo inizialmente fermo?

Spiegazione Un semplice urto elastico

Svolgimento Sappiamo che l'urto è elastico, quindi i due oggetti non possono avere la stessa velocità e lo stesso verso, altrimenti sarebbe un urto anelastico. I versi delle velocità devono necessariamente essere opposti.

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{2f} = -\mathcal{V}_{1f}$$

L'equazione di conservazione dell'impulso per l'urto elastico indicato nel testo è

$$m_1\mathcal{V}_1 = m_2\mathcal{V}_{2f} + m_1\mathcal{V}_{1f}$$

che per quanto sopra detto diventa

$$m_1\mathcal{V}_1 = m_2\mathcal{V}_f - m_1\mathcal{V}_f = (m_2 - m_1)\,\mathcal{V}_f$$

L'equazione di conservazione dell'energia per l'urto elastico indicato nel testo è

$$m_1\mathcal{V}_1^2 = m_2\mathcal{V}_f^2 + m_1\mathcal{V}_f^2$$

$$\mathcal{V}_1^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\mathcal{V}_f^2$$

Quindi avremo

$$m_1^2\frac{m_1 + m_2}{m_1}\mathcal{V}_f^2 = (m_2 - m_1)^2\,\mathcal{V}_f^2$$

$$m_1^2 + m_1m_2 = m_2^2 + m_1^2 - 2m_1m_2$$

$$3m_1m_2 = m_2^2$$

La prima soluzione $m_2 = 0$ è da scartare in quanto non ha un significato fisico. Rimane

$$m_2 = 3m_1 = 6\,kg$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0009$

Testo *[P0009]* [2 2 2a]
Da una mongolfiera ferma di massa $M = 400\,kg$ pende un peso di massa $m = 20\,kg$. In un certo istante il peso viene tirato verso l'alto da un motore. Il peso sale, rispetto al suolo, alla velocità $\mathcal{U}_p = 10\,\frac{m}{s}$. Con quale velocità scende la mongolfiera? Giustifica la scelta della legge fisica da applicare.

Spiegazione In questo problema le forze sono forze interne e quindi la quantità di moto si conserva

Svolgimento Il sistema inizialmente è fermo. Successivamente i due corpi presenti si muovono in direzioni opposte. I moduli delle quantità di moto saranno quindi uguali.

$$m\mathcal{U}_p = M\mathcal{U}_m$$

$$V_m = \frac{m}{M}\mathcal{U}_p = 0,5\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0010$

Testo *[P0010]* [2 3 2a]
Da una mongolfiera ferma di massa $M = 400\,kg$ pende un peso di massa $m_p = 20\,kg$. In un certo istante il peso viene tirato verso l'alto da un motore che accorcia la corda alla velocità $\mathcal{V} = 4,2\,\frac{m}{s}$. Con quale velocità scende la mongolfiera?

Spiegazione In questo problema le forze sono forze interne e quindi la quantità di moto si conserva

Svolgimento Il sistema inizialmente è fermo. Successivamente i due corpi presenti si muovono in direzioni opposte. I moduli delle quantità di moto saranno quindi uguali.

$$m_p \mathcal{V}_p = M \mathcal{V}_m$$

Sappiamo la velocità con cui i due corpi si *avvicinano*, quindi

$$\mathcal{V}_p + \mathcal{V}_m = \mathcal{V}$$

da cui

$$\frac{M}{m}\mathcal{V}_m + \mathcal{V}_m = \mathcal{V}$$

$$\mathcal{V}_m = \frac{m}{(m+M)}\mathcal{V}$$

$$\mathcal{V}_m = 0,2\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0011$

Testo *[P0011]* [4 4 3a]
nel sistema di riferimento del Sole, un satellite si sta dirigendo verso Saturno a velocità $\mathcal{V} = 5\,\frac{km}{s}$. Saturno si dirige verso il satellite a velocità $\mathcal{V}_s = 9,7\,\frac{km}{s}$. La massa del satellite è trascurabile rispetto alla massa di Saturno. Dopo aver compito mezza orbita intorno a Saturno, il satellite lascia l'orbita con la stessa direzione ma verso opposto rispetto a prima. Con quale velocità si muove?

Spiegazione In questo problema le forze sono forze interne e quindi la quantità di moto si conserva

Svolgimento Il fenomeno fisico descritto è di fatto un urto elastico tra il satellite e Saturno. Nell'approssimazione per cui la massa di Saturno è molto maggiore di quella del satellite, avremo

$$\begin{cases} M_s\mathcal{V}_{si} - m\mathcal{V}_i = M_s\mathcal{V}_{sf} + m\mathcal{V}_f \\ M_s\mathcal{V}_{si}^2 + m\mathcal{V}_i^2 = M_s\mathcal{V}_{sf}^2 + m\mathcal{V}_f^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_s\left(\mathcal{V}_{si} - \mathcal{V}_{sf}\right) = m\mathcal{V}_i + m\mathcal{V}_f \\ M_s\mathcal{V}_{si}^2 - M_s\mathcal{V}_{sf}^2 = +m\mathcal{V}_f^2 - m\mathcal{V}_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_s\left(\mathcal{V}_{si} - \mathcal{V}_{sf}\right) = m\mathcal{V}_i + m\mathcal{V}_f \\ M_s\left(\mathcal{V}_{si} - \mathcal{V}_{sf}\right)\left(\mathcal{V}_{si} + \mathcal{V}_{sf}\right) = +m\left(\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i\right)\left(\mathcal{V}_f + \mathcal{V}_i\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_s\left(\mathcal{V}_{si} - \mathcal{V}_{sf}\right) = m\mathcal{V}_i + m\mathcal{V}_f \\ m\left(\mathcal{V}_i + \mathcal{V}_f\right)\left(\mathcal{V}_{si} + \mathcal{V}_{sf}\right) = +m\left(\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i\right)\left(\mathcal{V}_f + \mathcal{V}_i\right) \end{cases}$$

Nell'approssimazione dell'esercizio Saturno non modifica la sua velocità, quindi

$$\begin{cases} M_s\left(\mathcal{V}_{si} - \mathcal{V}_{sf}\right) = m\mathcal{V}_i + m\mathcal{V}_f \\ 2\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i \end{cases}$$

da cui

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i + 2\mathcal{V}_s = 24,4\,\frac{km}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0012$

Testo *[P0012]* [3 3 3a]
Nel tuo sistema di riferimento due oggetti di eguale massa di muovono uno verso l'altro entrambi con velocità $V = 5\,\frac{m}{s}$ e compiono un urto anelastico. In un secondo sistema di riferimento uno degli oggetti è fermo. Calcola la velocità dell'oggetto dopo l'urto utilizzando il secondo sistema di riferimento.

Spiegazione In questo problema applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto. Il problema chiede di eseguire, prima di fare i calcoli, un cambio di sistema di riferimento.

Svolgimento Indichiamo con m le masse dei due oggetti.

Chiamiamo i due oggetti con gli indici a e b. Nel nostro sistema di riferimento $V_a = 5\,\frac{m}{s}$ e $V_b = -5\,\frac{m}{s}$

Nel sistema di riferimento dell'oggetto a che si muove verso destra con velocità V_a, le velocità saranno $V'_a = 0\,\frac{m}{s}$ e $V'_b = -10\,\frac{m}{s}$

Applicando la legge di conservazione della quantità di moto avremo

$$(m+m)\,V_f = mV_a + mV_b$$

$$V_f = \frac{1}{2}V_b = -5\,\frac{m}{s}$$

Questo significa che se avessimo lavorato nel nostro sistema di riferimento l'oggetto sarebbe stato fermo.

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0013$

Testo *[P0013]* [4 4 3a]
Un oggetto di massa m_1 si muove con velocità $\mathcal{V}_1$ parallela all'asse x del sistema di riferimento, verso una seconda particella di massa m_2 in quiete. Dopo la collisione, i due oggetti si muovono con velocità $\mathcal{V}_1'$ e $\mathcal{V}_2'$, inclinate rispettivamente di un angolo θ_1 e θ_2 rispetto all'asse di riferimento. Calcolare in funzione delle masse, degli angoli indicati e delle velocità iniziali la quantità $\frac{\mathcal{V}_2'}{\mathcal{V}_1'}$ e la velocità $\mathcal{V}_1'$

Spiegazione Questo problema prevede la sola applicazione della legge di conservazione della quantità di moto in due dimensioni. Un po' di algebra e si riesce a rispondere alle domande poste.

Svolgimento Applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto sia sull'asse delle x che sull'asse delle y

$$\begin{cases} m_1\mathcal{V}_1 = m_1\mathcal{V}_1'\cos\theta_1 + m_2\mathcal{V}_2'\cos\theta_2 \\ 0 = m_1\mathcal{V}_1'\sin\theta_1 - m_2\mathcal{V}_2'\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{V}_2'}{\mathcal{V}_1'} = \dfrac{m_1\sin\theta_1}{m_2\sin\theta_2} \\ \dfrac{m_1\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_1'} = m_1\cos\theta_1 + m_2\dfrac{\mathcal{V}_2'}{\mathcal{V}_1'}\cos\theta_2 \end{cases}$$

Sviluppando la seconda equazione del sistema avremo

$$\frac{\mathcal{V}_1'}{m_1\mathcal{V}_1} = \frac{1}{m_1\cos\theta_1 + m_2\dfrac{\mathcal{V}_2'}{\mathcal{V}_1'}\cos\theta_2}$$

$$\frac{\mathcal{V}_1'}{m_1\mathcal{V}_1} = \frac{1}{m_1\cos\theta_1 + m_1\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_2}$$

$$\frac{\mathcal{V}_1'}{\mathcal{V}_1} = \frac{1}{\cos\theta_1 + \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_2}$$

$$\mathcal{V}_1' = \mathcal{V}_1\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2}$$

$$\mathcal{V}_1' = \mathcal{V}_1\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0014$

Testo *[P0014]* [3½ 5 3a]
Un proiettile di massa $m = 1,8\,kg$ viaggia alla velocità $\mathcal{U}_i = 600\,\frac{m}{s}$. Quando esplode e si divide in tre frammenti uguali; il primo prosegue con velocità $\mathcal{U}_{f1} = 300\,\frac{m}{s}$ nella stessa direzione e verso del proiettile, gli altri due lungo una direzione a $\alpha = 45°$ rispetto alla direzione del proiettile. Con quale velocità si muovono quei due frammenti?

Spiegazione Questo problema prevede la sola applicazione della legge di conservazione della quantità di moto in due dimensioni. Un po' di algebra e si riesce a rispondere alle domande poste.

Svolgimento Per prima cosa scomponiamo le quantità di moto dei due frammenti lungo le direzioni parallela e perpendicolare rispetto alla direzione del proiettile. Sappiamo inoltre che il proiettile si divide in tre frammenti uguali, quindi $m_j = \frac{1}{3}m$ con $j = 1,2,3$ a seconda del frammento considerato. Sappiamo infine che i due frammenti viaggiano ad un angolo pari a metà di un angolo retto rispetto agli assi su cui le loro velocità sono state scomposte, e quindi le loro due componenti sono in modulo uguali.

La quantità di moto totale iniziale è

$$\begin{cases} P_{ix} = m\mathcal{U}_i \\ P_{iy} = 0 \end{cases}$$

Dopo l'esplosione la quantità di moto totale finale, che deve essere uguale a quella iniziale, vale

$$\begin{cases} P_{fx} = \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{1f} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{2fx} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{3fx} \\ P_{fy} = \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{2fy} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{3fy} \end{cases}$$

Applicando la legge di conservazione della quantità di moto, sull'asse delle x avremo

$$\frac{1}{3}m\mathcal{U}_{2fy} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{3fy} = 0$$

$$\mathcal{U}_{2fy} = -\mathcal{U}_{3fy}$$

e sull'asse delle y avremo

$$m\mathcal{U}_i = \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{1f} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{2fx} + \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{3fx}$$

sapendo che le componenti su x e su y delle velocità dei due frammenti sono uguali, allora

$$m\mathcal{U}_i - \frac{1}{3}m\mathcal{U}_{1f} = \frac{2}{3}m\mathcal{U}_{2fy}$$

$$\mathcal{U}_{2fy} = \frac{3}{2}\left(\mathcal{U}_i - \frac{1}{3}\mathcal{U}_{1f}\right) = 750\,\frac{m}{s}$$

Quindi la velocità del secondo frammento, che abbiamo visto essere uguale a quella del terzo frammento, sarà

$$\mathcal{U}_{2f} = \sqrt{\mathcal{U}_{2fx}^2 + \mathcal{U}_{2fy}^2} = 1061\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0015a$

Testo *[P0015a]* [2 3 3a]
Un corvo di massa $m = 400\,g$ vuole appoggiarsi su di un tronco d'albero di massa $m = 100\,kg$ che sta galleggiando spinto dalla corrente alla velocità $V_{ti} = 3\,\frac{m}{s}$. Il corvo si avvicina al tronco alla velocità $V_{ci} = 5\,\frac{m}{s}$ mentre il tronco gli viene incontro. Appoggiatosi sul tronco, il corvo scivola fino a raggiungerne la fine e cadere alla velocità $V_{cf} = 4\frac{m}{s}$. Quale velocità ha il tronco alla fine? [Si trascuri l'effetto dell'attrito con l'acqua.]

Spiegazione Questo problema prevede la sola applicazione della legge di conservazione della quantità di moto. Il corvo scivola sul tronco e ne cambia la quantità di moto di un valore pari a quanta lui ne perde.

Svolgimento Per semplicità disegniamo il tronco che si muove verso destra ed il corvo che vola verso sinistra. Il corvo viene rallentato dal tronco; visto che il corvo andava incontro al tronco, anche il tronco verrà rallentato.

Consideriamo come sistema di riferimento la direzione ed il verso della velocità del tronco. Il corvo ha diminuito la sua velocità, e quindi ha perso quantità di moto. Egli viaggiava verso il tronco, quindi

$$\Delta P_c = m_c\,(V_{cf} - V_{ci}) = 0,4\,kg\left(-4\,\frac{m}{s} + 5\,\frac{m}{s}\right) = 0,4\,\frac{kg\,m}{s}$$

Se il corvo acquista quantità di moto verso sinistra (infatti continua ad andare verso destra ma più piano), allora il tronco acquista quantità di moto verso destra per la conservazione della quantità di moto.

$$\Delta P_t + \Delta P_c = 0$$

$$P_{tf} = P_{ti} + \Delta P_t = 100\,kg \cdot 3\,\frac{m}{s} - 0,4\,\frac{kg\,m}{s} = 299,6\,\frac{kg\,m}{s}$$

Il tronco viaggerà quindi alla velocità

$$V_{tf} = \frac{P_{tf}}{m_t} = 0,2996\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0015b$

Testo *[P0015b]* [2 3 3a]
Un corvo di massa $m = 400\,g$ vuole appoggiarsi su di un tronco d'albero di massa $m = 100\,kg$ che sta galleggiando spinto dalla corrente alla velocità $\mathcal{V}_{ti} = 3\,\frac{m}{s}$. Il corvo si avvicina al tronco inseguendolo alla velocità $\mathcal{V}_{ci} = 5\,\frac{m}{s}$. Appoggiatosi sul tronco, il corvo scivola fino a raggiungerne la fine e cadere alla velocità $\mathcal{V}_{cf} = 4\frac{m}{s}$. Quale velocità ha il tronco alla fine? [Si trascuri l'effetto dell'attrito con l'acqua.]

Spiegazione Questo problema prevede la sola applicazione della legge di conservazione della quantità di moto. Il corvo scivola sul tronco e ne cambia la quantità di moto di un valore pari a quanta lui ne perde.

Svolgimento Per semplicità disegniamo il tronco che si muove verso destra ed il corvo che vola rincorrendolo. Il corvo viene rallentato dal tronco; visto che il corvo inseguiva il tronco, il tronco verrà accelerato e andrà più veloce.

Consideriamo come sistema di riferimento la direzione ed il verso della velocità del tronco. Il corvo ha diminuito la sua velocità, e quindi ha perso quantità di moto. Egli viaggiava inseguendo il tronco, quindi

$$\Delta P_c = m_c\left(\mathcal{V}_{cf} - \mathcal{V}_{ci}\right) = 0,4\,kg\left(4\,\frac{m}{s} - 5\,\frac{m}{s}\right) = -0,4\,\frac{kg\,m}{s}$$

Se il corvo acquista quantità di moto verso sinistra (infatti continua ad andare verso destra ma più piano), allora il tronco acquista quantità di moto verso destra per la conservazione della quantità di moto.

$$\Delta P_t + \Delta P_c = 0$$

$$P_{tf} = P_{ti} + \Delta P_t = 100\,kg \cdot 3\,\frac{m}{s} + 0,4\,\frac{kg\,m}{s} = 300,4\,\frac{kg\,m}{s}$$

Il tronco viaggerà quindi alla velocità

$$\mathcal{V}_{tf} = \frac{P_{tf}}{m_t} = 3,004\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0016$

Testo *[P0016]* [2 2 3a]
Durante un urto una forza impulsiva $F = 1000\,kN$ agisce su di un corpo per un tempo $\Delta t = 5\,ms$ perpendicolarmente alla sua velocità iniziale. Sapendo che il corpo ha massa $m = 500\,kg$ e inizialmente viaggia alla velocità $\mathcal{V}_i = 20\,\frac{m}{s}$, a quale velocità viaggerà dopo l'urto?

Spiegazione Una forza che agisce per un certo tempo, fa cambiare la quantità di moto del corpo

Svolgimento Possiamo calcolarci la variazione di quantità di moto del corpo, calcolandoci l'impulso della forza.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t = 5000\,\frac{kg\,m}{s}$$

Tale vettore è perpendicolare alla quantità di moto iniziale del corpo

$$P_i = m\mathcal{V}_i = 10^4\,\frac{kg\,m}{s}$$

La quantità di moto dopo l'urto sarà

$$P_f = \sqrt{P_i^2 + \Delta P^2} = \sqrt{10^8\,\frac{kg^2\,m^2}{s^2} + 0,25 \cdot 10^8\,\frac{kg^2\,m^2}{s^2}} = 11180\,\frac{kg\,m}{s}$$

La velocità del corpo è quindi

$$\mathcal{V}_f = \frac{P_f}{m} = 22,2\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0016a$

Testo *[P0016a]* [2 2 3a]
Durante un urto una forza impulsiva $F = 1000\,kN$ agisce su di un corpo per un tempo $\Delta t = 5\,ms$ parallelamente alla sua velocità iniziale e nello stesso verso. Sapendo che il corpo ha massa $m = 500\,kg$ e inizialmente viaggia alla velocità $V_i = 20\,\frac{m}{s}$, a quale velocità viaggerà dopo l'urto?

Spiegazione Una forza che agisce per un certo tempo, fa cambiare la quantità di moto del corpo

Svolgimento Possiamo calcolarci la variazione di quantità di moto del corpo, calcolandoci l'impulso della forza.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t = 5000\,\frac{kg\,m}{s}$$

Tale vettore è parallelo e nello stesso verso alla quantità di moto iniziale del corpo

$$P_i = mV_i = 10^4\,\frac{kg\,m}{s}$$

La quantità di moto dopo la forza impulsiva sarà

$$P_f = P_i + \Delta P = 15000\,\frac{kg\,m}{s}$$

La velocità del corpo è quindi

$$V_f = \frac{P_f}{m} = 30\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $P0016b$

Testo *[P0016b]* [2 2 3a]
Durante un urto una forza impulsiva $F = 1000\,kN$ agisce su di un corpo per un tempo $\Delta t = 5\,ms$ parallelamente alla sua velocità iniziale e in verso opposto. Sapendo che il corpo ha massa $m = 500\,kg$ e inizialmente viaggia alla velocità $V_i = 20\,\frac{m}{s}$, a quale velocità viaggerà dopo l'urto?

Spiegazione Una forza che agisce per un certo tempo, fa cambiare la quantità di moto del corpo

Svolgimento Possiamo calcolarci la variazione di quantità di moto del corpo, calcolandoci l'impulso della forza.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t = 5000\,\frac{kg\,m}{s}$$

Tale vettore è parallelo e nello stesso verso alla quantità di moto iniziale del corpo

$$P_i = mV_i = 10^4\,\frac{kg\,m}{s}$$

La quantità di moto dopo la forza impulsiva sarà

$$P_f = P_i - \Delta P = 5000\,\frac{kg\,m}{s}$$

La velocità del corpo è quindi

$$V_f = \frac{P_f}{m} = 10\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di conservazione - $CP0007$

Testo *[CP0007]* [4 4 3a]
Un proiettile di massa $M = 2\,kg$ parte da terra alla velocità iniziale $\mathcal{V}_i = 500\,\frac{m}{s}$ con un angolo da terra $\theta = 60°$. Nel punto di massima altezza il proiettile esplode dividendosi in due frammenti uguali. L'energia dell'esplosione è $E = 20000\,J$ ed i due frammenti rimangono allineati sulla verticale. Con quale velocità si muovono dopo l'esplosione?

Spiegazione Il proiettile Raggiunge il punto di massima altezza con una certa velocità. L'esplosione rompe il proiettile in due schegge. Nel sistema del baricentro, le due schegge hanno la stessa quantità di moto, grazie alla quale possiamo risalire alla velocità. La velocità dei proiettili nel sistema di riferimento del cannone si otterrà sommando alle velocità dei frammenti quella del proiettile intero.

Svolgimento Sapendo che il proiettile fa un moto parabolico , la velocità nel punto di massima altezza sarà la componente orizzontale della velocità iniziale, quindi

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V} \cdot \cos\theta = 250\,\frac{m}{s}$$

Nel sistema di riferimento del baricentro del proiettile i due frammenti con massa uguale, avranno la stessa quantità di moto e quindi la stessa energia.

$$\begin{cases} m\mathcal{V}_1 = m\mathcal{V}_2 \\ \frac{1}{2}m\mathcal{V}_1^2 + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_2^2 = E \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{4E}{M}} = 200\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Tornando nel sistema di riferimento del cannone, le velocità dei due frammenti saranno

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \mathcal{V}^2\cos^2\theta} = 320,15\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Conservazione dell'impulso - $DP0001$

Testo *[DP0001]* [3 4 2a]
Un pattinatore di massa $m_1 = 80\,kg$ è in piedi sul ghiaccio e lancia orizzontalmente una pietra di massa $m_2 = 2\,kg$ con velocità iniziale $\mathcal{V}_{2i} = 10\,\frac{m}{s}$. Di quanto si sposterà se il coefficiente di attrito dinamico tra i pattini ed il ghiaccio è $\mu_d = 0.02$?

Spiegazione Quando il pattinatore lancia un oggetto subisce una spinta nel verso opposto. Questa spinta implica un movimento con velocità iniziale ed un successivo movimento con accelerazione costante a causa delle forze di attrito.

Svolgimento La velocità con cui il pattinatore indietreggia la si determina con la legge di conservazione dell'impulso

$$m_2\mathcal{V}_{2i} + m_1\mathcal{V}_{1i} = 0$$

da cui

$$\mathcal{V}_{1i} = -\frac{m_2}{m_1}\mathcal{V}_{2i}$$

A questo punto il pattinatore compie un moto uniformemente accelerato con

$$a = \mu_d g$$

$$\Delta S = -\frac{1}{2}\mu_d g\Delta t^2 + \mathcal{V}_{1i}\Delta t$$

La durata del moto è

$$\Delta t = \frac{\Delta\mathcal{V}}{-\mu_d g} = \frac{\mathcal{V}_{1i}}{\mu_d g}$$

Per cui

$$\Delta S = -\frac{\mathcal{V}_{1i}^2}{2\mu_d g} + \frac{\mathcal{V}_{1i}^2}{\mu_d g} = \frac{\mathcal{V}_{1i}^2}{2\mu_d g}$$

Per cui

$$\Delta S = \frac{m_2^2\mathcal{V}_{2i}^2}{2m_1^2\mu_d g}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0001$

Testo *[A0001]* [2 2 3a]
Due corpi di massa $m = 20\,kg$ stanno ruotando con frequenza $\nu_i = 9\,Hz$ legati da una corda lunga $d_i = 2\,m$. Se la corda venisse accorciata fino alla lunghezza $d_f = 1,5\,m$, con quale frequenza ruoterebbero i due corpi?

Spiegazione In questo problema applichiamo la legge di conservazione del momento angolare al corpo rigido in questione.

Svolgimento Il momento angolare del sistema è

$$L = I\omega = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 2\pi\nu$$

Per la legge di conservazione del momento angolare avremo

$$2m\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 \cdot 2\pi\nu_i = 2m\left(\frac{d_f}{2}\right)^2 \cdot 2\pi\nu_f$$

$$d_i^2 \cdot \nu_i = d_f^2 \cdot \nu_f$$

$$\nu_f = \frac{d_i^2}{d_f^2} \cdot \nu_i$$

$$\nu_f = \frac{16}{9} \cdot 9\,Hz = 16\,Hz$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0002$

Testo *[A0002]* [2 2 3a]
Sul bordo di una piattaforma girevole con momento di inerzia $I = 100\,kgm^2$ e raggio $r = 2\,m$, si trova una persona mi massa $M = 60\,kg$. Inizialmente entrambe sono ferme. Calcola la velocità angolare con la quale la piattaforma ruota, quando la persona cammina lungo il bordo della piattaforma con una velocità $\mathcal{U} = 2\,\frac{m}{s}$.

Spiegazione In questo esercizio vale la legge di conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale del sistema è nullo visto che tutto il sistema è fermo. Quando la persona si muove allora il momento angolare della persona è pari e opposto a quello della piattaforma.

Svolgimento

$$L_{i-tot} = L_{f-disco} + L_{f-persona}$$

$$0 = I_{disco}\omega + I_{per}\omega$$

$$0 = I_{disco}\omega - Mr^2 \cdot \frac{\mathcal{U}}{r}$$

$$I_{disco}\omega = M\mathcal{U}r$$

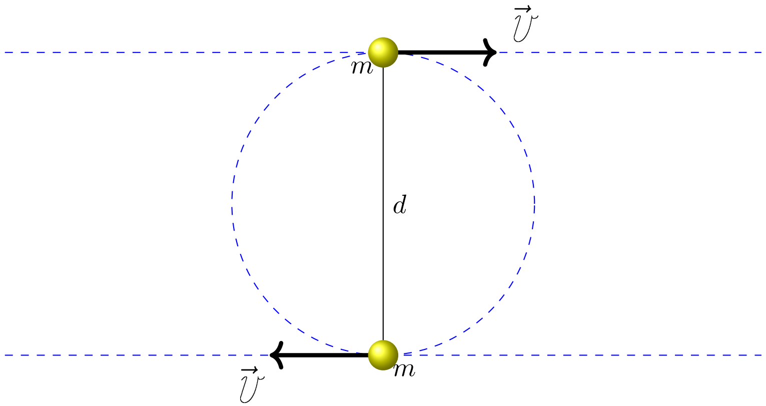
$$\omega = \frac{M\mathcal{U}r}{I_{disco}} = \frac{60\,kg \cdot 2\,\frac{m}{s} \cdot 2\,m}{100\,kgm^2} = 2,4\,\frac{1}{s}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0003$

Testo *[A0003]* [2 2 3a]
Due moduli di un satellite, entrambi di massa $m = 400\,kg$, sono collegati con un cavo inestensibile lungo $d = 5\,m$. Sapendo che il momento angolare del sistema è $L = 100\,\frac{kg\,m^2}{s}$, con quale velocità si muoveranno nell'istante in cui si rompe il filo?

Spiegazione Nell'istante in cui si rompe il filo i due oggetti partono per la tangente e si muovono di moto rettilineo uniforme. In questo esercizio vale la legge di conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale del sistema è uguale al momento angolare complessivo dei due oggetti rispetto al loro baricentro, mentre si muovono di moto rettilineo uniforme.

Svolgimento Utilizziamo la legge di conservazione del momento angolare. Per il momento angolare iniziale possiamo utilizzare il dato del problema. Per il momento angolare finale possiamo utilizzare la definizione stessa di momento angolare come *momento della quantità di moto*. Rispetto all'asse di rotazione, che passa per il baricentro del sistema ed è perpendicolare al piano di rotazione, i momenti angolari dei due oggetti sono uguali, i raggi sono pari a metà della lunghezza della corda, la quantità di moto è $P = m\mathcal{V}$ ed è perpendicolare al raggio.



$$L_i = L_f$$

$$L = 2m\mathcal{V}\cdot\frac{d}{2}$$

$$\mathcal{V} = \frac{L}{m\cdot d} = 0,05\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0004$

Testo *[A0004]* [3 3 3a]
Due moduli di un satellite, entrambi di massa $m = 400\,kg$, sono collegati con un cavo inestensibile lungo $d = 5\,m$. Essi ruotano con frequenza iniziale $\nu_i = 0,1\,Hz$. Cosa cambia se si allunga quel cavo? Di quanto deve essere allungato il cavo per dimezzare la tensione del filo?

Spiegazione Il sistema ha un momento angolare che sicuramente si conserva in quanto tutte le forze in gioco sono forze centrali. La tensione del filo è la forza che permette il moto circolare ed è quindi una forza di tipo centripeto.

Svolgimento Per la legge di conservazione del momento angolare avremo

$$L_i = L_f$$
$$2 \cdot m\frac{d_i^2}{4} \cdot 2\pi\nu_i = 2 \cdot m\frac{d_f^2}{4} \cdot 2\pi\nu_f$$

$$d_i^2\nu_i = d_f^2\nu_f$$

da cui

$$d_i^4\nu_i^2 = d_f^4\nu_f^2$$

Ho elevato al quadrato solo perché mi sarà comodo nei passaggi successivi, non perché sia necessario.

La tensione del filo la si trova sapendo che tale forza è una forza centripeta

$$T = m \cdot 4\pi^2\nu^2\frac{d}{2}$$

$$T = 2m\pi^2\nu^2 d$$

da cui

$$\frac{Td^3}{2m\pi^2} = \nu^2 d^4$$

Utilizzando questa equazione nella conservazione del momento angolare ottengo

$$d_i^3 T_i = d_f^3 T_f$$

per dimezzare la tensione ed avere $T_f = \frac{1}{2}T_i$ avremo

$$d_f^3 = \frac{T_i}{T_f}d_i^3 = 2d_i^3$$

$$d_f = 1,26 \cdot d_i = 6,3\,m$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0005$

Testo *[A0005]* [2 3 3a]
Un disco metallico di massa $m_1 = 5\,kg$ e raggio $r_1 = 30\,cm$ sta ruotando con frequenza $\nu = 50\,Hz$. Ad un certo punto si appoggia su di un disco di legno fermo, di raggio doppio e con la stessa massa. I due dischi condividono lo stesso asse. Con quale frequenza ruoteranno i dischi, a causa dell'attrito tra di essi, quando smetteranno di strisciare uno sull'altro?

Spiegazione In questo problema applichiamo la legge di conservazione del momento angolare ai corpo rigidi in questione. IL punto chiave da capire è che la forza di attrito tra i due dischi, a causa del terzo principio della dinamica, agisce su entrambi i dischi con verso opposto. I relativi momenti delle forze si annullano e di conseguenza il momento angolare di conserva.

Svolgimento Il momento angolare del sistema è

$$L_{tot} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

Trattandosi di dischi avremo

$$L_{tot} = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega_1 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega_2$$

Per la legge di conservazione del momento angolare avremo

$$\frac{1}{2}m_1r_1^2\omega_{1i} + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega_{2i} = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega_{1f} + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega_{2f}$$

Tenendo conto che uno dei due dischi inizialmente è fermo e che dopo essersi toccati ed aver stisciato raggiungeranno la stessa velocità angolare, avremo

$$m_1r_1^2\omega_{1i} = \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{m_1r_1^2\omega_{1i}}{(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)}$$

In questo esercizio i due dischi hanno la stessa massa e raggi tali che $r_2 = 2r_1$, quindi

$$\omega_f = \frac{r_1^2\omega_{1i}}{(r_1^2 + 4r_1^2)}$$

$$\omega_f = \frac{\omega_{1i}}{(1+4)} = \frac{1}{5}\omega_{1i}$$

$$2\pi\cdot\nu_f = \frac{1}{5}\cdot 2\pi\cdot 50\,Hz =$$

$$\nu_f = 10\,Hz$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0006$

Testo *[A0006]* [2 3 3a]
Un bambino di massa $m = 30\,kg$ si trova nel centro di una giostra, di raggio $r = 3\,m$ e momento d'inerzia $I = 540\,kg \cdot m^2$, che ruota con frequenza $\nu_i = 0,3\,Hz$. Con quale frequenza ruoterà la giostra se il bambino si sposta sul bordo di essa?

Spiegazione In questo problema non ci sono forze esterne che possano generare momenti che a loro volta possano far cambiare il momento angolare. Quindi il momento angolare si conserva.

Svolgimento Indicando con gli indici g e b la giostra ed il bambino, avremo che il momento angolare del sistema è

$$L_{tot} = I_g \cdot 2\pi\nu_g + I_b \cdot 2\pi\nu_b$$

Le due frequenze di rotazione sono sempre uguali visto che il bambino è solidale con la giostra. Inizialmente il momento di inerzia del bambino è zero, visto che si trova sull'asse di rotazione. Alla fine il momento di inerzia del bambino è $I_b = mr^2$. Avremo quindi

$$L_{tot_i} = L_{tot_f}$$

$$I_g \cdot 2\pi\nu_i = I_g \cdot 2\pi\nu_f + mr^2 \cdot 2\pi\nu_f$$

$$I_g\nu_i = \left(I_g + mr^2\right)\nu_f$$

$$\nu_f = \frac{I_g\nu_i}{(I_g + mr^2)}$$

$$\nu_f = \nu_i \frac{1}{\left(1 + \frac{mr^2}{I_g}\right)} = 0,3\,Hz \cdot \frac{1}{1 + \frac{270}{540}} = 0,2\,Hz$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0007$

Testo *[A0007]* [3 5 3a]
In un triplo salto mortale un tuffatore esegue $n = 3,5$ rotazioni in un tempo $\Delta t = 2,5\,s$. Di queste, $n_1 = 0,5$ rotazioni avvengono con il corpo disteso e le altre con il corpo raccolto su se stesso. Il momento d'inerzia in posizione distesa vale $I_1 = 24\,kg \cdot m^2$ mentre quello in posizione raccolta vale $I_2 = 6\,kg \cdot m^2$. Con quali frequenze ha ruotato l'atleta?

Spiegazione In questo problema non ci sono forze esterne che possano generare momenti che a loro volta possano far cambiare il momento angolare. Quindi il momento angolare si conserva.

Svolgimento Sapendo che il momento angolare del sistema si conserva possiamo scrivere

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Vale anche la relazione sul numero di rotazioni effettuate

$$\omega_1\Delta t_1 = 2n_1\pi$$

$$\omega_2\Delta t_2 = 2\left(n - n_1\right)\pi$$

ed infine vale

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$$

Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 \\ \Delta t_1 = \frac{2n_1\pi}{\omega_1} \\ \Delta t_2 = \frac{2\pi\left(n - n_1\right)}{\omega_2} \\ \frac{2n_1\pi}{\omega_1} + \frac{2\pi\left(n - n_1\right)}{\omega_2} = \Delta t \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{2n_1\pi}{\omega_1} + \frac{2\pi\,(n-n_1)\cdot I_2}{I_1\omega_1} = \Delta t$$

$$\frac{2n_1\pi}{\Delta t} + \frac{(n-n_1)\cdot I_2}{I_1\Delta t} = \omega_1$$

$$\frac{2\pi}{I_1\Delta t}\cdot[n_1 I_1 + (n-n_1)\cdot I_2] = \omega_1$$

$$\nu_1 = \frac{[n_1 I_1 + (n-n_1)\cdot I_2]}{I_1\Delta t} = \frac{0,5+3\cdot 0,25}{2,5\,s} = 0,5\,Hz$$

$$\nu_2 = \frac{I_1}{I_2}\nu_1 = 2,5\,Hz$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0008$

Testo *[A0008]* [2 3 3a]
Un'astronave ha momento di inerzia complessivo $I_1 = 500\,kg\,m^2$ ed inizialmente non ruota. Sul suo asse centrale, un disco di metallo ruota con momento angolare $L_2 = 30\,kg\frac{m^2}{s}$. Se di colpo tale disco ruotasse la sua inclinazione di $180°$, invertendo il vettore $\vec{L}_2$, con quale frequenza ruoterebbe l'astronave?

Spiegazione In questo problema non ci sono forze esterne che possano generare momenti che a loro volta possano far cambiare il momento angolare. Quindi il momento angolare si conserva.

Svolgimento Inizialmente il momento angolare è quello del disco. Invertendo l'asse di rotazione cambia il momento angolare del disco e di conseguenza cambia il momento angolare dell'astronave in modo da mantenere costante il momento angolare totale. Per la conservazione del momento angolare avremo:

$$L_2 = -L_2 + I_1\cdot 2\pi\nu_1$$

$$\nu_1 = \frac{L_2}{\pi I_1} = \frac{30\,kg\dfrac{m^2}{s}}{\pi\cdot 500\,kgm^2} = 0,019\,Hz$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0009$

Testo *[A0009]* [2 3 3a]
Un cilindro, inizialmente fermo, ha massa $m = 500\,g$ e raggio $r = 2\,cm$, ed è messo in rotazione da una corda arrotolata intorno ad esso e tirata da una forza $F = 10\,N$. Quale velocità angolare avrà raggiunto dopo un tempo $\Delta t = 2\,s$?

Spiegazione Questo problema si risolve applicando il secondo principio della dinamica nella sua versione rotazionale

Svolgimento Il momento della forza sarà

$$M = F \cdot r = 10\,N \cdot 0,02\,m = 0,2\,Nm$$

La variazione di momento angolare sarà

$$\Delta L = M \cdot \Delta t = 0,2\,Nm \cdot 2\,s = 0,4\,kg\frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Il momento angolare sarà quindi

$$L_f = L_{in} + \Delta L = 0,4\,kg\frac{kg \cdot m^2}{s}$$

$$I\omega_f = L_f$$

$$\omega_f = \frac{L_f}{I} = \frac{2L_f}{mr^2} = \frac{2F \cdot r \cdot \Delta t}{mr^2} = \frac{2 \cdot 10\,N \cdot 2\,s}{0,5\,kg \cdot 0,02\,m} = 4000\,\frac{rad}{s}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0010$

Testo *[A0010]* [5 5 5a]
Un corpo si muove secondo la legge oraria indicata di seguito. La forza che lo muove è una forza centrale?

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3\cos(2t) \end{cases}$$

Spiegazione Se una forza è centrale allora il momento angolare del sistema si conserva. Verificando se il momento angolare è costante si dimostra se la forza è centrale.

Svolgimento Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3\cos(2t) \end{cases}$$

Data l'equazione del moto avremo la velocità della particella derivando rispetto al tempo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6\cos(2t) \\ \mathcal{V}_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -6\sin(2t) \end{cases}$$

Il moto avviene su di un piano, quindi il momento angolare ha sempre direzione perpendicolare al piano. Il suo modulo è dato dal prodotto vettoriale con la posizione della particella

$$\begin{cases} L_x(t) = 0 \\ L_y(t) = 0 \\ L_z(t) = x(t) \cdot \mathcal{V}_y(t) - y(t) \cdot \mathcal{V}_x(t) \end{cases}$$

Quindi

$$L_z(t) = 3\sin(2t) \cdot (-6\sin(2t)) - 3\cos(2t) \cdot 6\cos(2t)$$

$$L_z(t) = -18\sin^2(2t) - 18\cos^2(2t) = -18$$

Quindi il momento angolare è costante, per cui la forza è centrale

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0011$

Testo *[A0011]* [4 ⭐ 4 ⌛ 3a 📖]
A causa delle maree, la luna causa un rallentamento della rotazione terrestre corrispondente a $\Delta\theta = 0,00000002283°$ ogni giorno. Sapendo che la luna dista dalla Terra $d = 384400\,km$, con quale velocità la Luna si sta allontanando dalla Terra?

Spiegazione In questo problema applichiamo la legge di conservazione del momento angolare ai corpo rigidi in questione.

Svolgimento Mettiamoci nel sistema di riferimento del centro della Terra; calcoliamo il momento angolare del sistema fisico e poi applichiamo la legge di conservazione del momento angolare: $L_i = L_f$. Avremo:

$$L_{tot} = I_{_{Ter}}\omega_{_{Ter}} + I_{_{Lun}}\omega_{_{Lun}} + M_{_{Lun}}\omega^2_{_{Lun}}d$$

$$I_{_{Ter}}\omega_{i_{Ter}} + I_{_{Lun}}\omega_{i_{Lun}} + M_{_{Lun}}\omega_{i_{Lun}}d_i^2 = I_{_{Ter}}\omega_{f_{Ter}} + I_{_{Lun}}\omega_{f_{Lun}} + M_{_{Lun}}\omega_{f_{Lun}}d_f^2$$

La velocità di rotazione della Luna non cambia, non essendoci sulla Luna le maree; cambia invece la velocità di rotazione della Terra e di conseguenza la distanza Terra-Luna.

$$M_{_{Luna}}\omega_{_{Lun}}d_i^2 - M_{_{Lun}}\omega_{_{Lun}}d_f^2 = I_{_{Ter}}\omega_{f_{Ter}} - I_{_{Ter}}\omega_{i_{Ter}}$$

$$M_{_{Lun}}\omega_{_{Lun}}\left(d_i^2 - d_f^2\right) = I_{_{Ter}}\Delta\omega_{_{Ter}}$$

$$\Delta d = -\frac{I_{_{Ter}}}{2M_{_{Lun}}\omega_{_{Lun}}d_{medio}}\Delta\omega_{_{Ter}}$$

Come si capisce dall'equazione, la variazione della velocità angolare della Terra comporta una variazione negativa della distanza Terra-Luna. Visto che la Terra rallenta la sua rotazione, il momento angolare che viene a mancare è compensato tramite l'allontanamento della Luna.

$$V = \frac{\Delta d}{\Delta t} = -\frac{d}{2}\frac{I_{Ter}}{I_{Lun}}\frac{\Delta\omega_{Ter}}{\omega_{Luna}}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0012$

Testo *[A0012]* [3 3 3a]
Una stazione spaziale, a forma di cilindro cavo di spessore trascurabile, ha raggio $r_s = 100\,m$ e momento di inerzia $I_s = 10^9\,kg\,m^2$ (esclusa la navicella ad essa attaccata). Essa ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega_{si} = 0,3\,\frac{rad}{s}$. Una piccola navicella di massa $m = 2000\,kg$ è ancorata alla stazione ruotando con essa. Calcola la velocità tangenziale V_{ti} della navicella e indicane il verso. La stazione lancia la navicella spingendola nella stessa direzione e verso di V_{ti} e portandola alla velocità $V_{tf} = 4V_{ti}$. Di quanto è variata la velocità angolare della stazione dopo il lancio?

Spiegazione La stazione spaziale spinge la navicella, quindi esercita su di essa una forza e per il terzo principio subisce una forza uguale ed opposta che modificherà la sua velocità angolare. Per questo motivo (cioè per il fatto che consideriamo entrambe le forze sulla navicella e sulla stazione, possiamo affermare che la forza impressa sulla navicella è una forza interna. Vale quindi la legge di conservazione del momento angolare.

Svolgimento La velocità tangenziale della navicella è $V_i = \omega_s \cdot r = 9\,\frac{m}{s}$
Per la legge di conservazione del momento angolare avremo:

$$I_s\omega_{si} + mV_{ti}r_s = I_s\omega_{sf} + mV_{tf}r_s$$

Sappiamo che $V_{tf} = 4V_{ti}$ e quindi

$$I_s\omega_{sf} - I_s\omega_{si} = -3mV_{ti}r_s$$

$$\Delta\omega_s = -\frac{3mV_{ti}r_s}{I_s}$$

$$\Delta\omega_s = -\frac{3 \cdot 2000\,kg \cdot 9\,\frac{m}{s} \cdot 100\,m}{10^9\,kg\,m^2} = 5.4 \cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0012a$

Testo *[A0012a]* [3 3 3a]
Una stazione spaziale ha momento di inerzia $I_s = 10^9\, kgm^2$ (esclusa la navicella ad essa attaccata) ed ha, in prima approssimazione, una forma a cilindro cavo di spessore trascurabile e di raggio $r_s = 100\, m$. Essa è in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare $\omega_s = 20\, \frac{rad}{s}$. Una piccola navicella di massa $m = 2000\, kg$ è ancorata alla stazione ruotando con essa. Calcola la velocità tangenziale $\mathcal{V}_{ti}$ della navicella e indicane il verso. La stazione lancia la navicella spingendola nella stessa direzione ma in verso opposto di $\mathcal{V}_{ti}$ e portandola alla velocità $\mathcal{V}_{tf} = -4\mathcal{V}_{ti}$. Di quanto è variata la velocità angolare della stazione dopo il lancio?

Spiegazione La stazione spaziale spinge la navicella, quindi esercita su di essa una forza e per il terzo principio subisce una forza uguale ed opposta che modificherà la sua velocità angolare. Per questo motivo (cioè per il fatto che consideriamo entrambe le forze sulla navicella e sulla stazione, possiamo affermare che la forza impressa sulla navicella è una forza interna. Vale quindi la legge di conservazione del momento angolare.

Svolgimento La velocità tangenziale della navicella è $\mathcal{V}_i = \omega_s \cdot r = 9\, \dfrac{m}{s}$

Per la legge di conservazione del momento angolare avremo:

$$I_s \omega_{si} + m\mathcal{V}_{ti} r_s = I_s \omega_{sf} + m\mathcal{V}_{tf} r_s$$

Sappiamo che $\mathcal{V}_{tf} = -4\mathcal{V}_{ti}$ e quindi

$$I_s \omega_{sf} - I_s \omega_{si} = 5m\mathcal{V}_{ti} r_s$$

$$\Delta\omega_s = \frac{5m\mathcal{V}_{ti} r_s}{I_s}$$

$$\Delta\omega_s = \frac{5 \cdot 2000\, kg \cdot 9\, \dfrac{m}{s} \cdot 100\, m}{10^9\, kg\, m^2} = 9 \cdot 10^{-3}\, \frac{rad}{s}$$

Problema di: Conservazione del momento angolare - $A0013$

Testo *[A0013]* [3½ 3 3a]
Un pannello di legno quadrato, di massa $M = 500\, g$ e lato $h = 50\, cm$ è posto in verticale e libero di ruotare intorno ad uno dei suoi lati verticali. Esso viene colpito perpendicolarmente nel centro da una scheggia di metallo di massa $m = 50\, g$ che viaggia alla velocità $\mathcal{V} = 10\, \frac{m}{s}$ e che in esso rimase incastrata. Con quale velocità angolare si muoverà il pannello?

Spiegazione La forza che frena la scheggia dentro il legno è una forza interna del sistema fisico, quindi si conserva il momento angolare del sistema.

Svolgimento Prendiamo come asse di rotazione di riferimento quello della tavola di legno. Il momento di inerzia della tavola sarà

$$I = \frac{1}{3} M L^2$$

Inizialmente la tavola non ruota ed il suo momento angolare è nullo.

Il momento angolare della scheggia prima dell'urto, trattata come un punto materiale in moto rettilineo uniforme, è

$$L_0 = m_0 \mathcal{V} \frac{h}{2}$$

in quanto la retta su cui si muove interseca il quadrato nel suo punto centrale.

Per la legge di conservazione del momento angolare abbiamo:

$$L_0 = \left(I + m_0 \frac{h^2}{4}\right) \omega_f$$

Dopo l'urto anelastico la scheggia e il pannello di legno ruoteranno con la stessa velocità angolare. Al momento di inerzia del pannello si vede quindi sommare il momento di inerzia della scheggia.

$$m_0 \mathcal{V} \frac{h}{2} = \left(\frac{1}{3} M + \frac{1}{4} m_0\right) h^2 \omega_f$$

$$6m_0\mathcal{V} = (4M + 3m_0)\, h\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{6m_0\mathcal{V}}{(4M + 3m_0)\, h}$$

$$\omega_f = \frac{3000\,\frac{g\,m}{s}}{2150\,g \cdot 0,5\,m} = 1,4\,\frac{rad}{s}$$

Problema di: Leggi di conservazione - $LP0001$

Testo *[LP0001]* [3 4 2a]
Un oggetto di massa $m_1 = 50\,kg$ si trova su di un piano inclinato senza attrito, all'altezza $h_i = 5\,m$ da terra; esso viaggia ad una velocità $\mathcal{V}_1 = 11\,\frac{m}{s}$. Alla fine del piano inclinato si sposta in orizzontale fino a quando urta un oggetto di massa $m_2 = 100\,kg$ inizialmente fermo e ci rimane attaccato. Con quale velocità viaggeranno dopo l'urto?

Spiegazione Questo problema è di fatto separato in due problemi distinti; nella prima parte abbiamo infatti un oggetto che cade lungo un piano inclinato senza attrito, e nella seconda abbiamo l'urto anelastico dei due oggetti. Per cui dobbiamo prima capire con quale velocità arriva l'oggetto al fondo del piano inclinato, per poi studiare l'urto anelastico e capire con quale velocità si muove il blocco dei due oggetti.

Svolgimento Cominciamo con l'impostare la legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_{1i}^2 + mgh_i = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_{1f}^2 + mgh_f$$

Raccogliendo la massa e semplificandola

$$\frac{\frac{1}{2}\mathcal{V}_{1i}^2 + gh_i}{\frac{1}{2}} = \mathcal{V}_{1f}^2$$

$$\mathcal{V}_{1f} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}m\mathcal{V}_{1i}^2 + mgh_i}{\frac{1}{2}m}}$$

$$\mathcal{V}_{1f} = \sqrt{\mathcal{V}_{1i}^2 + 2gh_i} = 14,8\,\frac{m}{s}$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto, la quantità di moto totale iniziale è uguale alla quantità di moto totale finale.

$$P_{1f} + P_{2i} = P_{blocco}$$

$$m_{1i}\mathcal{V}_{1f} + m_{2i}\mathcal{V}_{2i} = m_{tot}\mathcal{V}_{blocco}$$

In questa equazione si vede che dopo l'urto è presente un solo oggetto la cui massa è pari alla somma delle masse dei due oggetti prima dell'urto.

$$\mathcal{V}_{blocco} = \frac{m_{1i}\mathcal{V}_{1f} + m_{2i}\mathcal{V}_{2i}}{m_{tot}}$$

$$\mathcal{V}_{blocco} = \frac{50\,kg \cdot 14,8\frac{m}{s} - 100\,kg \cdot 0\,\frac{m}{s}}{150\,kg} = 4,93\,\frac{m}{s}$$

Il meno nella formula indica che il secondo oggetto viaggia in direzione opposta rispetto al primo; il fatto che il risultato sia positivo indica che il blocco dei due oggetti viaggia, dopo l'urto, nello stesso verso del primo blocco prima dell'urto.

Problema di: Leggi di Conservazione - $LP0002$

Testo *[LP0002]* [3 ⭐ 5 ⌛ 3a 📖]
Un fucile spara verticalmente un proiettile di massa $m = 0,01\,kg$ con una velocità iniziale $\mathcal{V}_p = 800\,\frac{m}{s}$. Esso penetra in un cubo di legno di lato $l = 2\,dm$ e densità $\rho = 500\,\frac{kg}{m^3}$ colpendolo lungo un asse che passa dal suo baricentro. Quale altezza massima è raggiunta dal blocco?

Spiegazione Il fenomeno fisico in questione si divide in due fenomeni che accadono in sequenza: l'urto anelastico tra il blocco ed il proiettile e la salita del blocco descritta dalla legge di conservazione dell'energia. Non vi è alcuna rotazione in quanto la forza esercitata dal proiettile sul blocco non genera alcun momento; quindi non è necessario introdurre la legge di conservazione del momento angolare..

Svolgimento La massa del blocco è

$$M = \rho \cdot l^3 = 500\,\frac{kg}{m^3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}\,m^3 = 4\,kg$$

Valgono le due equazioni:

$$\begin{cases} m\mathcal{V}_p = (m+M)\cdot\mathcal{V}_{bi} \\ \frac{1}{2}\,(M+m)\,\mathcal{V}_{bi}^2 = (M+m)\,gh_f \end{cases}$$

$$h_f = \frac{\mathcal{V}_{bi}^2}{2g} = \frac{m^2\,\mathcal{V}_p^2}{2g\,(m+M)^2} = \frac{10^{-4}\,kg^2 \cdot 640000\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (4,01\,kg)^2} = 0,2\,m$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $LP0003$

Testo *[LP0003]* [3 5 3a]
Un proiettile di massa $m = 3\,kg$ si muove con velocità $\mathcal{V} = 200\,\frac{m}{s}$. A seguito di una piccola esplosione, il proiettile si rompe in due frammenti di massa uno doppia dell'altro, che si muovono rispettivamente con una direzione inclinata di $\alpha = \pm 30°$ rispetto alla velocità iniziale del proiettile. Con quale velocità si muovono i due frammenti? Quanta energia è stata data dall'esplosione?

Spiegazione L'esplosione genera una coppia di forze interne che sono causa dell'allontanamento dei due proiettili. Vale la legge di conservazione dell'impulso. Con la legge di conservazione dell'energia possiamo poi stimare il lavoro in ingresso.

Svolgimento I due frammanto del proiettile hanno uno una massa doppia dell'altro, quindi possiamo definire le loro masse come $M_1 = m$ ed $M_2 = 2m$. La massa del proiettile sarà $M_p = 3m$

Scriviamo la legge di conservazione dell'impulso

$$\begin{cases} 3m\mathcal{V}_p = m\mathcal{V}_{1x} + 2m\mathcal{V}_{2x} \\ 0 = m\mathcal{V}_{1y} - 2m\mathcal{V}_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_{1x} + 2\mathcal{V}_{2x} \\ \mathcal{V}_{1y} = 2\mathcal{V}_{2y} \end{cases}$$

Dal momento che i due frammenti si muovono con lo stesso angolo α rispetto all'orizzontale, avremo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1y} = \mathcal{V}_1 \sin\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_{2y} = \mathcal{V}_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_{1x} = \mathcal{V}_1 \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_{2x} = \mathcal{V}_2 \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} 3\mathcal{V}_p = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_1 + \sqrt{3}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\mathcal{V}_p = \sqrt{3}\mathcal{V}_2 + \sqrt{3}\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{V}_p = 173,2\,\frac{m}{s} \\ \mathcal{V}_1 = \sqrt{3}\mathcal{V}_p = 346,4\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Utilizzando adesso la legge di conservazione dell'energia, ed indicando con L l'energia fornita al sistema nell'esplosione, avremo

$$3m\mathcal{V}_p^2 + L = m\mathcal{V}_1^2 + 2m\mathcal{V}_2^2$$

$$L = 3m\mathcal{V}_p^2 + \frac{3}{2}\mathcal{V}_p^2 - 3m\mathcal{V}_p^2 = \frac{3}{2}\mathcal{V}_p^2$$

$$L = 600\,J$$

Problema di: Leggi di conservazione - $LP0004$

Testo *[LP0004]* [3 4 3a]
Due oggetti di massa uno tripla dell'altro compiono un urto elastico. Quello con massa minore m_1 viaggia alla velocità $\mathcal{V}_{1i} = 10\,\frac{m}{s}$ verso il secondo con massa m_2 in quiete. Con quale velocità si muoveranno i due oggetti?

Spiegazione Un semplice urto elastico descrivibile quindi con la conservazione dell'impulso e dell'energia

Svolgimento Chiamiamo $\phi = \dfrac{m_2}{m_1} = 3$ Applicando le due leggi di conservazione sulla dinamica traslazionale avremo:

$$\begin{cases} m_1\mathcal{V}_{1i} = m_1\mathcal{V}_{1f} + m_2\mathcal{V}_{2f} \\ m_1\mathcal{V}_{1i}^2 = m_1\mathcal{V}_{1f}^2 + m_2\mathcal{V}_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1i} - \phi\mathcal{V}_{2f} = \mathcal{V}_{1f} \\ \mathcal{V}_{1i}^2 = \mathcal{V}_{1i}^2 + \phi^2\mathcal{V}_{2f}^2 - 2\phi\mathcal{V}_{2f}\mathcal{V}_{1i} + \phi\mathcal{V}_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1i} - \phi\mathcal{V}_{2f} = \mathcal{V}_{1f} \\ 0 = \mathcal{V}_{2f} \cdot \left[(\phi+1)\,\mathcal{V}_{2f} - 2\mathcal{V}_{1i}\right] \end{cases}$$

La prima soluzione, interpretabile come *assenza di collisione*, sarà

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = \mathcal{V}_{1i} \\ \mathcal{V}_{2f} = 0 \end{cases}$$

La seconda soluzione, che descrive gli effetti dell'urto, sarà

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = \dfrac{1-\phi}{1+\phi}\mathcal{V}_{1i} \\ \mathcal{V}_{2f} = \dfrac{2}{\phi+1}\mathcal{V}_{1i} \end{cases}$$

Inserendo adesso i valori numerici otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = -5\,\dfrac{m}{s} \\ \mathcal{V}_{2f} = 5\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Questo significa che il primo oggetto tornerà indietro.

Problema di: Leggi di conservazione - $LP0004$

Testo *[LP0004]* [3 4 3a]
Due oggetti di massa uno tripla dell'altro compiono un urto elastico. Quello con massa minore m_1 viaggia alla velocità $\mathcal{V}_{1i} = 10\,\frac{m}{s}$ verso il secondo con massa m_2 in quiete. Con quale velocità si muoveranno i due oggetti?

Spiegazione Un semplice urto elastico descrivibile quindi con la conservazione dell'impulso e dell'energia

Svolgimento Chiamiamo $\phi = \frac{m_2}{m_1} = 3$ Applicando le due leggi di conservazione sulla dinamica traslazionale avremo:

$$\begin{cases} m_1\mathcal{V}_{1i} = m_1\mathcal{V}_{1f} + m_2\mathcal{V}_{2f} \\ m_1\mathcal{V}_{1i}^2 = m_1\mathcal{V}_{1f}^2 + m_2\mathcal{V}_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1i} - \phi\mathcal{V}_{2f} = \mathcal{V}_{1f} \\ \mathcal{V}_{1i}^2 = \mathcal{V}_{1i}^2 + \phi^2\mathcal{V}_{2f}^2 - 2\phi\mathcal{V}_{2f}\mathcal{V}_{1i} + \phi\mathcal{V}_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1i} - \phi\mathcal{V}_{2f} = \mathcal{V}_{1f} \\ 0 = \mathcal{V}_{2f} \cdot \left[(\phi+1)\,\mathcal{V}_{2f} - 2\mathcal{V}_{1i}\right] \end{cases}$$

La prima soluzione, interpretabile come *assenza di collisione*, sarà

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = \mathcal{V}_{1i} \\ \mathcal{V}_{2f} = 0 \end{cases}$$

La seconda soluzione, che descrive gli effetti dell'urto, sarà

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = \frac{1-\phi}{1+\phi}\mathcal{V}_{1i} \\ \mathcal{V}_{2f} = \frac{2}{\phi+1}\mathcal{V}_{1i} \end{cases}$$

Inserendo adesso i valori numerici otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1f} = -5\,\frac{m}{s} \\ \mathcal{V}_{2f} = 5\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Questo significa che il primo oggetto tornerà indietro.

Problema di: Gravitazione universale - $LA0001$

Testo *[LA0001]* [3 4 3a]
Un satellite percorre un'orbita ellittica intorno alla Terra con massima distanza $r_{max} = 2 \cdot 10^{11}\, m$ e minima distanza $r_{min} = 1 \cdot 10^{11}\, m$. Con quale velocità si muove nei punti dell'orbita più vicino e più distante dalla Terra?

Spiegazione

Svolgimento Per prima cosa definiamo il semiasse maggiore dell'orbita come

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Per la legge di conservazioned del momento angolare, tenuto conto che l'angolo tra la velocità del satellite ed il raggio tra la Terra ed il satellite è un angolo retto, avremo

$$m\mathcal{V}_2 r_2 = m\mathcal{V}_1 r_1$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_2^2 - G\frac{Mm}{r_2}$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 r_2 = \mathcal{V}_1 r_1 \\ \mathcal{V}_1^2 - 2G\dfrac{M}{r_1} = \mathcal{V}_2^2 - 2G\dfrac{M}{r_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 r_2 = \mathcal{V}_1 r_1 \\ \mathcal{V}_1^2 r_1^2 - 2GMr_1 = \mathcal{V}_2^2 r_1^2 - 2G\dfrac{Mr_1^2}{r_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 r_2 = \mathcal{V}_1 r_1 \\ \mathcal{V}_2^2 r_2^2 - 2GMr_1 = \mathcal{V}_2^2 r_1^2 - 2G\dfrac{Mr_1^2}{r_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 r_2 = \mathcal{V}_1 r_1 \\ \mathcal{V}_2^2 \left(r_2^2 - r_1^2\right) = -2GMr_1 \left(\dfrac{r_1}{r_2} - 1\right) \end{cases}$$

Da cui

$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{2GMr_1 \frac{\left(\dfrac{r_1}{r_2} - 1\right)}{(r_1^2 - r_2^2)}}$$

$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{2GM\frac{r_1}{r_2}\frac{1}{(r_1 + r_2)}}$$

$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{r_1}{r_2}}$$

A questo punto troviamo $\mathcal{V}_1$

$$\mathcal{V}_1 = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{r_2}{r_1}}$$

Con i dati del problema avremo

$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}\, kg}{3 \cdot 10^{11} m} \cdot 0,5} = 25,766\, \frac{m}{s}$$

$$\mathcal{V}_1 = 51,532\, \frac{m}{s}$$

Problema di: Gravitazione universale - $LA0002$

Testo *[LA0002]* [4 4 3a]
In un certo istante, due asteroidi di uguale massa $m = 5 \cdot 10^5\, kg$ si muovono nello spazio profondo con eguale velocità $\mathcal{V}_i = 400\, \frac{m}{s}$ con verso opposto e su due direzioni parallele distanti $d = 20000\, km$ tra loro. Se nell'istante iniziale la loro distanza è $r_i = 200000\, km$, qual'è la minima distanza a cui si avvicineranno?

Spiegazione La forza di gravità è una forza conservativa e quindi vale la legge di conservazione dell'energia. Allo stesso tempo, in questo problema, la forza di gravità è una forza interna e ne consegue che anche il momento angolare del sistema si conserva.

Svolgimento Consideriamo due istanti: quello iniziale dato dal problema e quello finale in cui i due oggetti hanno raggiunto la minima distanza. Cominciamo con l'osservare che la condizione di minima distanza implica che le velocità finali sono perpendicolari alla linea che congiunge i due asteroidi.

Scriviamo la legge di conservazione del momento angolare rispetto al baricentro del sistema

$$2 \cdot m\mathcal{V}_f \frac{r_{min}}{2} = 2 \cdot m\mathcal{V}_i \frac{d}{2}$$

$$\mathcal{V}_f r_{min} = \mathcal{V}_i d$$

$$\mathcal{V}_f^2 = \mathcal{V}_i^2 \frac{d^2}{r_{min}^2}$$

Scriviamo adesso la legge di conservazione dell'energia per il sistema dei due oggetti

$$-G\frac{m^2}{r_i} + m\mathcal{V}_i^2 = m\mathcal{V}_f^2 - G\frac{m^2}{r_{min}}$$

L'energia totale iniziale è un parametro fisso del problema e lo chiameremo E_{tot}

$$E_{tot} = -G\frac{m^2}{r_i} + m\mathcal{V}_i^2$$

Anche il momento angolare iniziale è un parametro fisso che chiameremo L_{tot}

$$L_{tot} = 2 \cdot m\mathcal{V}_i \frac{d}{2} = m\mathcal{V}_i d$$

$$E_{tot} = \frac{L^2}{m r_{min}^2} - G\frac{m^2}{r_{min}}$$

$$E_{tot} r_{min}^2 + Gm^2 r_{min} - \frac{L^2}{m} = 0$$

$$r_{min} = \frac{-Gm^2 \pm \sqrt{G^2m^4 + 4E_{tot}\frac{L^2}{m}}}{2E_{tot}}$$

$$r_{min} = -\frac{Gm^2}{2E_{tot}}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4E_{tot}L^2}{G^2m^5}}\right)$$

Di qui troviamo due valori per r. Consideriamo il caso in cui L'energia totale è positiva o nulla. Dei due valori di r quello negativo è da scartare e quello positivo rappresenta la minima distanza raggiunta. Se l'energia totale è negativa allora abbiamo un sistema legato.

Problema di: Meccanica - $LA0003$

Testo *[LA0003]* [3 4 3a]
Un satellite artificiale compie un'orbita ellittica tale per cui al perielio $r_p = 20000\,km$ ha una velocità $\mathcal{V} = 5\,\frac{km}{s}$. Quale velocità avrà all'afelio?

Spiegazione Nel moto di un satellite la forza di gravità è una forza conservativa e centrale. Valgono quindi le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia

Svolgimento Scriviamo le due leggi che governano il moto, cioè la legge di conservazione dell'energia e quella di conservazione el momento angolare, considerando due punti in particolare: l'afelio ed il perielio

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_a^2 - G\cdot\frac{M_{\scriptscriptstyle T}m}{r_a} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_p^2 - G\cdot\frac{M_{\scriptscriptstyle T}m}{r_p}$$

$$I_a\omega_a = I_p\omega_p$$

che possono essere semplificate in

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_a^2 - \frac{GM_{\scriptscriptstyle T}}{r_a} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_p^2 - \frac{GM_{\scriptscriptstyle T}}{r_p}$$

$$r_a\mathcal{V}_a = r_p\mathcal{V}_p$$

Per comodità introduciamo il parametro $\mathcal{V}_{fp}^2 = 2\frac{GM_{\scriptscriptstyle T}}{r_p}$ che rappresenta la velocità di fuga dall'orbita relativa alla distanza r_p

$$\mathcal{V}_{fp}^2 = 2\frac{GM_{\scriptscriptstyle T}}{r_p} = 2\frac{6,67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\cdot 10^{24}\,kg}{2\cdot 10^7\,m} = 4\cdot 10^7\,\frac{m^2}{s^2}$$

Sempre per comodità introduciamo il parametro

$$\phi = \frac{\mathcal{V}_{fp}^2}{\mathcal{V}_p^2} = 1,6$$

Calcoliamo adesso i valori dell'orbita all'afelio

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{r_p\mathcal{V}_p}{\mathcal{V}_a} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\mathcal{V}_a^2 - \dfrac{GM_{\scriptscriptstyle T}\mathcal{V}_a}{r_p\mathcal{V}_p} = \dfrac{1}{2}\mathcal{V}_p^2 - \dfrac{GM_{\scriptscriptstyle T}}{r_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{r_p\mathcal{V}_p}{\mathcal{V}_a} \\[2ex] \mathcal{V}_a^2 - \dfrac{\mathcal{V}_{fp}^2\mathcal{V}_a}{\mathcal{V}_p} = \mathcal{V}_p^2 - \mathcal{V}_{fp}^2 \end{cases}$$

Con un po' di algebra otteniamo quindi per $\mathcal{V}_a$ due soluzioni

$$\mathcal{V}_a^2 - \mathcal{V}_p^2 - \frac{\mathcal{V}_{fp}^2\mathcal{V}_a}{\mathcal{V}_p} + \mathcal{V}_{fp}^2 = 0$$

$$(\mathcal{V}_a - \mathcal{V}_p)(\mathcal{V}_a + \mathcal{V}_p) - \frac{\mathcal{V}_{fp}^2}{\mathcal{V}_p}(\mathcal{V}_a - \mathcal{V}_p) = 0$$

$$(\mathcal{V}_a - \mathcal{V}_p)\left(\mathcal{V}_a + \mathcal{V}_p - \frac{\mathcal{V}_{fp}^2}{\mathcal{V}_p}\right) = 0$$

$$(\mathcal{V}_a - \mathcal{V}_p)\left(\mathcal{V}_a\mathcal{V}_p + \mathcal{V}_p^2 - \mathcal{V}_{fp}^2\right) = 0$$

Di qui le due soluzioni di cui una indica l'afelio e l'altra il perielio. Quella per l'afeio in funzione della velocità del perielio, ed il corrispondente valore del raggio, sarà

$$\begin{cases} \mathcal{V}_a = \dfrac{\mathcal{V}_{pf}^2 - \mathcal{V}_p^2}{\mathcal{V}_p} = \mathcal{V}_p\cdot(\phi - 1) \\[2ex] r_a = \dfrac{r_p\mathcal{V}_p^2}{\mathcal{V}_{pf}^2 - \mathcal{V}_p^2} = r_p\cdot\dfrac{1}{\phi - 1} \end{cases}$$

Con i dati del problema avremo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_a = 5 \cdot 0,6\,\dfrac{km}{s} = 3\,\dfrac{km}{s} \\ \\ r_a = \dfrac{2 \cdot 10^7\,km}{0,6} = 3,3 \cdot 10^7\,m \end{cases}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $LA0055$

Testo *[LA0055]* [3 4 3a]

Un satellite vine lanciato dalla superficie della Terra con una velocità $\mathcal{V}_i = 10\,\dfrac{km}{s}$ ad un angolo $\theta = 15°$ rispetto alla verticale.Quale sarà la distanza massima raggiunta e la velocità a quella distanza? La massa ed il raggio della Terra sono $M = 5,97 \cdot 10^{24}\,kg$ e $R = 6373\,km$

Spiegazione Ecco un esercizio sulle leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare.

Svolgimento Trascuriamo in questo esercizio sia gli effetti dell'atmosfera, sia la rotazione Terrestre.

Cominciamo a calcolare l'energia iniziale per unità di massa del satellite ed il momento angolare per unità di massa dello stesso. Ci serviranno poi successivamente.

$$\mathcal{E} = \frac{E_i}{m} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_i^2 - \frac{GM}{R_i}$$

$$\mathcal{L} = \frac{L}{m} = \mathcal{V}_i R_i \sin\theta$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_f^2 - \frac{G\,M}{r_f}$$

La velocità finale del satellite deve essere perpendicolare al raggio r_f. Alla massima distanza, infatti, la componente radiale della velocità si è annullata ed il satellite non può allontanarsi ulteriormente.

Quindi

$$\mathcal{L} = \mathcal{V}_f r_f$$

Da cui, moltiplicando per r_f^2 e sostituendo l'equazione della conservazione del momento angolare nell'equazione della conservazione dell'energia, avremo

$$\mathcal{E} \cdot r_f^2 = \frac{\mathcal{L}^2}{2} - G\,M \cdot r_f$$

$$2\mathcal{E} \cdot r_f^2 + 2G\,M \cdot r_f - \mathcal{L}^2 = 0$$

Le due soluzioni, corrispondenti alle distanze minima e massima, sono

$$r_f = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{L}^2}}{\mathcal{E}} = -\frac{GM}{2\mathcal{E}}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}\mathcal{L}^2}{G^2M^2}}\right)$$

$$\upsilon_f = \frac{\mathcal{L}}{rf}$$

Inserendo il valori numerici otteniamo

$$G\,M = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}\,kg = 3,98 \cdot 10^{14}\,\frac{m^3}{s^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot 10^8\,\frac{m^2}{s^2} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}\,kg}{6,373 \cdot 10^6\,m}$$

$$\mathcal{E} = \left(5 \cdot 10^7 - \frac{3,98 \cdot 10^{14}}{6,373 \cdot 10^6}\right)\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{E} = -1,25 \cdot 10^7\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}^2 = \left(10^4\,\frac{m}{s} \cdot 6,373 \cdot 10^6\,m \cdot \sin 15°\right)^2 = 2,72 \cdot 10^{20}\,\frac{m^4}{s^2}$$

Quindi

$$r_f = -\frac{3,98 \cdot 10^{14}\,\frac{m^3}{s^2}}{-2,5 \cdot 10^7\,\frac{m^2}{s^2}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2,5 \cdot 10^7\,\frac{m^2}{s^2} \cdot 2,72 \cdot 10^{20}\,\frac{m^4}{s^2}}{15,84 \cdot 10^{28}\,\frac{m^6}{s^4}}}\right)$$

$$r_f = 1,59 \cdot 10^7\,m \cdot (1 \pm (1 - 0,043))$$

$$r_{f1} = 3,1 \cdot 10^4\,km$$

$$r_{f2} = 8,4 \cdot 10^2\,km$$

Dal momento che la distanza minima è minore del raggio della Terra, il satellite ricadrà al suolo senza aver completato un'orbita.

La distanza chiesta dal problema è quindi

$$r_f = 3,1 \cdot 10^4\,km$$

quasi cinque volte il raggio della Terra.

Problema di: Leggi di Conservazione - $LPA0001$

Testo *[LPA0001]* [4 5 3a]
Un fucile spara verticalmente un proiettile di massa $m = 0,01\,kg$ con una velocità iniziale $\mathcal{U}_p = 800\,\frac{m}{s}$. Esso penetra in un cubo di legno di lato $l = 2\,dm$ e densità $\rho = 500\,\frac{kg}{m^3}$ colpendolo lungo un asse che passa a $d = 5\,cm$ dal suo baricentro. Quale altezza massima è raggiunta dal blocco?

Spiegazione Il fenomeno fisico in questione si divide in due fenomeni che accadono in sequenza: l'urto anelastico tra il blocco ed il proiettile, la salita del blocco descritta dalla legge di conservazione dell'energia. La forza esercitata dal proiettile sul blocco genera un momento e fa ruotare il blocco; quindi è necessario introdurre la legge di conservazione del momento angolare.

Svolgimento La massa del blocco è

$$M = \rho \cdot l^3 = 500\,\frac{kg}{m^3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,m^3 = 2\,kg$$

Il momento di inerzia del blocco con il proiettile infilato dentro è $I = I_l + I_p = \frac{1}{6}M \cdot l^2 + md^2 = 0,013\,kgm^2$

Indichiamo con $\mathcal{U}_p$ la velocità del proiettile. Indichiamo inoltre con gli indici i ed f gli istanti iniziale e finale del moto del blocco verso l'alto. Quindi l'indice i indica anche lo stato finale del blocco dopo l'urto anelastico con il proiettile.

Per la legge della conservazione della quantità di moto avremo che nell'istante dell'impatto tra il blocco ed il proiettile

$$m\mathcal{U}_p = (m + M) \cdot \mathcal{U}_{bi}$$

Contemporaneamente vale la legge della conservazione del momento angolare

$$m\mathcal{U}_p d = I\omega_i$$

A queste due equazioni devono essere aggiunte la legge di conservazione del momento angolare e dell'energia totale per il blocco con dentro il proiettile nel suo movimento verso l'alto.

Valgono le quattro equazioni:

$$\begin{cases} m\mathcal{U}_p = (m + M) \cdot \mathcal{U}_{bi} \\ m\mathcal{U}_p d = I\omega_i \\ \frac{1}{2}(M + m)\,\mathcal{U}_{bi}^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = (M + m)\,gh_f + \frac{1}{2}I\omega_f^2 \\ I\omega_i = I\omega_f \end{cases}$$

con le quali risolviamo il problema.

$$h_f = \frac{\mathcal{U}_{bi}^2}{2g} - = \frac{m^2\,\mathcal{U}_p^2}{2g\,(m + M)^2} = \frac{10^{-4}\,kg^2 \cdot 640000\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (2,01\,kg)^2} = 0,2\,m$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - Energia - Momento angolare$G0001$

Testo *[G0001]* [4 5 3a]
Un satellite di massa m sta compiendo un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M a distanza r_1. Per passare ad un'orbita circolare di raggio r_3 compie una manovra chiamata *trasferimento alla Hohmann* che consiste nel modificare la sua velocità al fine di entrare in un'orbita ellittica di trasferimento, con perigeo r_{2p} e apogeo r_{2a}. Raggiunto l'apogeo il satellite modifica nuovamente la sua velocità e si immette nell'orbita circolare di raggio r_3. Calcola le velocità $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_3$ del satellite nelle due orbite circolari, e le due velocità $\mathcal{V}_{2p}$ e $\mathcal{V}_{2a}$ del satellite al perigeo ed all'apogeo dell'orbita di trasferimento. Calcola quanto tempo dura il trasferimento tra le due orbite. Calcola quanta energia serve per compiere il trasferimento.

Spiegazione Il problema si suddivide in tre fasi. La prima fase mentre il satellite si muove di moto circolare uniforme intorno alla Terra. La seconda fase nella quale il satellite segue un'orbita ellittica. La terza fase nella quale il satellite ritorna a seguire un'orbita circolare. I dati del problema, oltre alla massa del pianeta, sono i valori dei raggi delle orbita circolari minore e maggiore. L'orbita ellittica ha come apogeo e perigeo i valori dei due raggi delle orbite circolari.

Svolgimento [...]

Cominciamo a considerare l'orbita circolare inferiore di raggio r_1. Possiamo scrivere

$$G\frac{Mm}{r_1^2} = m\frac{\mathcal{V}_1^2}{r_1}$$

e ricavare la velocità del satellite in quell'orbita

$$\mathcal{V}_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

Lo stesso calcolo ci permette di trovare la velocità dell'orbita circolare superiore

$$\mathcal{V}_3 = \sqrt{\frac{GM}{r_3}}$$

Analizziamo adesso l'orbita ellittica intermedia Sicuramente valgono sia la legge di conservazione dell'energia che la legge di conservazione del momento angolare.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\mathcal{V}_{2p}^2 - G\frac{M\,m}{r_{2p}} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_{2a}^2 - G\frac{M\,m}{r_{2a}} \\ m\mathcal{V}_{2p}r_{2p} = m\mathcal{V}_{2a}r_{2a} \end{cases}$$

dalle quali otteniamo

$$\mathcal{V}_{2p} = \mathcal{V}_{2a}\frac{r_{2a}}{r_{2p}}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - G\frac{M}{r_{2p}} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2 - G\frac{M}{r_{2a}}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - 1\right) = GM\left(\frac{1}{r_{2p}} - \frac{1}{r_{2a}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2}{r_{2p}^2} - 1\right) = 2G\,M\left(\frac{1}{r_{2p}} - \frac{1}{r_{2a}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2\left(\frac{r_{2a}^2 - r_{2p}^2}{r_{2p}^2}\right) = 2G\,M\left(\frac{r_{2a} - r_{2p}}{r_{2a}r_{2p}}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2 = 2G\,M\left(\frac{r_{2p}}{r_{2a}\left(r_{2a} + r_{2p}\right)}\right)$$

$$\mathcal{V}_{2a}^2 = G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_{2p}}{r_{2a}}\right) == G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_1}{r_3}\right)$$

e quindi

$$\mathcal{V}_{2p}^2 = G\,\frac{M}{a}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)$$

Problema di: Gravitazione$G0002$

Testo *[G0002]* [2 ⭐ 2 ⏳ 3a 📖]
Tre oggetti astronomici di massa $M_1 = 2M_s$ $M_2 = 4M_s$ e $M_3 = 5M_s$ si trovano equidistanti tra loro alla distanza $L = 10^{12}\,m$. Quanta energia potenziale gravitazionale è presente nel sistema? Quanto lavoro dovrebbe fare una forza esterna per allontanare fino all'infinito l'oggetto di massa minore?

Spiegazione Questo problema lo possiamo affrontare pensando che il sistema inizialmente è formato da tre oggetti e alla fine solo più da due oggetti. La differenza di energia potenziale è esattamente il lavoro fatto dalle forze esterne per passare da uno stato al successivo.

Svolgimento L'energia potenziale gravitazionale del sistema fisico è inizialmente

$$U_{tot-i} = U_{12} + U_{23} + U_{13} = -G\frac{8M_s^2}{L} - G\frac{20M_s^2}{L} - G\frac{10M_s^2}{L}$$

Alla fine uno degli oggetti si porta ad energia potenziale nulla, quindi

$$U_{tot-f} = U_{23} = -G\frac{20M_s^2}{L}$$

Quindi il lavoro delle forze *esterne* è

$$L_{est} = \Delta U = G\frac{18M_s^2}{L}$$

Problema di: Gravitazione$G0003$

Testo *[G0003]* [2 ⭐ 2 ⏳ 3a 📖]
Una cometa dista dal Sole $d = 4.0\,UA$, e si allontana da esso con una velocità $U = 23.00.5\,\frac{km}{s}$. Trascurando le interazioni con gli altri corpi nel sistema, stabilite se questa cometa è destinata ad abbandonare il sistema solare o se tornerà al suo interno.

Spiegazione Un problema sulla velocità di fuga da un campo gravitazionale.

Svolgimento La velocità di fuga di un corpo a distanza d da un oggetto celeste di massa M, che nel caso in questione sono la distanza della cometa dal Sole e la massa del sole, è data da

$$U_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{d}} = 21\,\frac{km}{s}$$

La velocità misurata per la cometa è in un intervallo di valori

$$22,5\,\frac{km}{s} < U_{com} < 23,5\,\frac{km}{s}$$

e quindi è destinata ad abbandonare il sistema Solare.

Problema di: Gravitazione - $G0004$

Testo *[G0004]* [2 1 1a]
Sapendo che la massa di Marte vale $M = 6,39 \cdot 10^{23} kg$ ed il suo raggio vale $R = 3390\, km$, calcola il valore dell'accelerazione di gravità di Marte. Come cambierebbe tale accelerazione se avessimo un pianeta "X" di raggio doppio e con il doppio della massa?

Spiegazione L'accelerazione di gravità la si trova imponendo l'uguaglianza tra la formula della forza di gravità sulla superficie di un pianeta e la legge di gravitazione universale.

Svolgimento L'accelerazione di gravità sulla superficie del pianeta la si trova scrivendo:

$$m \cdot g_{Marte} = G\frac{M_{Marte} \cdot m}{R^2_{Marte}}$$

$$g = G\frac{M_{Marte}}{R^2_{Marte}} = 3,7\,\frac{m}{s^2}$$

Nel caso di un oianeta il raggio fosse il doppio rispetto al valore di Marte, e fosse doppia anche la massa, l'accelerazione di gravità verrebbe divisa per 2, infatti:

$$g_x = G\frac{M_x}{R^2_x} = G\frac{2 \cdot M_{Marte}}{(2 \cdot R_{Marte})^2} = \frac{1}{2}G\frac{M_{Marte}}{R^2_{Marte}} = \frac{1}{2}g_{Marte}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - Meccanica orbitale $G0005$

Testo *[G0005]* [3 4 2a]
Quanto lavoro deve fare un motore per spostare un satellite di massa m orbitante intorno alla Terra, da un'orbita circolare di raggio r_1 ad un'orbita circolare di raggio r_2?

Spiegazione Il satellite cambia la sua energia potenziale e quella cinetica. Il lavoro fatto dal motore lo si ricaverà con la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Considerando che entrambe le orbite sono circolari, possiamo scrivere che la forza centripeta necessaria è data dalla forza di gravità

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}$$

$$m\mathcal{V}^2 = G\frac{M_T m}{r}$$

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$L + \frac{1}{2}m\mathcal{V}_i^2 - G\frac{M_T m}{r_i} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 - G\frac{M_T m}{r_f}$$

Utilizzando l'informazione che l'orbita è circolare avremo

$$L + \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_i} - G\frac{M_T m}{r_i} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_f} - G\frac{M_T m}{r_f}$$

$$L - \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_i} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_f}$$

$$L = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_f} + \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_i}$$

$$L = \frac{1}{2}GM_T m\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Problema di: Energia - $G0036$

Testo *[G0036]* [2 1 2a]
A quale velocità deve essere lanciato un satellite artificiale di massa $m = 100\,kg$ per uscire dall'orbita terrestre?

Spiegazione Un sistema fisico è un sistema legato quando la sua energia totale è negativa. Un satellite ha energia potenziale gravitazionale ed energia cinetica.

Svolgimento La condizione di sistema non legato è

$$E_{tot} \geq 0$$

da cui nel nostro caso possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{r} \geq 0$$

Immaginando che nell'istante iniziale il satellite si trova sulla superficie della Terra, possiamo scrivere

$$\mathcal{V}^2_{fuga} \geq 2G\frac{M_{Terra}}{R_{Terra}}$$

$$\mathcal{V}_{fuga} \geq \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{5,972 \cdot 10^{24}\,kg}{6380\,km}} = 6147,1\,\frac{m}{s}$$

$$\mathcal{V}_{fuga} \geq 11174\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $G0041$

Testo *[G0041]* [4 3 3a]
Due oggetti astronomici sferici di massa m_1 ed m_2 e raggi r_1 ed r_2 inizialmente fermi, distano tra loro d. Con quale velocità si muoveranno nel momento dell'impatto?

Spiegazione In questo problema semplicemente si applica la legge di conservazione dell'energia, mettendosi nel sistema di riferimento di uno dei due oggetti

Svolgimento Nel sistema di riferimento del baricentro avremo

$$-G\frac{m_1m_2}{d} = -G\frac{m_1m_2}{(r_1+r_2)} + \frac{1}{2}m_1\mathcal{V}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathcal{V}_2^2$$

Allo stesso tempo le quantità di moto dei due corpi devono essere uguali per la legge di conservazione dell'impulso

$$0 = m_1\mathcal{V}_1 - m_2\mathcal{V}_2$$

con $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ positivi. da queste due equazioni avremo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\mathcal{V}_2 \\ -G\dfrac{m_1m_2}{d} + G\dfrac{m_1m_2}{r_1+r_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_2^2}{m_1}\mathcal{V}_2^2 + \dfrac{1}{2}m_2\mathcal{V}_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\mathcal{V}_2 \\ Gm_1m_2\left(\dfrac{1}{(r_1+r_2)} - \dfrac{1}{d}\right) = \dfrac{1}{2}m_2\left(\dfrac{m_2}{m_1}+1\right)\mathcal{V}_2^2 \end{cases}$$

Chiamiamo

$$L = Gm_1m_2\left(\frac{1}{(r_1+r_2)} - \frac{1}{d}\right)$$

la variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\mathcal{V}_2 \\ L = \dfrac{1}{2}m_2\left(\dfrac{m_2}{m_1}+1\right)\mathcal{V}_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{m_2}{m_1} V_2 \\ 2L\dfrac{m_1}{m_2 m_{tot}} = V_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{2L\dfrac{m_2}{m_1 m_{tot}}} \\ V_2 = \sqrt{2L\dfrac{m_1}{m_2 m_{tot}}} \end{cases}$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $G0061$

Testo *[G0061]* [3 3 2a]
Quanta energia ha la Terra nella sua orbita, supposta circolare, intorno al Sole? La massa della Terra è $M_T = 6 \cdot 10^{24}\,kg$; la massa del Sole è $M_T = 2 \cdot 10^{30}\,kg$; La distanza Terra-Sole è $r = 1,5 \cdot 10^{11}\,m$; la costante universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg}$

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Fluidodinamica: soluzioni — Scheda 8

Problema di: Fluidodinamica - $F0001$

Testo *[F0001]* [2 3 2a]
In un tubo orizzontale di sezione $S_1 = 10\,cm^2$ scorre dell'acqua ad una velocità $\mathcal{V}_1 = 8\,\frac{m}{s}$ con una pressione $P_1 = 150000\,Pa$. Ad un certo punto la sezione del tubo aumenta fino al valore $S_2 = 16\,cm^2$. Quanto valgono la velocità e la pressione dell'acqua nella parte larga del tubo?

Spiegazione Un fluido incomprimibile si sta muovendo dentro un tubo. Assumendo che si possano trascurare tutti i fenomeni di attrito, il fluido è soggetto sia alla legge di conservazione della portata che alla legge di Bernoulli.

Svolgimento Applicando la legge di conservazione della portata possiamo scrivere:

$$S_1\mathcal{V}_1 = S_2\mathcal{V}_2$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{S_1\mathcal{V}_1}{S_2} = \frac{10\,cm^2 \cdot 8\,\frac{m}{s}}{16\,cm^2} = 5\,\frac{m}{s}$$

Utilizzando poi la legge di Bernoulli possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + \rho_{H_2O}gh_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + \rho_{H_2O}gh_2 + P_2$$

Visto che il tubo è orizzontale, allora $h_1 = h_2$ e quindi i due termini corrispondenti si possono semplificare. Anche se non so quanto valgono, in quanto non so a che altezza si trova il tubo, so però che sono uguali e in questo caso si semplificano.

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + P_2$$

Sostituendo adesso il valore $\mathcal{V}_2$ quanto calcolato precedentemente

$$\tfrac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + P_1 = \tfrac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2\tfrac{S_1^2}{S_2^2} + P_2$$

$$\tfrac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2\tfrac{S_1^2}{S_2^2} + P_1 = P_2$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2\left(1 - \tfrac{S_1^2}{S_2^2}\right) + P_1$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}1000\tfrac{kg}{m^3}64\tfrac{m^2}{s^2}\left(1 - \tfrac{100\,cm^4}{256\,cm^4}\right) + 150000\,Pa$$
$$P_2 = 169500\,Pa$$

Esercizi concettualmente identici

1. In un tubo orizzontale di sezione $S_1 = 20\,cm^2$ scorre dell'acqua con velocità $\mathcal{V}_1 = 5\,\dfrac{m}{s}$ e con una pressione $P_1 = 200000\,Pa$. Questo tubo ha una strozzatura nel centro, di sezione $S_2 = 4\,cm^2$. Quanto scorre veloce l'acqua nella strozzatura? Quanto vale la pressione nella strozzatura? *[$\mathcal{V}_2 = 25\,\dfrac{m}{s}$; $P_2 = 199500\,Pa$]*

2. In un tubo di sezione $S_1 = 8\,cm^2$, dell'acqua scorre con una velocità $\mathcal{V}_1 = 2\,\dfrac{m}{s}$ ed ad una pressione $P_1 = 12000\,Pa$. Se in un secondo tratto del tubo la sua sezione aumenta passando ad un valore $S_2 = 10\,cm^2$, a quale velocità viaggerà l'acqua? Se il tubo è posto in orizzontale, Quanto vale la pressione nella parte larga del tubo?

Problema di: Fluidodinamica - $F0002$

Testo *[F0002]* [1 1 2a]
In un tubo di sezione $S_1 = 10\,cm^2$ scorre acqua con velocità $U_1 = 3\,\frac{m}{s}$. Il tubo ha una strozzatura nel centro, di sezione $S_2 = 4\,cm^2$. Calcola la portata del tubo e la velocità con cui l'acqua scorre nella strozzatura.

Spiegazione L'acqua è un liquido e quindi incomprimibile. Vale quindi la legge di conservazione della portata.

Svolgimento La portata del tubo è

$$Q = S_1 \cdot U_1 = 10\,cm^2 \cdot 3\,\frac{m}{s} = 0,001\,m^2 \cdot 3\,\frac{m}{s} = 0,003\,\frac{m^3}{s}$$

Per la legge di conservazione della portata avremo che

$$S_2 \cdot U_2 = S_1 \cdot U_1$$

$$U_2 = \frac{S_1 \cdot U_1}{S_2} = \frac{10\,cm^2 \cdot 3\,\frac{m}{s}}{4\,cm^2} = 7,5\,\frac{m}{s}$$

Esercizi concettualmente identici

1. In un tubo di sezione $S_1 = 10\,cm^2$ scorre dell'acqua con velocità $U_1 = 3\,\frac{m}{s}$. Questo tubo ha una strozzatura nel centro, di sezione $S_2 = 4\,cm^2$. Quanto scorre veloce l'acqua nella strozzatura?

2. Di quanto devo diminuire la sezione $S_1 = 600\,cm^2$ di un tubo per far aumentare la velocità del fluido che ci scorre dentro da un valore $U_1 = 5\,\frac{m}{s}$ ad un valore $U_2 = 8\,\frac{m}{s}$?

Problema di: Fluidodinamica - $F0003$

Testo *[F0003]* [1 1 2a]
Il letto di un canale di irrigazione è profondo $h_1 = 2\,m$ e largo $l_1 = 10\,m$, e l'acqua al suo interno scorre con una velocità $U_1 = 0,2\,\frac{m}{s}$; se in un certo tratto la profondità e la larghezza del canale si dimezzano, a quale velocità scorrerà l'acqua in questo secondo tratto? Quanto vale la portata del canale?

Spiegazione L'acqua è un liquido incomprimibile, vale quindi la legge di conservazione della portata. Con i dati a disposizione, assumiamo che la sezione del canale abbia una forma rettangolare; il canale, inizialmente di una certa dimensione, diminuisce ad un certo punto la lua sezione, causando, per la legge di conservazione della portata, un aumento della velocità dell'acqua.

Svolgimento La sezione iniziale del canale vale

$$S_1 = l_1 \cdot h_1 = 10\,m \cdot 2\,m = 20\,m^2$$

La sezione finale del canale vale

$$S_2 = l_2 \cdot h_2 = \frac{l_1}{2} \cdot \frac{h_1}{2} = 5\,m \cdot 1\,m = 5\,m^2$$

La portata del canale è

$$Q = S_1 \cdot U_1 = 20\,m^2 \cdot 0,2\,\frac{m}{s} = 4\,\frac{m^3}{s}$$

Per la legge di conservazione della portata avremo che

$$S_2 \cdot U_2 = S_1 \cdot U_1$$

$$U_2 = \frac{S_1 \cdot U_1}{S_2} = \frac{20\,m^2 \cdot 0,2\,\frac{m}{s}}{5\,m^2} = 0,8\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0004$

Testo *[F0004]* [2 2 2a]
Un vaso cilindrico di sezione $S_1 = 10\,cm^2$ contiene dell'acqua fino ad un certo livello. Nel vaso viene applicato un foro di sezione $S_2 = 1\,mm^2$ ad un'altezza $\Delta h = 40\,cm$ inferiore al livello dell'acqua. Con quale velocità $\mathcal{V}_2$ esce l'acqua dal foro?

Spiegazione Trattandosi di un fluido incomprimibile che si muove, per questo esercizio sarà necessario utilizzare l'equazione di Bernoulli e la legge di conservazione della portata. Nell'applicazione delle equazioni, sarà conveniente considerare come punto iniziale la superficie dell'acqua nel vaso, e come punto finale il foro.

Svolgimento Applicando la legge di conservazione della portata possiamo scrivere:

$$S_1 \mathcal{V}_1 = S_2 \mathcal{V}_2$$
$$\mathcal{V}_1 = \frac{S_2 \mathcal{V}_2}{S_1}$$

Applicando l'equazione di Bernoulli possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + \rho_{H_2O}gh_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + \rho_{H_2O}gh_2 + P_2$$

Cominciamo con il considerare che sia la superficie dell'acqua che il foro si trovano a contatto con l'aria dell'atmosfera e quindi alla stessa pressione. Quindi

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + \rho_{H_2O}gh_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + \rho_{H_2O}gh_2$$

Possiamo quindi ora semplificare ρ_{H_2O} ed ottenere

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_1^2 + gh_1 = \frac{1}{2}\mathcal{V}_2^2 + gh_2$$

Avevamo ricavato $\mathcal{V}_1$ nell'equazione della portata e lo sostituiamo adesso nell'equazione di Bernoulli riorganizzando i termini

$$\frac{1}{2}\frac{S_2^2\mathcal{V}_2^2}{S_1^2} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_2^2 = gh_2 - gh_1$$

Teniamo adesso presente che $h_1 - h_2 = \Delta h$ e raccogliamo a fattor comune $\frac{1}{2}\mathcal{V}_2^2$

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}_2^2\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right) = -g\Delta h$$

da cui, cambiando i segni

$$\mathcal{V}_2^2 = \frac{2g\Delta h}{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}$$
$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}$$
$$\mathcal{V}_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8\frac{m}{s^2} \cdot 0,4\,m}{1 - \frac{1\,mm^2}{10\,cm^2}}} = \sqrt{\frac{7,84\frac{m^2}{s^2}}{1 - \frac{1}{1000}}} = 2,8\frac{m}{s}$$

Notate come il termine a denominatore che contiene le due sezioni risulti essere molto piccolo e quindi praticamente trascurabile.

Problema di: Fluidodinamica - $F0004a$

Testo *[F0004a]* [2 3 2a]
Un contenitore cilindrico viene riempito d'acqua fino all'altezza $h_i = 30\,cm$ dal fondo. All'altezza $h_f = 5\,cm$ dal fondo viene praticato un piccolo foro, di dimensione trascurabile rispetto alla superficie della base del contenitore. Con quale velocità l'acqua esce dal foro?

Spiegazione Mentre l'acqua esce dal foro, il livello dell'acqua nel contenitore si abbassa. Praticamente osserviamo un movimento di fluido che dalla superficie si sposta verso il foro. Utilizziamo quindi il teorema di Bernoulli.

Svolgimento Utilizziamo l'equazione di Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_f^2 + \rho g h_f + P_f = \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_i^2 + \rho g h_i + P_i$$

Teniamo presente che entrambi i lati del flusso di acqua sono a contatto con l'aria e quindi entrambi alla pressione atmosferica P_{atm}

per cui $P_i = P_f = P_{atm}$ si semplificano nell'equazione

$$\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_f^2 + \rho g h_f = \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_i^2 + \rho g h_i$$

$$\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_f^2 - \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_i^2 = \rho g h_i - \rho g h_f$$

A questo punto dobbiamo capire quanto vale la velocità dell'acqua sulla superficie del contenitore. Per questo utilizziamo la legge di conservazione della portata.

$$S_i\mathcal{V}_i = S_f\mathcal{V}_f$$

per cui

$$\mathcal{V}_i = \frac{S_f}{S_i}\mathcal{V}_f$$

ottenendo

$$\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}_f^2 - \frac{1}{2}\rho\frac{S_f^2}{S_i^2}\mathcal{V}_f^2 = \rho g h_i - \rho g h_f$$

$$\frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right)\mathcal{V}_f^2 = \rho g\left(h_i - h_f\right)$$

per cui

$$\mathcal{V}_f^2 = \frac{\rho g\left(h_i - h_f\right)}{\frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right)}$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{\rho g\left(h_i - h_f\right)}{\frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right)}}$$

Se adesso ci soffermiamo sul termine

$$\left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right)$$

dobbiamo considerare che la superficie del foro è molto più piccola della superficie del contenitore, per cui tutto il termine vale 1

$$\left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right) \simeq 1$$

Per cui otteniamo la formula finale

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{g\left(h_i - h_f\right)}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2g\Delta h} = 2,21\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0005$

Testo *[F0005]* [2 2 2a]
Un tubo orizzontale di sezione $S_1 = 10\,cm^2$ è percorso da acqua alla pressione $P_1 = 150000\,Pa$ che si muove alla velocità $V_1 = 8\,\frac{m}{s}$. All'altra estremità del tubo la pressione vale $P_2 = 169500\,Pa$. Con quale velocità l'acqua esce dal tubo? Quale sezione ha il tubo in uscita?

Spiegazione Trattandosi di un fluido incomprimibile che si muove, per questo esercizio sarà necessario utilizzare l'equazione di Bernoulli e la legge di conservazione della portata.

Svolgimento Applicando l'equazione di Bernoulli possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_1^2 + \rho_{H_2O}gh_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_2^2 + \rho_{H_2O}gh_2 + P_2$$

Cominciamo con il considerare che il tubo è orizzontale e quindi $h_1 = h_2$. I due termini contenenti l'altezza sono quindi uguali e si possono semplificare.

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_2^2 + P_2$$

da cui possiamo ricavare la velocità del liquido.

$$\frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_2^2 = P_1 - P_2 + \frac{1}{2}\rho_{H_2O}V_1^2$$

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho_{H_2O}}(P_1 - P_2) + V_1^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho_{H_2O}}(P_1 - P_2) + V_1^2} = 5\,\frac{m}{s}$$

Applicando la legge di conservazione della portata possiamo rispondere alla seconda domanda del problema. Possiamo infatti scrivere:

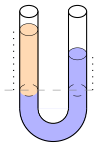
$$S_1V_1 = S_2V_2$$

e calcolarci la sezione della seconda estremità del tubo

$$S_2 = \frac{S_1V_1}{V_2} = 16\,cm^2$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0006$

Testo *[F0006]* [2 2 2a]



Un tubo a forma di U contiene acqua $\left(\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}\right)$ nella sezione di destra e olio $\left(\rho_{olio} = 800\,\frac{kg}{m^3}\right)$ nella sezione di sinistra. I liquidi sono fermi. Sapendo che la colonna di olio ha un'altezza $\Delta h = 20\,cm$, di quanti centimetri la colonnina di olio si trova più in alto della colonnina di acqua?

Spiegazione Con fluidi fermi utilizziamo l'equazione di Stevin. Le due colonne di liquido sono ferme perché sviluppano nel punto di contatto la stessa pressione; il problema si risolve eguagliando le pressioni sviluppate dalle due colonne di liquido.

Svolgimento Consideriamo il punto di contatto dei due liquidi come origine del sistema di riferimento e quindi come punto ad altezza zero. Le due pressioni nel punto di contatto dei liquidi sono

$$P_{H_2O} = P_{olio}$$

$$P_{atm} + \rho_{H_2O} g \Delta h_{H_2O} = P_{atm} + \rho_{olio} g \Delta h_{olio}$$

e semplificando prima la pressione atmosferica P_{atm} e successivamente g

$$\rho_{H_2O}\Delta h_{H_2O} = \rho_{olio}\Delta h_{olio}$$

da cui ricavo l'altezza della colonnina d'acqua ed il dislivello tra le due colonnine

$$\Delta h_{H_2O} = \frac{\rho_{olio}\Delta h_{olio}}{\rho_{H_2O}} = 16\,cm$$

$$d = \Delta h_{olio} - \Delta h_{H_2O} = 4\,cm$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0007$

Testo *[F0007]* [1 1 2a]

Le due sezioni di un torchio idraulico valgono rispettivamente $S_1 = 50\,cm^2$ ed $S_2 = 5\,cm^2$. Sapendo che sulla sezione maggiore viene appoggiato un peso di massa $m = 50\,kg$, quale forza devo fare sulla seconda sezione per mantenere l'equilibrio?

Spiegazione Il torchio idraulico rimane in equilibrio quando le pressioni sulle due sezioni sono uguali. Questa è l'affermazione che permetterà di risolvere il problema. Il risultato finale dell'esercizio dimostra che il torchio idraulico è di fatto una macchina semplice che permette di fare tanto lavoro con una piccola forza.

Svolgimento

$$P_2 = P_1$$

$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}$$

La forza F_1 è la forza di gravità che agisce sul peso, quindi

$$F_2 = \frac{mg\cdot S_2}{S_1} = \frac{50\,kg\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 5\,cm^2}{50\,cm^2} = 49\,N$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0008$

Testo *[F0008]* [2 3 2a]
Un tubo orizzontale in cui scorre acqua ($\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$), ha una sezione iniziale $S_1 = 100\,cm^2$. Successivamente il tubo si stringe diventando di sezione $S_2 = 60\,cm^2$. La pressione nel tratto iniziale del tubo vale $P_1 = 400000\,Pa$, mentre nella sezione più stretta vale $P_2 = 300000\,Pa$. Quanto valgono le due velocità dell'acqua nei due tratti del tubo?

Spiegazione Questo problema di fluidodinamica lo risolviamo utilizzando il principio di Bernoulli e la legge di conservazione della portata. Visto che le richieste del problema sono due, e due sono le leggi fisiche a nostra disposizione, possiamo procedere con la soluzione del problema.

Svolgimento Cominciamo con lo scrivere entrambe le equazioni a nostra disposizione. Essendo le equazioni contemporaneamente vere, esse costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite ($\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$), indicato con la parentesi graffa.

$$\begin{cases} S_1\mathcal{V}_1 = S_2\mathcal{V}_2 \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + \rho_{H_2O}gh_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + \rho_{H_2O}gh_2 + P_2 \end{cases} \tag{8.1}$$

Visto che il tubo di questo esercizio è orizzontale, allora $h_1 = h_2$ ed i termini con le altezze si semplificano in quanto uguali.

$$\begin{cases} S_1\mathcal{V}_1 = S_2\mathcal{V}_2 \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + P_2 \end{cases} \tag{8.2}$$

Entrambe le incognite si trovano in entrambe le equazioni, quindi devo risolvere il sistema con, per esempio, il metodo di sostituzione. Cominciamo con il ricavare $\mathcal{V}_1$ dalla prima equazione

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \frac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + P_2 \end{cases} \tag{8.3}$$

Adesso sostituiamolo nella seconda equazione

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \frac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\frac{S_2^2\mathcal{V}_2^2}{S_1^2} + P_1 = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 + P_2 \end{cases} \tag{8.4}$$

Adesso raggruppiamo i termini che contengono $\mathcal{V}_2$ e spostando le pressioni a destra dell'uguale

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \frac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\frac{S_2^2\mathcal{V}_2^2}{S_1^2} - \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2 = P_2 - P_1 \end{cases} \tag{8.5}$$

Raccogliamo a fattor comune e cambiamo di segno

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \frac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} \\ \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\mathcal{V}_2^2\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = P_1 - P_2 \end{cases} \tag{8.6}$$

Infine risolviamo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_2 = \sqrt{\dfrac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho_{H_2O}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}} = \sqrt{\dfrac{100000\,Pa}{\frac{1}{2}1000\,\frac{kg}{m^3}\,(1-0,36)}} = 17,68\,\dfrac{m}{s} \\ \mathcal{V}_1 = \dfrac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} = \dfrac{S_2\mathcal{V}_2}{S_1} = 14,23\,\dfrac{m}{s} \end{cases} \tag{8.7}$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0009$

Testo *[F0009]* [1 ⭐ 2 ⌛ 2a 📖]
Un subacqueo si trova immerso nelle acque ferme di un lago alla profondità $h_1 = -20\,m$ rispetto al livello del mare. La pressione atmosferica vale $P_{atm} = 100000\,Pa$. A quale pressione si trova? A quale profondità deve arrivare per raddoppiare la pressione a cui si trova?

Spiegazione Visto che questo problema tratta di un fluido fermo, la legge fisica che utilizzeremo è la legge di Stevino $\Delta P = -\rho g \Delta h$

Svolgimento Cominciamo con il considerare il percorso che fa il subacqueo partendo dalla superficie del mare ($h_0 = 0$; $P_0 = P_{atm} = 100000\,Pa$) fino alla profondità h_1

$$\Delta P = -\rho g \Delta h$$
$$(P_1 - P_0) = -\rho g\,(h_1 - h_0)$$
$$P_1 = -\rho g\,(h_1 - h_0) + P_0$$
$$P_1 = -1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(-20\,m) + 100000\,Pa = 296000\,Pa$$

A questo punto il subacqueo scende ulteriormente in profondità fino a raddoppiare la pressione a cui si trova. la pressione raggiunta sarà:

$$P_2 = 2P_1 = 592000\,Pa$$

Considerando adesso il percorso dalla profondità h_1 fino alla profondità h_2 avremo che

$$P_2 - P_1 = -\rho g\,(h_2 - h_1)$$
$$\frac{P_2 - P_1}{-\rho g} = (h_2 - h_1)$$
$$h_2 = -\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + h_1$$
$$h_2 = -\frac{296000\,Pa}{1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}} - 20\,m = -50,2\,m$$

Esercizi concettualmente identici

1. Un tubo in cui scorre acqua è lungo $l = 4\,m$ ed è inclinato verso l'alto di $\alpha = 30°$. Il tubo ha una sezione $S_i = 0,3\,dm^2$ ed al fondo abbiamo un rubinetto di sezione $S_f = 3\,cm^2$ che butta acqua in una vasca. L'acqua esce dal tubo con una velocità $U_f = 2\frac{m}{s}$. Con quale velocità l'acqua entra nel tubo? Quale pressione abbiamo all'ingresso nel tubo? [$U = 0,2\frac{m}{s}$; $P = 117620\,Pa$]

2. Quale pressione deve sopportare una persona che si immerge nell'oceano fino ad una profondità di $\Delta h = -100\,m$? [$1099600\,Pa$]

3. Se mi immergo ad una profondità $\Delta h = -50\,m$ nell'oceano, a quale pressione vengo sottoposto? [$599800\,Pa$]

Problema di: Fluidodinamica - $F0010$

Testo *[F0010]* [1 2 2a]
In un cilindro verticale versiamo mercurio, acqua e olio. La colonna di mercurio è alta $L_{Hg} = 5\,cm$; la colonna d'acqua è alta $L_{H_2O} = 20\,cm$ e la colonna d'olio è alta $L_{olio} = 15\,cm$. La pressione atmosferica vale $P_{atm} = 100000\,Pa$. Trovate la pressione sul fondo della colonna di liquido. Le densità dei liquidi utilizzati sono: $\rho_{olio} = 800\,\frac{kg}{m^3}$; $\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$; $\rho_{Hg} = 13579\,\frac{kg}{m^3}$.

Spiegazione Visto che questo problema tratta di un fluido fermo, la legge fisica che utilizzeremo è la legge di Stevino $\Delta P = -\rho g \Delta h$

Svolgimento L'unico valore di pressione che conosciamo è quello dell'atmosfera in cima alla colonnina di liquido; per questo motivo sarà conveniente fissare li il nostro sistema di riferimento e assegnare a quell'altezza il valore $h_0 = 0\,m$. Di conseguenza fissiamo i valori delle altezze a cui si trovano le linee di separazione tra i diversi liquidi ed il fondo del cilindro:

$$h_a = h_0 - L_{olio} = -15\,cm$$

$$h_b = h_a - L_{H_2O} = -35\,cm$$

$$h_c = h_b - L_{Hg} = -40\,cm$$

Immaginiamo adesso di trovarci sulla superficie della colonna di liquido e di spostarci verso il basso. Dalla legge di Stevino abbiamo che

$$\Delta P_{0\to a} = -\rho g \Delta h_{0\to a} = -\rho g\,(h_a - h_0)$$

$$\Delta P_{0\to a} = -800\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(-15\,cm - 0\,cm) = 1176\,Pa$$

$$\Delta P_{a\to b} = -\rho g \Delta h_{a\to b} = -\rho g\,(h_b - h_a)$$

$$\Delta P_{a\to b} = -1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(-35\,cm + 15\,cm) = 1960\,Pa$$

$$\Delta P_{b\to c} = -\rho g \Delta h_{b\to c} = -\rho g\,(h_c - h_b)$$

$$\Delta P_{b\to c} = -13579\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(-40\,cm + 35\,cm) = 6653,71\,Pa$$

La pressione sulla linea di separazione tra l'olio e l'acqua vale

$$P_a = P_0 + \Delta P_{0\to a}$$

$$P_a = 100000\,Pa + 1176\,Pa = 101176\,Pa$$

La pressione sulla linea di separazione tra l'acqua e il mercurio vale

$$P_b = P_0 + \Delta P_{0\to a} + \Delta P_{a\to b}$$

$$P_b = 100000\,Pa + 1176\,Pa + 1960\,Pa = 103136\,Pa$$

La pressione sul fondo della colonnina di liquido vale

$$P_c = P_0 + \Delta P_{0\to a} + \Delta P_{a\to b} + \Delta P_{b\to c}$$

$$P_c = 100000\,Pa + 1176\,Pa + 1960\,Pa + 6653,71\,Pa = 109789,71\,Pa$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0011$

Testo *[F0011]* [1 1 2a]
Sapendo che un sottomarino in immersione sta subendo una pressione $P = 280000\,Pa$, a quale profonditá si trova rispetto alla superficie?

Spiegazione Visto che questo problema tratta di un fluido fermo, la legge fisica che utilizzeremo è la legge di Stevino $\Delta P = -\rho g \Delta h$

Svolgimento Sappiamo che la densità dell'acqua salata è circa $\rho = 1030\,\frac{kg}{m^3}$. La pressione sulla superficie del mare ad altezza $h_0 = 0$ vale $P_0 = 100000\,Pa$. Il sottomarino si trova alla pressione $P_1 = 280000\,Pa$. Utilizzando la legge di Stevin avremo che

$$\Delta P = -\rho g \Delta h$$

$$(P_1 - P_0) = -\rho g\,(h_1 - h_0)$$

$$\frac{(P_1 - P_0)}{-\rho g} = h_1$$

$$\frac{(P_0 - P_1)}{\rho g} = h_1$$

Utilizzando il valore di densità dell'acqua salata avremo

$$h_1 = \frac{-180000\,Pa}{1030\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$h_1 = -17,83\,m$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0013$

Testo *[F0013]* [1 2 2a]
Un medico misura la pressione sanguigna ad un paziente altro $H = 180\,cm$ mentre è sdraiato su di un lettino, ed ottiene $P_{cuore} = 115\,mmHg$. Quando il paziente si alza in piedi, il suo cuore si trova all'altezza $h_c = 1,5\,m$ da terra. La densità del sangue è $\rho_s = 1060\,\frac{kg}{m^3}$. Quanto vale la pressione del sangue all'altezza del cervello del paziente?

Spiegazione La pressione misurata con il paziente sdraiato corrisponde alla pressione all'altezza del cuore. La pressione del sangue nel cervello è la stessa essendo il cervello alla stessa altezza del cuore. Quando il paziente si alza la testa si trova più in alto e quindi la pressione del sangue diminuisce.

Svolgimento La pressione all'altezza del cuore vale $P_{cuore} = 115\,mmHg = 15332\,Pa$ Utilizzando la legge di Stevin abbiamo

$$P_{testa} = P_{cuore} - \rho_s g \Delta h = P_{cuore} - \rho_s g\,(H - h_c)$$

$$P_{testa} = 15332\,Pa - 1060\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,3\,m = 12216\,Pa$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0014$

Testo *[F0014]* [2 2 2a]
Nella conduttura di una centrale idroelettrica, di sezione costante, scorre acqua con cui produrre corrente elettrica. La superficie del lago si trova alla quota $h_1 = 1500\,m$ s.l.m. ed il fondo della conduttura si trova $\Delta h = 200\,m$ più in basso. Con quale pressione l'acqua esce dalla conduttura?

Spiegazione In questo problema di fluidodinamica si utilizzano la legge di conservazione della portata ed il principio di bernoulli.

Svolgimento Nel problema si specifica che la conduttura ha sezione costante, quindi per la legge di conservazione della portata le velocità di ingresso ed uscita dell'acqua sono le stesse. Guardiamo adesso il principio di Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_i^2 + \rho g h_i + P_i = \frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_f^2 + \rho g h_f + P_f$$

Essa diventa la legge di Stevin

$$\rho g h_i + P_i = \rho g h_f + P_f$$

$$P_f = \rho g h_i - \rho g h_f + P_i = P_i - \rho g \Delta h$$

$$P_f = 100000\,Pa + 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 200\,m = 2060000\,Pa$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0015$

Testo *[F0015]* [1 2 2a]
Un subacqueo si trova a $h_i = -20\,m$ sotto il livello del mare. Di quanti metri deve scendere per raddoppiare la pressione a cui si trova?

Spiegazione La pressione a cui si trova il subacqueo dipende dalla profondità a cui si trova. La legge di Stevin descrive il fenomeno

Svolgimento La pressione a cui si trova inizialmente il subacqueo è

$$P_i = P_{atm} - \rho g \Delta h_i = 10^5\,Pa + 196000\,Pa = 296000\,Pa$$

La profondità a cui deve arrivare per raddoppiare la pressione è

$$P_f = 2P_i = P_{atm} - \rho g \Delta h_f$$

$$\Delta h_f = -\frac{2P_i - P_{atm}}{\rho g} = -50,2\,m$$

Il subacqueo deve quindi scendere di

$$\Delta h = \Delta h_f - \Delta h_i = -30,2\,m$$

Problema di: Fluidodinamica - $F0016$

Testo [F0016] [1 2 2a]
In un tubo di sezione $S = 2\,cm^2$ scorre acqua alla velocità $U = 5\,\frac{m}{s}$. Il tubo termina con una doccia formata da 50 piccoli dori di diametro $d = 1\,mm$. Con quale velocità esce l'acqua dai fori?

Spiegazione Questo problema si risolve con la legge della conservazione della portata.

Svolgimento Per la legge di conservazione della portata avremo:

$$SU = 50 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 U_f$$

$$U_f = \frac{4SU}{50\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2\,cm^2 \cdot 5\,\frac{m}{s}}{50\pi \cdot 0,01\,cm^2} = 25,5\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Fluidodinamica e gravitazione - $FG0001$

Testo [FG0001] [5 4 5a]
Si vuole esplorare le profondità di pianeta liquido completamente liquido. Si supponga il pianeta perfettamente sferico di raggio R e formato da un liquido incomprimibile di densità ρ. Come varia la pressione interna del pianeta in funzione della sua distanza dal centro?

Spiegazione

Svolgimento Prendiamo un punto alla generica distanza h dal centro del pianeta. Sotto di lui una sfera; sopra di lui un guscio sferico cavo. La sfera ha massa

$$M_h = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi h^3$$

. Consideriamo la pressione che il guscio esterno alla sfera di raggio h esercita sulla sfera stessa. Consideriamo un guscio di spessore dh. La sua massa è

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 4\pi h^2 dh$$

La forza di gravità che schiaccia il guscio sulla sfera è dovuta unicamente alla sfera sottostante. Sappiamo infatti che all'interno del guscio esterno il campo gravitazionale è nullo.

Quindi

$$dF = G\frac{M_h}{h^2}dm$$

Sostituendo le varie grandezze otteniamo

$$dF = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi h \cdot \rho \cdot 4\pi h^2 dh$$

$$dF = \frac{16}{3}G\rho^2\pi^2 h^3 dh$$

La pressione sulla sfera sottostante il punto considerato è

$$dP = \frac{dF}{4\pi h^2} = \frac{4}{3}G\rho^2\pi h\,dh$$

Integriamo adesso tra una distanza dal centro h_0 e la superficie R

$$P_{h_0} = \int_{h_0}^{R} dP = \int_{h_0}^{R} \frac{4}{3} G\rho^2 \pi h dh$$

$$P_{h_0} = \frac{4}{3} G\rho^2 \pi \int_{h_0}^{R} h\, dh = \frac{4}{3} G\rho^2 \pi \left[\frac{1}{2} h^2\right]_{h_0}^{R}$$

$$P_{h_0} = \frac{2}{3} G\rho^2 \pi \left(R^2 - h_0^2\right)$$

Problema di: Leggi di Conservazione - $CF0001$

Testo *[CF0001]* [3 4 2a]
Un contenitore cilindrico è riempito di liquido fino ad un'altezza $H = 50\,cm$. Ah un'altezza $h = 25\,cm$ è praticato un foro piccolo rispetto alla sezione del cilindro. A quale distanza dal cilindro cade il liquido?

Spiegazione In questo problema abbiamo un fluido incomprimibile in movmento, quindi sicuramente l'equazione di Bernoulli sarà da utilizzare. Con questa equazione, possiamo ricavare la velocità di uscita del fluido dal foro. A questo punto il problema diventa un problema di cinematica sul moto parabolico che ogni singola molecola compie fuori dal contenitore.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare qual'è la velocità di uscita del fluido dal cilindro utilizzando la legge di Bernoulli e la legge di conservazione della portata.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_i^2 + \rho g h_i + P_i = \frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_f^2 + \rho g h_f + P_f \\ S_i \mathcal{V}_i = S_f \mathcal{V}_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_i = \frac{S_f}{S_i} \mathcal{V}_f \\ \frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_f^2 - \frac{1}{2}\rho \mathcal{V}_i^2 = \rho g h_i - \rho g h_f + P_i - P_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_i = \frac{S_f}{S_i} \mathcal{V}_f \\ \frac{1}{2}\rho V_f^2 - \frac{1}{2}\rho \frac{S_f^2}{S_i^2} \mathcal{V}_f^2 = \rho g h_i - \rho g h_f + P_i - P_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_i = \frac{S_f}{S_i} \mathcal{V}_f \\ \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{S_f^2}{S_i^2}\right) \mathcal{V}_f^2 = \rho g \left(h_i - h_f\right) + P_i - P_f \end{cases}$$

Consideriamo adesso che il liquido si trova sempre a pressione atmosferica sia nel foro, sia sulla superficie nella parte alta del contenitore, quindi $P_i = P_f$. Consideriamo poi che il foro è estremamente più piccolo della sezione del cilindro, quindi $S_f << S_i$ e di conseguenza

$$\left(1 - \frac{S_i^2}{S_f^2}\right) \sim 1$$

Consideriamo infine il termine, il quale, considerati i dati del problema, vale $L = h_i - h_f = H - h$. Quindi avremo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i = \dfrac{S_f}{S_i}\mathcal{U}_f \\ \dfrac{1}{2}\rho\mathcal{U}_f^2 = \rho g\,(H-h) \quad \Rightarrow V_f^2 = 2g\,(H-h) \end{cases}$$

Passiamo adesso all'analisi del moto parabolico del liquido in uscita dal foro. Considerato che la velocità iniziale del liquido è orizzontale, l'equazione del moto è

$$\begin{cases} \Delta S_y = -\dfrac{1}{2}g\Delta t^2 = h \\ \Delta S_x = V_f\Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ \Delta S_x = V_f\Delta t \end{cases}$$

La gittata del flusso è quindi

$$\Delta S_x = \sqrt{2g\,(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h\,(H-h)}$$

Con i dati del problema avremo

$$\Delta S_x = 50\,cm$$

Problema di: Cinematica e Fluidodinamica - $CF0002$

Testo *[CF0002]* [3 3 2a]
Un contenitore pieno di acqua è appoggiato sul bordo di un piatto rotante di raggio $r = 0,5\,m$. Il piatto rotante viene messo in rotazione con frequenza $\nu = 1\,Hz$. Quale pressione si misura ad una profondità $h = -30\,cm$ sotto il livello dell'acqua?

Spiegazione Con la legge di Stevin si calcola facilmente la pressione che si ha ad una certa profondità in un liquido fermo. Il liquido si muove di moto circolare uniforme, ma nel sistema di riferimento del liquido esso è fermo, ma subisce un'accelerazione data dalla somma dell'accelerazione di gravità con l'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione del piano.

Svolgimento L'accelerazione totale percepita è data dalla somma dell'accelerazione di gravità, verticale verso il basso, e dell'accelerazione centripeta, orizzontale verso l'esterno della piattaforma rotante. L'accelerazione complessiva è quindi

$$g_{tot} = \sqrt{g^2 + \left(4\pi^2\nu^2 r\right)^2}$$

$$g_{tot} = 22\,\frac{m}{s^2}$$

Con la legge di Stevin

$$P = P_{atm} - \rho g_{tot}\Delta h = 100000\,Pa + 6600\,Pa = 106600\,Pa$$

Problema di: Fluidodinamica - $DF0001$

Testo *[DF0001]* [2 2 2a]
Su di un bicchiere interamente riempito di acqua, profondo $h = 4,5\,cm$ e di sezione $S = 20\,cm^2$, viene appoggiato un disco di plastica di massa $m = 3\,g$. Il bicchiere viene poi capovolto e si vede che il disco non cade. Con quanta forza il disco viene schiacciato contro il bicchiere?

Spiegazione In questo problema abbiamo un disco di plastica in equilibrio sotto l'azione di tre forze: la forza di gravità sul disco verso il basso, la forza di pressione dovuta all'aria sotto il disco e quindi diretta verticale verso l'alto, e la forza di pressione della colonna d'acqua sopra il disco diretta verticale verso il basso. Il problema chiede il valore della reazione vincolare del bicchiere, infatti il bicchiere reagisce alla forza con cui quel disco di plastica viene schiacciato contro di esso, mantenendo tale disco fermo. Sebbene con verso opposto, la reazione vincolare del bicchiere è uguale alla forza che schiaccia il disco contro il bicchiere.

Fig. 8.1: *Guarda il video youtu.be/gl5ZULcGcKY*

Svolgimento Considerato che, una volta capovolto, la parte superiore non contiene aria e quindi non esiste pressione atmosferica sopra la colonna di acqua, possiamo dire che la pressione dovuta all'acqua sul disco di plastica è unicamente riconducibile alla colonna di acqua. La pressione dell'acqua nel punto di contatto con il disco di plastica è quindi

$$P_{acqua} = \rho g h = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot 0,045\,m = 441\,Pa$$

La forza di gravità è

$$F_g = mg = 0,003\,g \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2} = 0,0294\,N$$

La condizione di equilibrio statico del disco di plastica si scrive:

$$F_g + F_{acqua} + R_v = F_{aria}$$

$$F_g + P_{acqua} \cdot S + R_v = P_{atm} \cdot S$$

$$R_v = P_{atm} \cdot S - P_{acqua} \cdot S - F_g = (P_{atm} - Pacqua) \cdot S - F_g = 199\,N$$

Indice