Esercizi svolti di fisica

Andrea de Capoa

17 marzo 2024

Ricerca per parole chiave

Gli esercizi di questo libro sono tutti catalogati per parole chiave sul sito "Maledetta fisica". Andate all'indirizzo Ricerca esercizi ed inserite il codice privato **anonimo**. Potrete così ricercare gli esercizi per argomento.

In alcuni esercizi è contenuto un link ad un video su YouTube con una videolezione che spiega l'esercizio. Il canale YouTube con tutti gli esercizi è raggiungibile con il link @maledettafisica

Introduzione all'opera

Scheda 2

2.1 Lo scopo del progetto

L'apprendimento della fisica passa spesso attraverso la risoluzione di esercizi. I concetti fondanti della materia sono spesso molto più profondi di quanto non appaia a prima vista, e spesso si imparano sempre meglio e più in profondità quando ci si trova di fronte a problemi che non si riesce a risolvere. Con questo libro voglio fornire agli studenti delle scuole superiori uno strumento per mettere alla prova le proprie conoscenze e sviluppare le relative abilità. Per questo motivo tutti gli esercizi sono risolti, e quei pochi ancora non risolti verranno risolti quanto prima. Buon lavoro.

2.2 Lo stato dell'arte

L'opera è in continua evoluzione. Se mi scriverete all'email *decapoa@gmail.com* potrete indicarmi quali argomenti ritenete sia più utile sviluppare, correggere, sostituire, ampliare, ecc. ecc. Vi sarò grato dell'aiuto che vorrete fornire.

Problema di: Elettrostatica - $E0001$

Testo *[E0001]* [2 3 4a]
Una particella con carica $q = 4\,nC$ è immersa in un campo elettrico uniforme $E = 10\,\frac{N}{C}$. Sotto l'azione di una forza esterna, essa effettua uno spostamento lungo un percorso circolare di raggio $r = 5\,m$. Tale spostamento ha inizio con una velocità perpendicolare alle linee di campo del campo elettrico. Quanto vale la differenza di potenziale agli estremi del percorso? Quanto lavoro ha fatto la forza elettrica sulla carica?

Spiegazione Abbiamo una carica che si muove all'interno di un campo elettrico uniforme. Possiamo quindi calcolare la differenza di potenziale tra i punti di partenza e arrivo, sapendo che nel caso elettrostatico tale differenza non dipende dalla forma del percorso.

Svolgimento Con la descrizione del movimento data dal testo, avremo che i punti di partenza ed arrivo della carica sono sulla stessa linea di campo, e che tale linea è una retta. Quindi

$$\Delta V = -E \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha = -2Er$$

La variazione di energia potenziale della carica è data da

$$\Delta U = q\Delta V$$

Il lavoro fatto dalla forza elettrica è quindi

$$L = -\Delta U = 2qEr$$

Problema di: Elettrostatica - $E0002$

Testo *[E0002]* [1 2 4a]
Strofinando due oggetti si sviluppa tra loro una forza attrattiva $F = 10\,\mu N$ se posti alla distanza $r = 10\,cm$. Quanti elettroni sono passati da un oggetto all'altro?

Spiegazione Un esercizio sull'elettrizzazione per strofinio. Dovete sapere esattamente cosa accade.

Svolgimento L'elettrizzazione per strofinio avviene in quanto tra i due corpo strofinati si verifica un passaggio di elettroni. Il valore della carica tra i due corpi è quindi in modulo uguale. Chiamato Q tale valore avremo

$$F = K\frac{Q^2}{r^2}$$

$$Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 F r^2} = 1,1 \cdot 10^{-17}\,C$$

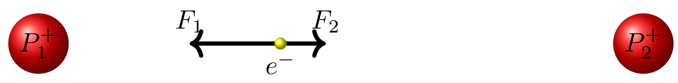
Per avere il numero di elettroni è sufficiente dividere per la carica del singolo elettrone.

$$n = \frac{Q}{e} \sim 69$$

Problema di: Elettrostatica - $E0003$

Testo *[E0003]* [1 2 4a]
Due protoni si trovano alla distanza $d = 2 \cdot 10^{-9}\,m$; tra loro si trova un elettrone posto alla distanza $r_1 = 8 \cdot 10^{-10}\,m$ da uno dei protoni. Quanto vale la forza complessiva che agisce sull'elettrone?

Spiegazione La forza che agisce su due cariche elettriche è la forza di Coulomb. In questo esercizio ognuno dei due protoni esercita una forza sull'elettrone. Queste due forze sono tra loro parallele e opposte e terdono quindi a cancellarsi.



Svolgimento Tenendo presente che il protone e l'elettrone hanno la stessa carica, indicata con e, la forza che il primo protone esercita sull'elettrone vale.

$$F_1 = K\frac{e^2}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C}{64 \cdot 10^{-20}\,m^2} = 3,6 \cdot 10^{-10}\,N$$

Tenendo conto che la distanza tra il secondo protone e l'elettrone vale

$$r_2 = d - r_1 = 12 \cdot 10^{-10}\,m$$

la forza che il secondo protone esercita sull'elettrone vale

$$F_2 = K\frac{e^2}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C}{144 \cdot 10^{-20}\,m^2} = 1,6 \cdot 10^{-10}\,N$$

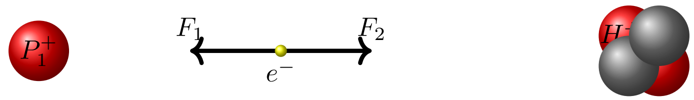
La forza complessiva sull'elettrone, diretta verso il primo protone, vale quindi

$$F_{tot} = F_1 - F_2 = 2 \cdot 10^{-10} N$$

Problema di: Elettrostatica - $E0003a$

Testo *[E0003a]* [1 2 4a]
Un protone ed un nucleo di elio si trovano alla distanza $d = 2 \cdot 10^{-9}\,m$; tra loro si trova un elettrone posto alla distanza $r_1 = 8 \cdot 10^{-10}\,m$ dal protone. Quanto vale la forza complessiva che agisce sull'elettrone?

Spiegazione La forza che agisce su due cariche elettriche è la forza di Coulomb. In questo esercizio il protone esercita una forza attrattiva sull'elettrone esattamente come il nucleo di elio. Queste due forze sono tra loro parallele e opposte e tendono quindi a cancellarsi.



Svolgimento Tenendo presente che il protone e l'elettrone hanno la stessa carica, indicata con e, la forza che il protone esercita sull'elettrone vale.

$$F_1 = K\frac{e^2}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C}{64 \cdot 10^{-20}\,m^2} = 3,6 \cdot 10^{-10}\,N$$

La carica elettrica del nucleo di elio è doppia rispetto a quella del protone, perchè il nucleo di elio ha due protoni, quindi, tenendo conto che la distanza tra il nucleo di elio e l'elettrone vale

$$r_2 = d - r_1 = 12 \cdot 10^{-10}\,m$$

la forza che il nucleo di elio esercita sull'elettrone vale

$$F_2 = K\frac{e \cdot (2e)}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,C}{144 \cdot 10^{-20}\,m^2} = 3,2 \cdot 10^{-10}\,N$$

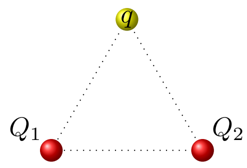
La forza complessiva sull'elettrone, diretta verso il primo protone, vale quindi

$$F_{tot} = F_1 - F_2 = 0,4 \cdot 10^{-10} N$$

Problema di: Elettrostatica - $E0004$

Testo *[E0004]* [3 4 4a]

Tre cariche elettriche si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 2\,m$. Due di queste valgono $Q_1 = +16\,\mu C$ e $Q_2 = +24\,\mu C$. Disegna e calcola quanto vale il campo elettrico $\vec{E}_{tot}$ generato da queste due cariche sulla terza. Calcola l'angolo che $\vec{E}_{tot}$ forma con il segmento identificato dalle due cariche positive.



Spiegazione In questo esercizio ognuna delle due cariche positive emette sulla terza carica un campo elettrico. I vettori campo delle cariche si sommano tra loro con le regole dei vettori per avere il campo elettrico complessivo. Il calcolo del campo elettrico è un problema geometrico, che come tale fornisce pure l'informazione sull'inclinazione del campo stesso.

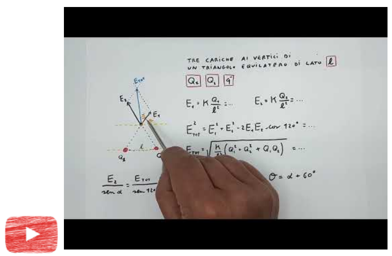
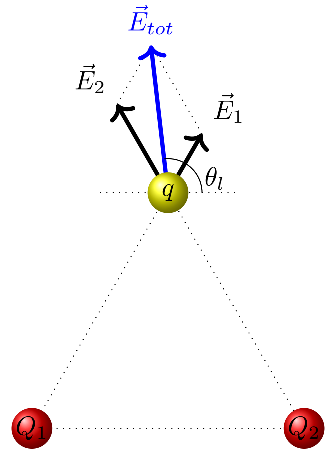


Fig. 3.1: *Guarda il video youtu.be/XKqBfF7cJtc*

Svolgimento



Il campo elettrico generato dalla carica positiva Q_1 vale

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{16\,\mu C}{4\,m^2} = 3,6 \cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

Il campo elettrico generato dalla carica positiva Q_2 vale

$$E_2 = K\frac{Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{24\,\mu C}{4\,m^2} = 5,2 \cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

I due vettori campo generati dalle due cariche positive sono messi a $\alpha = 60°$ essendo le tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero. Per sommare i due vettori utilizziamo quindi un po' di geometria considerando che il campo elettrico totale è una delle due diagonali del parallelogramma formato dai due vettori campo. Utilizzando il teorema di Carnot sul triangolo i cui lati sono i due campi elettrici E_1, E_2 ed E_{tot} avremo

$$E_{tot} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\left(180° - \alpha\right)}$$

$$E_{tot} = K\frac{1}{r^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_1Q_2}$$

$$E_{tot} = \frac{9 \cdot 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2} \cdot}{4\,m^2}\sqrt{1216\,\mu^2C^2} = 78,46\,\frac{kN}{C}$$

L'angolo che il campo forma con la verticale posso calcolarlo sempre utilizzando un po' di geometria. Il parallelogramma ha due angoli di $60°$ e due angoli di $120°$ Nei due triangoli in cui $\vec{E}_{tot}$ divide il parallelogramma gli angoli opposti ai vettori campo delle singole cariche posso trovarli con il teorema dei seni

$$\frac{E_{tot}}{\sin(120°)} = \frac{E_i}{\sin(\alpha_i)}$$

da cui

$$\sin\alpha_1 = \frac{2E_1}{\sqrt{3}\cdot E_{tot}} = 0,530$$
$$\sin\alpha_2 = \frac{2E_1}{\sqrt{3}\cdot E_{tot}} = 0,765$$

L'angolo richiesto dal problema a seconda di come orientiamo il segmento identificato dalle due cariche risulta essere

$$\theta_l = 60° + \arcsin 0,765$$

oppure

$$\theta_r = 60° + \arcsin 0,53$$

Un modo alternativo per poter arrivare allo stesso risultato per la somma dei due campi elettrici è quello di scomporre i due vettori nelle loro componenti orizzontali e verticali e successivamente effettuarne la somma. Nella figura vedete i due vettori in nero $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ che sono quelli che precedentemente abbiamo calcolato con l'opportuna formula per il campo elettrico.

I passaggi che ci portano al calcolo della somma sono i seguenti:

1. I due vettori neri sono stati scomposti nelle loro due componenti orizzontale e verticale rappresentate nel disegno dai quattro vettori arancioni. Sappiamo calcolare il modulo dei vettori arancioni in quanto sappiamo dal problema che l'inclinazione dei campi elettrici rispetto all'orizzontale è di $60°$, informazione che deduciamo dalla geometria del problema.

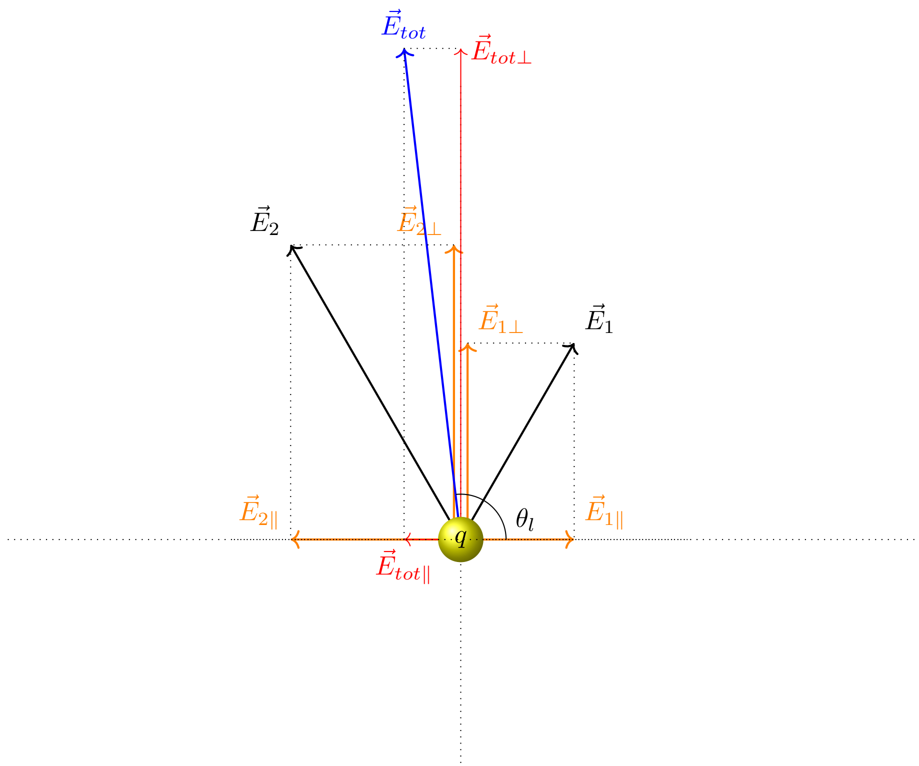
$$\begin{cases} E_{i\parallel} = E_i\cos(60°) \\ E_{i\perp} = E_i\sin(60°) \end{cases}$$

2. I due vettori in rosso sono la somma delle componenti arancioni, sommati a due a due i vettori verticali ed i vettori orizzontali.

$$\begin{cases} E_{tot\perp} = E_{2\perp} + E_{1\perp} \\ E_{tot\parallel} = E_{2\parallel} - E_{1\parallel} \end{cases}$$

3. Il campo elettrico totale sulla carica di prova è quindi la somma dei due vettori disegnati in rosso

$$E_{tot} = \sqrt{E^2_{tot\perp} + E^2_{tot\parallel}}$$



Per calcolare l'angolo richiesto, esso si otterrà dal triangolo formato con i tre vettori E_{tot}, cioè il campo complessivo e le sue due componenti orizzontale e verticale

$$\tan\theta_r = \frac{\vec{E}_{tot\perp}}{\vec{E}_{tot\parallel}}$$

od in modo alternativo $\theta_l = 180° - \theta_r$ a seconda di quale orientazione scegliamo per il segmento tra le due cariche elettriche conosciute.

Problema di: Elettrostatica - $E0005$

Testo *[E0005]* [2 3 4a]
Quattro cariche elettriche si trovano ai vertici di un quadrato di lato $l = 2\,m$. tre di queste valgono $Q_+ = +8\,\mu C$ ed una $Q_- = -8\,\mu C$. Quanto vale il campo elettrico nel centro del quadrato? Quanto vale la forza che agirebbe su di una carica $q = 2\,\mu C$ posta nel centro del quadrato?

Spiegazione La forza che agisce sulle cariche elettriche è la forza di Coulomb. in questo esercizio ognuna delle quattro cariche emette nel centro del quadrato un campo elettrico. I vettori campo delle cariche si sommano tra loro con le regole dei vettori per avere il campo elettrico complessivo nel centro del quadrato. Calcoliamo prima il campo elettrico complessivo nel centro del quadrato e poi la forza che agisce sulla carica posta nel centro.

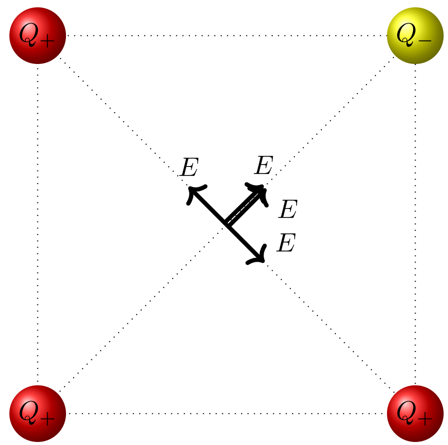


Fig. 3.2: *Schema delle forze in gioco.*

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che, a meno del segno, tutte le cariche elettriche hanno lo stesso valore numerico e la stessa distanza dal centro. Tale distanza corrisponde a metà della diagonale del quadrato per cui

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + l^2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

I moduli dei vettori campo elettrico nel centro del quadrato saranno quindi identici e varranno

$$E = K\frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{8\,\mu C}{2\,m^2} = 36 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

Le direzioni ed i versi dei vettori sono mostrati in figura 3.2

Appare evidente che due dei vettori si cancella tra loro ed altri due si sommano perfettamente, per cui

$$E_{tot} = 2E = 72 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

La forza che subisce la carica negativa nel centro è opposta al vettore campo elettrico e vale

$$F = qE = 2\,\mu C \cdot 72 \cdot 10^3\,\frac{N}{C} = 0,144\,N$$

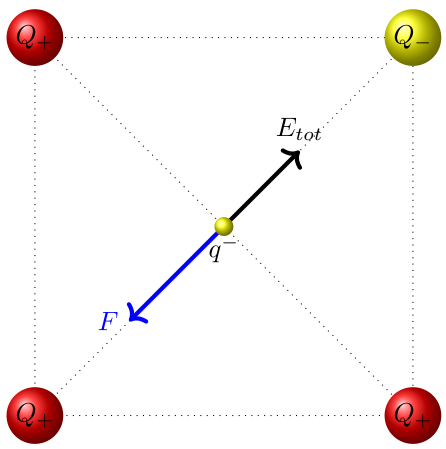
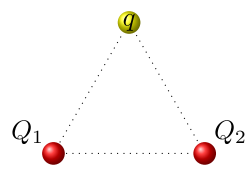


Fig. 3.3: *Schema delle forze in gioco.*

Problema di: Elettrostatica - $E0006$

Testo *[E0006]* [2 3 4a]

Tre cariche elettriche si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 2\,m$. Esse valgono $Q_1 = +8\,\mu C$, $Q_2 = +8\,\mu C$ e $q = -8\,\mu C$. Quanto vale il campo elettrico generato dalle due cariche positive sulla carica negativa? Quanto vale la forza che agisce sulla carica negativa?



Spiegazione La forza che agisce sulle cariche elettriche è la forza di Coulomb. In questo esercizio ognuna delle due cariche positive emette sulla carica negativa un campo elettrico. I vettori campo delle cariche si sommano tra loro con le regole dei vettori per avere il campo elettrico complessivo. Calcoliamo prima il campo elettrico complessivo sulla carica negativa e poi la forza che agisce su di essa.

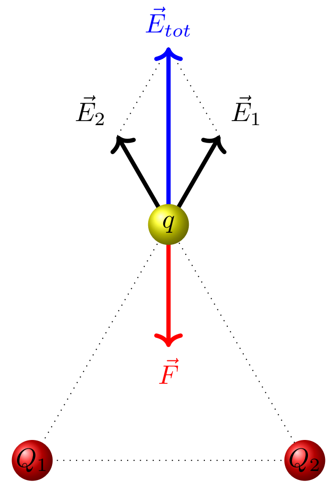


Fig. 3.4: *Le tre cariche ed i vettori campo e forza coinvolti in questo problema.*

Svolgimento Il campo elettrico generato dalle cariche positive vale

$$E = K\frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{8\,\mu C}{4\,m^2} = 18 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

I due vettori campo generati dalle due cariche positive sono messi a $\alpha = 60°$ essendo le tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero. Per sommare i due vettori utilizziamo quindi un po' di geometria considerando che il campo elettrico totale è bisettrice dell'angolo tra i due vettori.

Il campo elettrico totale è quindi

$$E_{tot} = 2 \cdot E_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 31 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

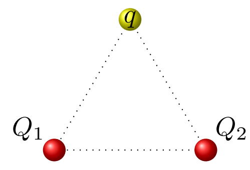
La forza subita dalla carica negativa è quindi

$$F = qE = 8\,\mu C \cdot 31 \cdot 10^3\,\frac{N}{C} = 249,4 \cdot 10^{-3}\,N$$

Problema di: Elettrostatica - $E0007$

Testo *[E0007]* [3 4 4a]

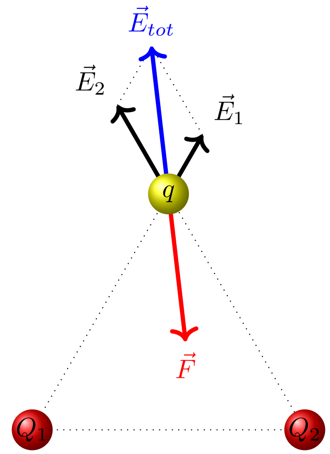
Tre cariche elettriche si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 2\,m$. Esse valgono $Q_1 = +8\,\mu C$, $Q_2 = +12\,\mu C$ e $q = -2\,\mu C$. Disegna e calcola quanto vale il campo elettrico generato dalle due cariche positive sulla carica negativa. Calcola la forza che agisce sulla carica negativa e l'energia potenziale elettrostatica del sistema.



Spiegazione La forza che agisce sulle cariche elettriche è la forza di Coulomb. In questo esercizio ognuna delle due cariche positive emette sulla carica negativa un campo elettrico. I vettori campo delle cariche si sommano tra loro con le regole dei vettori per avere il campo elettrico complessivo. Calcoliamo prima il campo elettrico complessivo sulla carica negativa e poi la forza che agisce su di essa.

Per l'energia potenziale del sistema applichiamo semplicemente la formula a tutte le coppie di cariche presenti

Svolgimento



Il campo elettrico generato dalla carica positiva Q_1 vale

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r^2} = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{8\,\mu C}{4\,m^2} = 18\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

Il campo elettrico generato dalla carica positiva Q_2 vale

$$E_2 = K\frac{Q_2}{r^2} = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{12\,\mu C}{4\,m^2} = 27\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

I due vettori campo generati dalle due cariche positive sono messi a $\alpha = 60°$ essendo le tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero. Per sommare i due vettori utilizziamo quindi un po' di geometria considerando che il campo elettrico totale è una delle due diagonali del parallelogramma formato dai due vettori campo. Utilizzando il teorema di Carnot sul triangolo i cui lati sono i due campi elettrici E_1, E_2 ed E_{tot} avremo

$$E_{tot} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\left(180° - \alpha\right)}$$

$$E_{tot} = K\frac{1}{r^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_1Q_2}$$

$$E_{tot} = \frac{9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot}{4\,m^2}\sqrt{304\,\mu^2C^2} = 39,23\,\frac{kN}{C}$$

La forza subita dalla carica negativa è quindi

$$F = qE = 2\,\mu C\cdot 39,2\cdot 10^3\,\frac{N}{C} = 78,4\cdot 10^{-3}\,N$$

Per calcolare adesso l'energia potenziale elettrostatica del sistema considereremo tutte le coppie di cariche e scriveremo

$$U_{tot} = K\frac{Q_1Q_2}{r} + K\frac{Q_1q}{r} + K\frac{qQ_2}{r}$$

$$U_{tot} = \frac{K}{r}\left(Q_1Q_2 + Q_1q + qQ_2\right) = \frac{9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{2m}\left(+96\,\mu^2C^2 - 16\,\mu^2C^2 - 24\,\mu^2C^2\right)$$

$$U_{tot} = \frac{9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{2m}\left(+56\,\mu^2C^2\right) = 252\,mJ$$

Un modo alternativo per poter arrivare allo stesso risultato per la somma dei due campi elettrici è quello di scomporre i due vettori nelle loro componenti orizzontali e verticali e successivamente effettuarne la somma. Nella figura vedete i due vettori in nero $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ che sono quelli che precedentemente abbiamo calcolato con l'opportuna formula per il campo elettrico.

I passaggi che ci portano al calcolo della somma sono i seguenti:

1. I due vettori neri sono stati scomposti nelle loro due componenti orizzontale e verticale rappresentate nel disegno dai quattro vettori arancioni. Sappiamo calcolare il modulo dei vettori arancioni in quanto sappiamo dal problema che l'inclinazione dei campi elettrici rispetto all'orizzontale è di $60°$, informazione che deduciamo dalla geometria del problema.

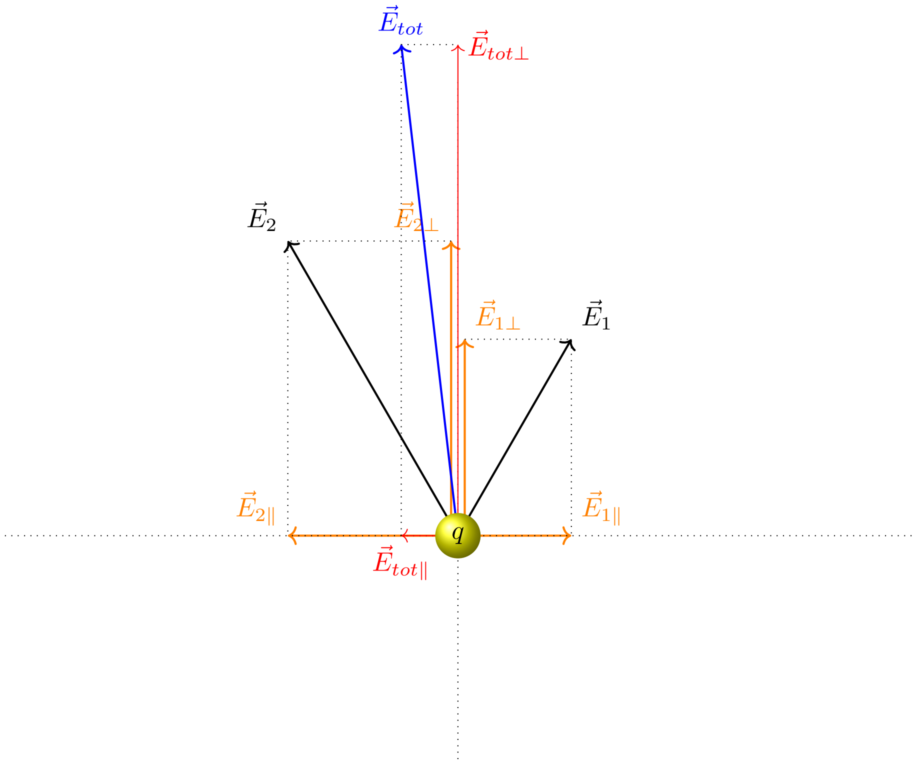
$$\begin{cases} E_{i\parallel} = E_i\cos(60°) \\ E_{i\perp} = E_i\sin(60°) \end{cases}$$

2. I due vettori in rosso sono la somma delle componenti arancioni, sommati a due a due i vettori verticali ed i vettori orizzontali.

$$\begin{cases} E_{tot\perp} = E_{2\perp} + E_{1\perp} \\ E_{tot\parallel} = E_{2\parallel} - E_{1\parallel} \end{cases}$$

3. Il campo elettrico totale sulla carica di prova è quindi la somma dei due vettori disegnati in rosso

$$E_{tot} = \sqrt{E_{tot\perp}^2 + E_{tot\parallel}^2}$$



Problema di: Elettrostatica - $E0008$

Testo *[E0008]* [3 4 4a]
Due cariche elettriche, entrambe di valore $Q = +8\,\mu C$, sono poste a distanza $d = 2\,m$. Dove deve essere posizionata, sul segmento congiungente le due cariche, una terza carica $q = -\frac{10}{9}\,\mu C$ affinché l'energia potenziale del sistema sia nulla?

Spiegazione Per calcolare l'energia potenziale del sistema applichiamo semplicemente la formula a tutte le coppie di cariche presenti. La carica negativa è posta a distanza x dal centro del sistema. Imponendo che l'energia complessiva sia nulla si può ottenere il valore di x e quindi la posizione della carica negativa.

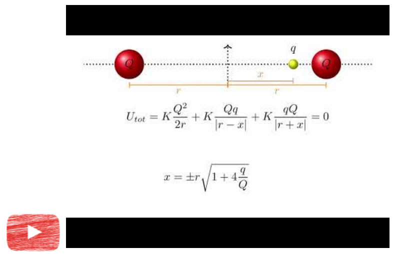


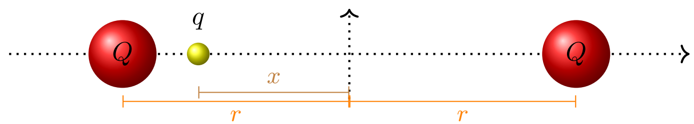
Fig. 3.5: *Guarda il video youtu.be/63H0lh-gfZY*

Svolgimento Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema considereremo tutte le coppie di cariche e poi imponiamo che la somma delle energie sia nulla come richiesto dal testo. Il punto centrale tra le due cariche è il nostro riferimento, e l'asse delle x è la retta congiungente le due cariche.

Le due cariche si trovano quindi a distanza

$$r = \frac{d}{2} = 1\,m$$

dall'origine del sistema di riferimento.



$$U_{tot} = K\frac{Q^2}{2r} + K\frac{Qq}{|r-x|} + K\frac{qQ}{|r+x|} = 0$$

Le distanze sono messe in valore assoluto un quanto la formula dell'energia potenziale elettrostatica prevede a denominatore una distanza definita positiva. Considerando pero che, per punti sul segmento tra le cariche, x è sempre minore di r allora possiamo togliere i valori assoluti ricordandoci di accettare soltanto soluzioni con $x < r$.

Togliendo quindi i valori assoluti e semplificando KQ avremo

$$\frac{Q}{2r} + \frac{q}{r-x} + \frac{q}{r+x} = 0$$

Svolgiamo i calcoli

$$\frac{Q\left(r^2 - x^2\right) + 2qr\left(r+x\right) + 2qr\left(r-x\right)}{2r\left(r-x\right)\left(r+x\right)} = 0$$

$$\frac{Qr^2 - Qx^2 + 4qr^2 + 2qrx - 2qrx}{2r\left(r-x\right)\left(r+x\right)} = 0$$

$$Qr^2 - Qx^2 + 4qr^2 = 0$$

$$x^2 = r^2\left(1 + 4\frac{q}{Q}\right)$$

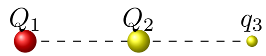
$$x = \pm r\sqrt{1 + 4\frac{q}{Q}} = \pm\frac{2}{3}m$$

La carica deve essere posta a circa 67 cm dal punto centrale tra le due cariche indifferentemente verso la prima o la seconda carica. Il fatto che ci siano due soluzioni simmetriche riflette la simmetria del sistema fisico.

Problema di: Elettromagnetismo - $E0009$

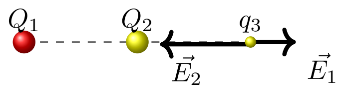
Testo *[E0009]* [1 3 4a]

Due cariche elettriche $Q_1 = 4\mu C$ e $Q_2 = -4\mu C$ si trovano su di una linea orizzontale alla distanza $d = 2\,m$. Sulla stessa linea, ad altri due metri dalla carica negativa, una carica di prova $q_3 = -2\mu C$. Quanto vale il campo elettrico totale sulla carica q_3? Quanto vale la forza che subisce la carica q_3.



Spiegazione Ogni carica elettrica emette un campo elettrico; una carica elettrica immersa in un campo elettrico subisce una forza. In questo esercizio dobbiamo calcolare il campo elettrico emesso dalle due cariche nel punto in cui metto la carica di prova. Successivamente ci calcoliamo la forza esercitata sulla carica di prova.

Svolgimento Lo schema dei campi elettrici è il seguente:



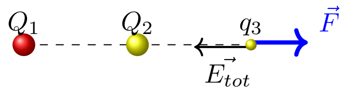
I campi delle due cariche sulla carica di prova, e la loro somma vettoriale, valgono:

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{4\cdot 10^{-6}C}{16\,m^2} = 2,25\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

$$E_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{4\cdot 10^{-6}C}{4\,m^2} = 9\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

$$E_{tot} = E_2 - E_1 = 6,75\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$$

Lo schema per la forza è il seguente:



La forza che la carica di prova subisce vale

$$F = q_3 E_{tot} = 2\cdot 10^{-6}C\cdot 6,75\cdot 10^3\,\frac{N}{C} = 13,5\cdot 10^{-3}\,N$$

Problema di: Elettrostatica - $E0010$

Testo *[E0010]* [3 2 4a]
Una carica elettrica $q = 4\,\mu C$, di massa $m = 5\,mg$, è accelerata da ferma da un campo elettrico costante $E = 10\,\frac{N}{C}$. A quale velocità viaggia dopo uno spostamento di $\Delta S = 2\,m$?

Spiegazione La carica elettrica è immersa in un campo elettrico e quindi subisce una forza. Il lavoro di quella forza è pari alla variazione di energia cinetica della carica.

Svolgimento Il lavoro della forza elettrica è

$$L = qE \cdot \Delta S = 80\,\mu J$$

La carica è inizialmente ferma, quindi con energia cinetica iniziale pari a zero. Per la legge di conservazione dell'energia, sommando all'energia cinetica iniziale il lavoro fatto dalla forza, otteniamo l'energia cinetica finale della carica.

Quindi

$$E_{cf} = E_{ci} + L = 0 + 80\,\mu J$$

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}^2 = E_{cf}$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2E_{cf}}{m}} = \sqrt{\frac{160\,\mu J}{5\,mg}} = 5,66\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0011$

Testo *[E0011]* [1 1 4a]
Tre sfere conduttrici identiche hanno carica elettrica rispettivamente $Q_1 = 12\,\mu C$ e $Q_2 = Q_3 = 0$. La prima sfera sarà messa a contatto con la seconda e poi da essa separata. La seconda spera sarà infine messa a contatto con la terza e poi separata. Quale sarà la carica elettrica della terza sfera?

Spiegazione Elettrizzazione per contatto. La prima sfera carica la seconda e poi la seconda carica la terza.

Svolgimento Quando le prime due sfere si toccano, essendo conduttori identici, si dividono la carica elettrica, quindi:

$$Q_{1'} = Q_{2'} = 6\,\mu C$$

Quando la seconda sfera tocca la terza, essendo conduttori identici, si dividono la carica elettrica, quindi:

$$Q_{2''} = Q_{3''} = 3\,\mu C$$

Problema di: Elettrostatica - $E0012$

Testo *[E0012]* [3 5 4a]
Due cariche elettriche $q_1 = 2\,muC$ e $q_2 = 4\,muC$ hanno la stessa massa. Esse sono sparate da distanza infinita, una contro l'altra, entrambe con energia cinetica $E = 10^{20}\,eV$. A quale distanza minima arrivano?

Spiegazione La forza repulsiva tra le due cariche elettriche trasforma l'energia cinetica delle stesse in energia potenziale elettrostatica. Con la legge di conservazione dell'energia possiamo risolvere il problema.

Svolgimento Le due cariche elettriche hanno energia potenziale elettrostatica iniziale $U_i = 0$ in quanto sono a distanza infinita. Nel punto di minima distanza avranno energia cinetica $E_{cf} = 0$. Questo perché le due cariche, avendo la stessa energia cinetica e la stessa massa, avranno necessariamente anche la stessa quantità di moto. Quindi la quantità di moto del sistema è nulla. Sappiamo che le due cariche si respingono, e non essendoci energia infinita in questo sistema fisico, di sicuro una delle due si dovrà fermare. In quell'istante, per la legge di conservazione della quantità di moto, anche l'altra deve essere ferma.

Dalla legge di conservazione dell'energia abbiamo

$$U_i + E_{ci1} + E_{ci2} = U_f + E_{cf1} + E_{cf2}$$

$$0 + E_{ci1} + E_{ci2} = K\frac{q_1 q_2}{r_f}$$

$$r_f = K\frac{q_1 q_2}{E_{ci1} + E_{ci2}}$$

$$r_f = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-12}\,C^2}{200\,eV} = 2,25\,mm$$

Problema di: Elettrostatica - $E0013$

Testo *[E0013]* [3 ⭐ 4 ⏳ 4a 📖]
Una carica $q = 10^{-6}\,C$ si trova $h = 5\,cm$ al di sopra di una superficie quadrata di superficie $100\,cm^2$. Quanto vale il flusso del campo elettrico attraverso quella superficie?

Spiegazione Il campo elettrico della carica ha simmetria sferica e quindi è differente in ogni punto della superficie quadrata indicata. Per calcolare il flusso è comunque possibile utilizzare il teorema di Gauss, notando che un cubo che abbia come faccia la superficie quadrata in questione, ha anche come suo centro la posizione della carica q

Svolgimento Il lato della superficie quadrata è $l = \sqrt{S} = 10\,cm$ pari al doppio della distanza della carica dalla superficie.

Consideriamo un cubo che abbia come centro la carica e come superficie di base la superficie data dal problema. Per il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(\vec{E})_{cubo} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{10^{-6}\,C}{8,8\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}} 0,114\cdot 10^6\,\frac{Nm^2}{C}$$

Vista la simmetria del problema il flusso attraverso la superficie S è un sesto del flusso complessivo

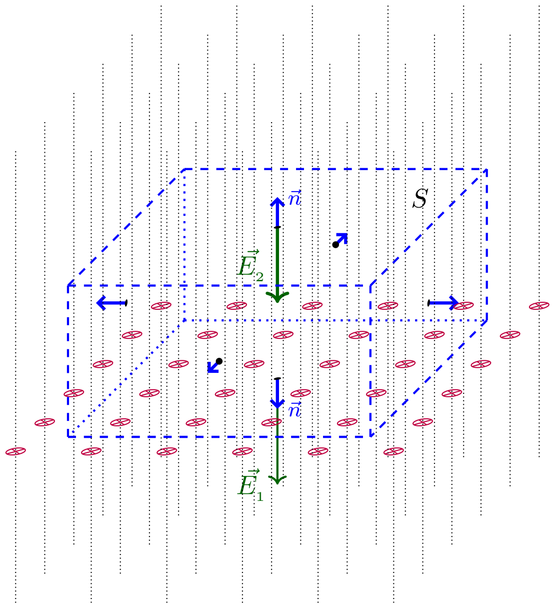
$$\Phi(\vec{E})_S = \frac{1}{6}\Phi(\vec{E})_{cubo} = 0,02\cdot 10^6\,\frac{Nm^2}{C}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0014$

Testo *[E0014]* [3 ⭐ 3 ⏳ 4a 📖]
Nell'atmosfera terrestre è presente un campo elettrico verticale rivolto verso il basso. Ad altezza $h_1 = 50\,m$ il campo elettrico vale $E_1 = 140\,\frac{N}{C}$; ad altezza $h_2 = 100\,m$ esso vale $E_2 = 100\,\frac{N}{C}$. Calcola la densità media di carica presente in atmosfera. *[La costante dielettrica relativa dell'aria vale $\epsilon_r = 1,0006$]*

Spiegazione Abbiamo un volume di spazio nel quale è presente un campo elettrico. Utilizzando il teorema di Gauss possiamo determinare il valore della carica elettrica presente nel volume.

Svolgimento Immaginiamo di prendere una superficie chiusa a forma di parallelepipedo posta con due superfici orizzontali e di altezza pari alla differenza di quota dei due campi indicati nel problema. Definiamo il vettore superficie di ogni faccia orientato verso l'esterno del parallelepipedo. Indichiamo con S l'area delle basi del parallelepipedo.



Il flusso del campo elettrico attraverso il parallelepipedo è:

$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$+E_1 \cdot S - E_2 \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$+E_1 \cdot S - E_2 \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$\frac{Q_{int}}{S} = \epsilon\left(+E_1 - E_2\right)$$

La densità volumetrica di carica la si ottiene dividendo per Δh

$$\rho = \frac{Q_{int}}{S \cdot \Delta h} = \epsilon \frac{(E_1 - E_2)}{\Delta h}$$

$$\rho = 8,8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} \cdot 1,0006 \cdot \frac{40\,\frac{N}{C}}{50\,m} = 7,1 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{m^3}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0014a$

Testo *[E0014a]* [3 3 4a]
Un campo elettrico orizzontale in ogni punto dello spazio, parallelo all'asse x di un opportuno sistema di riferimento e con verso concorde con quell'asse, è tale per cui $E_{x=0\,m} = 50\,\frac{N}{C}$ mentre $E_{x=2\,m} = 200\,\frac{N}{C}$. Determina la densità di carica di quel volume di spazio tra i due valori di x indicati.

Spiegazione Utilizzando il teorema di Gauss possiamo avere informazioni sulla distribuzione delle cariche elettriche conoscendo le caratteristiche del campo

Svolgimento Scegliamo come superficie chiusa un parallelepipedo di sezione S ed altezza $h = 2\,m$ parallela all'asse delle x. Il verso del vettore superficie è quello esterno alla superficie stressa.

Il flusso del campo elettrico risulterà nullo su tutte le superfici laterali. Avremo quindi

$$\Phi(E)_{S_1} + \Phi(E)_{S_2} = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$-E_{x=0\,m} \cdot S + E_{x=2\,m} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon}$$

I segni sono dovuti al fatto che su una delle due superfici il vettore campo è concorde con il vettore superficie, mentre sull'altra avviene l'opposto.

$$-E_{x=0\,m} \cdot S + E_{x=2\,m} \cdot S = \frac{\delta \cdot S \cdot h}{\epsilon}$$

$$-50\,\frac{N}{C} + 200\,\frac{N}{C} = \frac{\delta \cdot 2\,m}{\epsilon}$$

Ipotizzando che ci si trovi nel vuoto

$$\delta = 75\,\frac{N}{C\,m} \cdot 8.85418782 \cdot 10^{-12}\,\frac{A^2\,s^4}{m^3\,kg} = 6,64 \cdot 10^{-10}\,\frac{C}{m^3}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0014b$

Testo *[E0014b]* [3 3 4a]
Un campo elettrico orizzontale in ogni punto dello spazio, parallelo all'asse x di un opportuno sistema di riferimento e con verso discorde con quell'asse, è tale per cui $E_{x=0\,m} = 50\,\frac{N}{C}$ mentre $E_{x=2\,m} = 200\,\frac{N}{C}$. Determina la densità di carica di quel volume di spazio tra i due valori di x indicati.

Spiegazione Utilizzando il teorema di Gauss possiamo avere informazioni sulla distribuzione delle cariche elettriche conoscendo le caratteristiche del campo

Svolgimento Scegliamo come superficie chiusa un parallelepipedo di sezione S ed altezza $h = 2\,m$ parallela all'asse delle x. Il verso del vettore superficie è quello esterno alla superficie stressa.

Il flusso del campo elettrico risulterà nullo su tutte le superfici laterali. Avremo quindi

$$\Phi(E)_{S_1} + \Phi(E)_{S_2} = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$-E_{x=0\,m} \cdot S + E_{x=2\,m} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon}$$

I segni sono dovuti al fatto che su una delle due superfici il vettore campo è concorde con il vettore superficie, mentre sull'altra avviene l'opposto.

$$E_{x=0\,m} \cdot S - E_{x=2\,m} \cdot S = \frac{\delta \cdot S \cdot h}{\epsilon}$$

$$50\,\frac{N}{C} - 200\,\frac{N}{C} = \frac{\delta \cdot 2\,m}{\epsilon}$$

Ipotizzando che ci si trovi nel vuoto

$$\delta = -75\,\frac{N}{C\,m} \cdot 8.85418782 \cdot 10^{-12}\,\frac{A^2\,s^4}{m^3\,kg} = -664\,\frac{C}{m^3}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0015$

Testo *[E0015]* [2 3 4a]
Quattro cariche elettriche si trovano ai vertici di un quadrato di lato $L = 2\,m$. Esse valgono $Q_1 = +2\,\mu C$, $Q_2 = +3\,\mu C$, $Q_3 = -5\,\mu C$ e $Q_4 = +7\,\mu C$. Quanto vale il campo elettrico nel centro del quadrato? Quanto vale la forza che agirebbe su di una carica $q = 1\,\mu C$ posta nel centro del quadrato? Disegna con precisione le cariche, i campi elettrici e la forza.

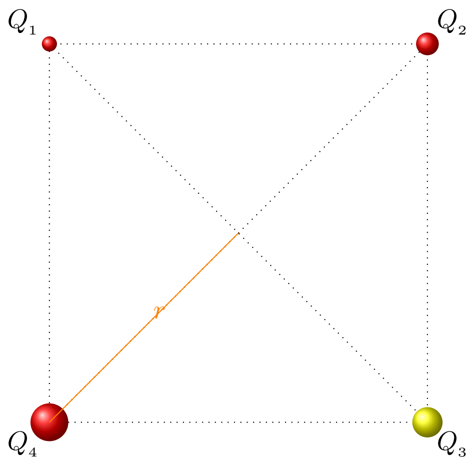
Spiegazione In questo esercizio per prima cosa si fa un disegno posizionando tutte le cariche, poi si disegna il campo elettrico generato dalle cariche nel punto indicato dal testo, quindi si calcola il campo elettrico totale e si trova la forza sulla carica in questione.

Svolgimento Le cariche sono ai vertici di un quadrato; la distanza delle cariche dal centro del quadrato è quindi

$$r = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

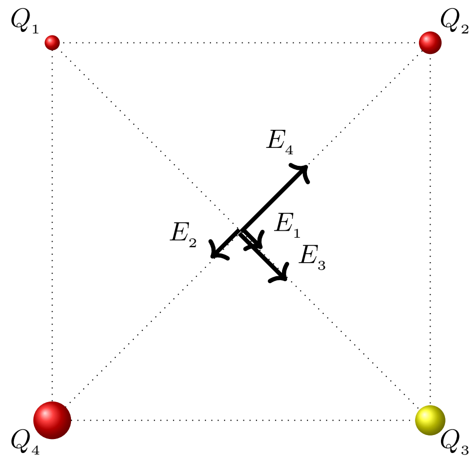
da cui

$$r^2 = \frac{L^2}{2}$$



I moduli dei campi elettrici, indicati in figura, valgono quindi

$$E_i = K\frac{|Q_i|}{r^2} \qquad \forall i \in 1, 2, 3, 4$$



Sommando i campi che si trovano sulla stessa direzione avremo

$$E_{13} = \frac{K}{r^2}\left(|Q_3| + |Q_1|\right)$$

$$E_{24} = \frac{K}{r^2}\left(|Q_4| - |Q_2|\right)$$

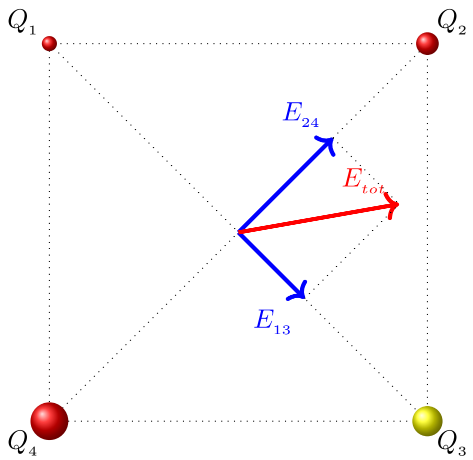
Questi due campi sono perpendicolari tra loro, quindi la loro somma sarà

$$E_{tot} = \sqrt{E_{13}^2 + E_{24}^2} = \frac{2K}{L^2}\sqrt{\left(|Q_3| + |Q_1|\right)^2 + \left(|Q_4| - |Q_2|\right)^2}$$

$$E_{tot} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{4\,m^2}\sqrt{(7\,\mu C)^2 + (4\,\mu C)^2}$$

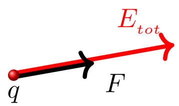
$$E_{tot} = \frac{9 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2}}{2}\sqrt{(65 \cdot 10^{-12} C^2)}$$

$$E_{tot} = \frac{9 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}}{2}\sqrt{(65)} = 36,28\,\frac{kN}{C}$$



La forza su di una carica di prova sarà quindi

$$F = qE_{tot} = 1\,\mu C \cdot 36,28\,\frac{kN}{C} = 0,03628\,N$$



Problema di: Elettrostatica - $E0016$

Testo *[E0016]* [2 3 5a]
Un nucleo di elio (A=4, Z=2) ed un nucleo di ossigeno (A = 16, Z = 8) distano tra loro $d = 3 \cdot 10^{-8}\,m$. In quale punto il campo elettrico da loro generato è nullo?

Spiegazione Due cariche elettriche entrambe positive poste ad una certa distanza. Nei punti sul segmento che le unisce i due campi elettrici sono ovviamente opposti. Nei punti arbitrariamente vicini ad una delle due cariche, il campo elettrico da essa generato sarà in modulo maggiore del campo generato dall'altra carica. Ci sarà quindi un punto su quel segmento in cui i due campi sono uguali e quindi il campo totale è nullo.

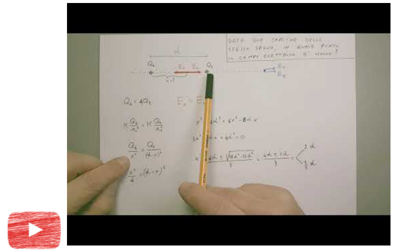


Fig. 3.6: *Guarda il video youtu.be/jROsf8F7qDM*

Svolgimento Il problema si risolve trovando, sul segmento che congiunge le due cariche, il punto in cui i due campi sono in modulo uguali. Sappiamo infatti che sui punti di tale segmento i due vettori campo sono ovviamente opposti. Chiamiamo x la distanza dal nucleo di elio (identificato dall'indice 1)

$$E_1 = E_2$$

$$2K\frac{e}{x^2} = 8K\frac{e}{(d-x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = 4\frac{1}{(d-x)^2}$$

$$4x^2 = (d-x)^2$$

$$4x^2 = d^2 - 2dx + x^2$$

$$3x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

Da questa equazione derivano due soluzioni corrispondenti all'affermazione *"I moduli dei due vettori sono uguali"*. Delle due andrà accettata solo quella con $0 < x < d$ che corrisponde ai punti sul segmento che congiunge le due cariche. fuori da quel segmento i vettori campo sono paralleli e concordi, quindi anche se di modulo uguale il campo elettrico complessivo non è nullo.

$$x_{1;2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 3d^2}}{3} = \frac{-d \pm 2d}{3} \begin{cases} x_1 = \frac{d}{3} \\ x_2 = -d \end{cases}$$

Considerati i vincoli sopra indicati l'unica soluzione accettabile è

$$x = \frac{d}{3} = 10^{-8}\, m$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017$

Testo *[E0017]* [1 2 4a]
Calcola l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di tre protoni allineati a distanza $d = 10^{-8}\, m$.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo la formula per l'energia potenziale elettrostatica.

Svolgimento Le tre cariche sono allineate e sono alla distanza d, quindi

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{13} = K\frac{e^2}{d} + K\frac{e^2}{d} + K\frac{e^2}{2d} = \frac{5Ke^2}{2d}$$

$$U = 22,5 \cdot 10^{1}7\, \frac{Nm^2}{C^2} \cdot 2,56 \cdot 10^{-38}\, C^2 = 5,76 \cdot 10^{-20}\, J$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017a$

Testo *[E0017a]* [1 ⭐ 2⏳ 4a📖]
Calcola l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di tre protoni disposti su di un triangolo equilatero di lato $d = 10^{-8}\,m$.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si applica la formula per l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche

Svolgimento Indicando le tre cariche con gli indici 1, 2, e 3, avremo

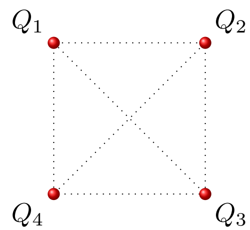
$$U = U_{12} + U_{23} + U_{13} = \frac{3Ke^2}{d} = 27 \cdot 10^9 \cdot \left(1,6 \cdot 10^{-19}\right)^2 \cdot 10^8\,J = 7 \cdot 10^{-20}\,J$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017b$

Testo *[E0017b]* [1½ ⭐ 3⏳ 4a📖]
Calcola l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di quattro protoni disposti sui vertici di un quadrato di lato $d = 10^{-8}\,m$.

Spiegazione In questo esercizio applichiamo semplicemente la formula per l'energia potenziale elettrostatica, facendo attenzione ad identificare in modo corretto tutte le coppie di cariche presenti.

Svolgimento Disegnando le quattro cariche è evidente per ognuna di esse, le altre non sono tutte alla stessa distanza.



Indicando le quattro cariche con indici numerici, avremo:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

Riordiniamole in base alle distanze tra le cariche

$$U = (U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{14}) + (U_{24} + U_{13})$$
$$U = \frac{Ke^2}{d} \cdot \left(\frac{4}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$
$$U = \frac{9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(1,6 \cdot 10^{-19}\right)^2\,C^2}{10^{-8}\,m} \cdot (5,414) = 125 \cdot 10^{-21}\,J$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017c$

Testo *[E0017c]* [2 2 4a]
Calcola l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di tre cariche allineate, a distanza $d = 2\,cm$, di valore $Q_1 = Q_2 = 2\,\mu C$ e $Q_3 = -2\,\mu C$ con Q_3 posta esternamente alle prime due.

Spiegazione Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche bisogna sommare le energie potenziali elettrostatiche di tutte le coppie di cariche presenti nel sistema.

Svolgimento Essendoci qui tre cariche avremo

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{d} + \frac{Q_1Q_3}{2d} + \frac{Q_2Q_3}{d}\right)$$

$$U_{tot} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{4\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m} - \frac{4\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,04\,m} - \frac{4\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m}\right)$$

$$U_{tot} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{-4\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,04\,m}\right) = -0,9\,J$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017d$

Testo *[E0017d]* [2 2 4a]
Calcola l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di tre cariche allineate, le prime due a distanza $d = 2\,cm$, di valore $Q_1 = Q_2 = 2\,\mu C$ e $Q_3 = -2\,\mu C$ con Q_3 posta nel punto medio tra le prime due.

Spiegazione Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche bisogna sommare le energie potenziali elettrostatiche di tutte le coppie di cariche presenti nel sistema

Svolgimento Essendoci qui tre cariche avremo

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{d} + \frac{2Q_1Q_3}{d} + \frac{2Q_2Q_3}{d}\right)$$

$$U_{tot} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{4\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m} - \frac{8\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m} - \frac{8\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m}\right)$$

$$U_{tot} = -9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{12\cdot 10^{-12}\,C^2}{0,02\,m}\right) = -5,4\,J$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017e$

Testo *[E0017e]* [2 ⭐ 2 ⌛ 4a 📖]
Due protoni ed un elettrone si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo di cateti $a = 5 \cdot 10^{-10}\, m$ e $b = 12 \cdot 10^{-10}\, m$. L'elettrone si trova nel vertice corrispondente all'angolo retto. Calcola l'energia potenziale elettrostatica del sistema.

Spiegazione Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche bisogna sommare le energie potenziali elettrostatiche di tutte le differenti coppie di cariche presenti nel sistema.

Svolgimento Indichiamo con Q_1 l'elettrone.
Essendoci qui tre cariche avremo

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{Q_1Q_3}{b} + \frac{Q_2Q_3}{c}\right)$$

$$U_{tot} = K\left(-\frac{e^2}{a} - \frac{e^2}{b} + \frac{e^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$U_{tot} = Ke^2\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017f$

Testo *[E0017f]* [2 ⭐ 2 ⌛ 4a 📖]
Due elettroni ed un protone si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo di cateti $a = 3 \cdot 10^{-10}\, m$ e $b = 4 \cdot 10^{-10}\, m$. Il protone si trova nel vertice corrispondente all'angolo retto. Calcola l'energia potenziale elettrostatica del sistema.

Spiegazione Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche bisogna sommare le energie potenziali elettrostatiche di tutte le differenti coppie di cariche presenti nel sistema.

Svolgimento Indichiamo con Q_1 il protone. Il cateto del triangolo rettangolo è lungo

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = 5 \cdot 10^{-10}\, m$$

Essendoci qui tre cariche avremo

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K\left(\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{Q_1Q_3}{b} + \frac{Q_2Q_3}{c}\right)$$

$$U_{tot} = K\left(-\frac{e^2}{a} - \frac{e^2}{b} + \frac{e^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$U_{tot} = Ke^2\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $E0017g$

Testo [E0017g] [2 2 4a]
Due elettroni e due protoni si trovano ai vertici di un quadrato di lato $d = 4 \cdot 10^{-10}\, m$. Posiziona le particelle a tuo piacimento e calcola l'energia potenziale elettrostatica del sistema.

Spiegazione L'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche è data dalla somma dell'energia potenziale elettrostatica di tutte le possibili coppie di cariche elettriche.

Svolgimento Immaginiamo di mettere le cariche elettriche di eguale segno su vertici opposti. Identifichiamo le cariche elettriche con un numero pari per il protone e dispari per l'elettrone. Questa è solo una convenzione per poter interpretare la formula successiva. Con questa convenzione le cariche di segno uguale distano $D = d\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-10}\, m$ e quelle di segno differente distano d.

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U = Ke^2 \left(-\frac{1}{d^2} + \frac{1}{D^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d^2} + \frac{1}{D^2} - \frac{1}{d^2} \right)$$

$$U = Ke^2 \left(-\frac{4}{d^2} + \frac{2}{2d^2} \right)$$

$$U = Ke^2 \left(-\frac{3}{d^2} \right)$$

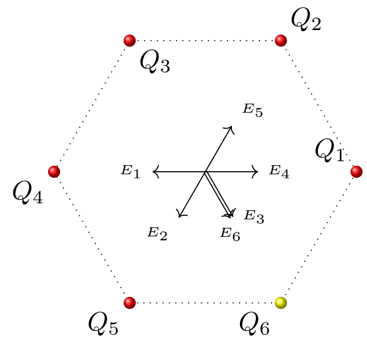
$$U = -3K\frac{e^2}{d^2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0021$

Testo [E0021] [2 2 4a]
Cinque cariche $Q = 3\,\mu C$ sono disposte ai vertici di un esagono regolare di lato $a = 1\, m$. La sesta, nel vertice rimanente, ha valore $Q = -3\,\mu C$. Calcola Il campo elettrico nel centro dell'esagono.

Spiegazione Per trovare il campo elettrico in un punto è sufficiente sommare i vettori campo elettrico generati, in quel punto, dalle cariche del sistema.

Svolgimento Cominciamo con il considerare che in un esagono regolare tutti i vertici sono equidistanti dal centro e tale distanza è uguale al lato dell'esagono.



Analizziamo per prima cosa la configurazione geometrica di questo sistema di cariche: a parte la carica negativa e la sua opposta, tutte le cariche generano nel centro dell'esagono un vettore campo elettrico che è annullato dal corrispondente vettore generato dalla carica opposta.

Per la carica negativa e la sua opposta, avremo invece due campi che si sommano costruttivamente ottenendo:

$$E_{tot} = 2\frac{Ke}{a^2} = 5.4 \cdot 10^4\, \frac{N}{C}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0022$

Testo *[E0022]* [2 3 4a]
Due cariche elettriche $Q_{_A} = Q_{_B} = 2\,\mu C$ sono poste in un diagramma cartesiano nei punti $A(0,0)$ e $B(3,0)$. Quanto vale il campo elettrico nel punto $C(0,3)$? Quanto vale la forza che agirebbe su di una carica $q = -5\,\mu C$ posta nel punto C? Disegna con precisione le cariche, i campi elettrici e la forza.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si trovano i campi elettrici generati nel punto C e si sommano. La forza sulla carica di prova viene di conseguenza.

Svolgimento Il campo della carica in A nel punto C è verticale

$$E_A = E_{Ay} = K\frac{Q_1}{r^2_{_{A-C}}} = 2000\,\frac{N}{C}$$

Il campo della carica in B nel punto C è

$$E_B = K\frac{Q_1}{r^2_{_{A-C}}} = 1000\,\frac{N}{C}$$

Visto che i punti A, B e C formano un triangolo rettangolo isoscele, l'angolo tra i due vettori campo è

$$\gamma = 45°$$

Il modulo del campo in C è quindi

$$E_C = \sqrt{E_A^2 + E_B^2 - 2E_AE_B\cos(180-\gamma)} = 2798\,\frac{N}{C}$$

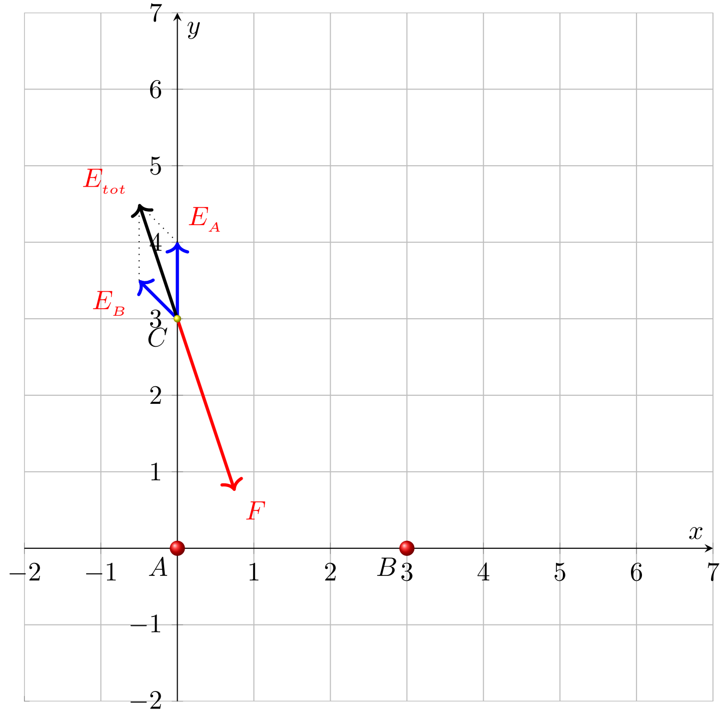
Per conoscere le sue componenti è necessario scomporre i vettori $\vec{E}_A$ e $\vec{E}_B$ per trovare i moduli delle loro componenti. Il primo non necessita di alcun calcolo; per il secondo

$$\begin{cases} E_{Bx} = E_B \cdot \dfrac{|x_{_B} - x_{_C}|}{r_{_{B-C}}} = \dfrac{1000}{\sqrt{2}}\,\dfrac{N}{C} = 707\,\dfrac{N}{C} \\ E_{By} = E_B \cdot \dfrac{|y_{_C} - y_{_A}|}{r_{_{B-C}}} = \dfrac{1000}{\sqrt{2}}\,\dfrac{N}{C} = 707\,\dfrac{N}{C} \end{cases}$$

Sommando le componenti (tenendo ovviamente conto dei versi dei vettori)

$$E_{tot-y} = E_{Ay} + E_{By} = 2707\,\frac{N}{C}$$

$$E_{tot-x} = E_{Bx} = 707\,\frac{N}{C}$$



Il campo elettrico complessivo è quindi

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2798\,\frac{N}{C}$$

La forza agente sulla carica nel punto C è infine

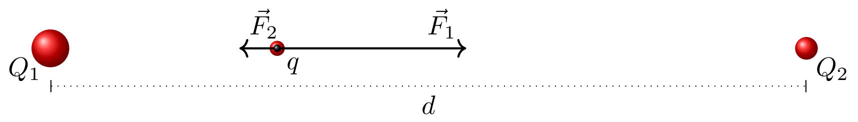
$$F = qE = 14\,nN$$

Problema di: Elettrostatica - $E0023$

Testo [E0023] [1 3 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +5\,\mu C$ e $Q_2 = +2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta sulla stessa linea delle altre due, alla distanza $r = 30\,cm$ da una delle due cariche.

Spiegazione Le due cariche esercitano una forza sulla terza carica, e quindi un'accelerazione. Le due cariche sono entrambe positive, quindi sulla terza carica, vista la sua posizione, le forze sono opposte.

Svolgimento Questo problema presenta due configurazioni possibili, a seconda che la terza carica sia posizionata più vicina alla prima od alla seconda. Analizziamo uno dei due casi.



Le due forze esercitate sulla terza carica sono:

$$F_1 = K\frac{Q_1 q}{r_1^2}$$

$$F_2 = K\frac{Q_2 q}{(d-r_1)^2}$$

La forza complessiva sarà

$$F_{tot} = F_1 - F_2 = Kq\left(\frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{(d-r_1)^2}\right)$$

L'accelerazione sarà

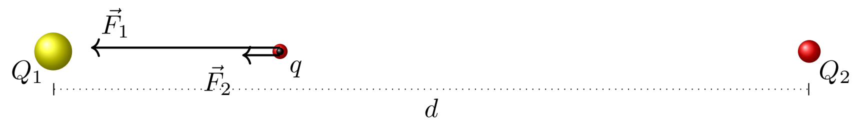
$$a = \frac{F}{m} = \frac{Kq}{m}\left(\frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{(d-r_1)^2}\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $E0023a$

Testo [E0023a] [1 3 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = -5\,\mu C$ e $Q_2 = +2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta sulla stessa linea delle altre due, alla distanza $r = 30\,cm$ da una delle due cariche.

Spiegazione Le due cariche esercitano una forza sulla terza carica, e quindi un'accelerazione. Le due cariche sono di segno opposto, quindi sulla terza carica, vista la sua posizione, le forze sono concordi.

Svolgimento Questo problema presenta due configurazioni possibili, a seconda che la terza carica sia posizionata più vicina alla prima od alla seconda. Analizziamo uno dei due casi.



Le due forze esercitate sulla terza carica sono:

$$F_1 = K\frac{Q_1 q}{r_1^2}$$

$$F_2 = K\frac{Q_2 q}{(d-r_1)^2}$$

La forza complessiva sarà

$$F_{tot} = F_1 + F_2 = Kq\left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{(d-r_1)^2}\right)$$

L'accelerazione sarà

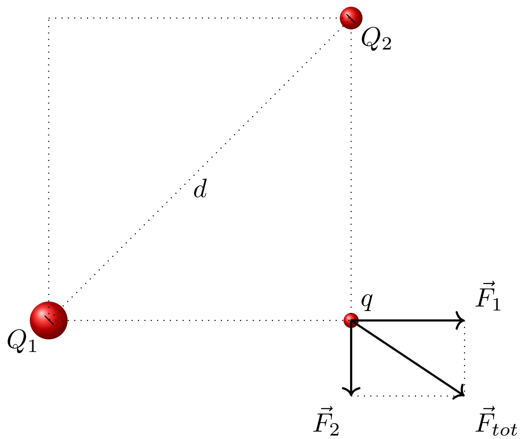
$$a = \frac{F}{m} = \frac{Kq}{m}\left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{(d-r_1)^2}\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $E0024$

Testo *[E0024]* [2 2 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +5\,\mu C$ e $Q_2 = +2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$ corrispondente alla diagonale di un quadrato. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta su uno dei vertici rimanenti del quadrato.

Spiegazione Le due cariche esercitano una forza sulla terza carica, e quindi un'accelerazione. Sulla terza carica, vista la sua posizione, le forze sono perpendicolari tra loro.

Svolgimento



La distanza tra le cariche e la carica di prova è

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Le due forze esercitate sulla terza carica sono quindi:

$$F_1 = K\frac{2Q_1 q}{d^2}$$

$$F_2 = K\frac{2Q_2 q}{d^2}$$

La forza complessiva è quindi

$$F_{tot} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = K\frac{2q}{d^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$F_{tot} = 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2} \cdot 2\,\mu C \cdot \sqrt{29}\,\mu C$$

$$F_{tot} = 9,7 \cdot 10^{10}\,N$$

L'accelerazione sarà

$$a = \frac{F}{m} = K\frac{2q}{md^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

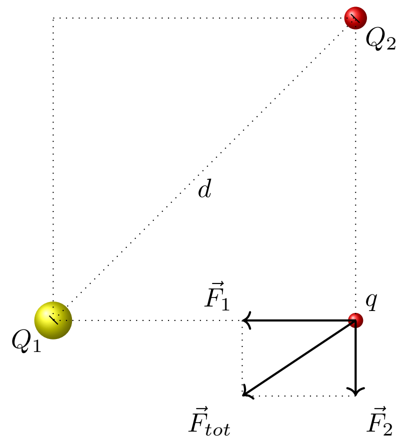
$$a = 0,24\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0024a$

Testo *[E0024a]* [2 2 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = -5\,\mu C$ e $Q_2 = +2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$ corrispondente alla diagonale di un quadrato. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta su uno dei vertici rimanenti del quadrato.

Spiegazione Le due cariche esercitano una forza sulla terza carica, e quindi un'accelerazione. Sulla terza carica, vista la sua posizione, le forze sono perpendicolari tra loro.

Svolgimento



La distanza tra le cariche e la carica di prova è

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Le due forze esercitate sulla terza carica sono quindi:

$$F_1 = K\frac{2Q_1 q}{d^2}$$

$$F_2 = K\frac{2Q_2 q}{d^2}$$

La forza complessiva è quindi

$$F_{tot} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = K\frac{2q}{d^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$F_{tot} = 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2} \cdot 4\,\mu C \cdot \sqrt{29}\,\mu C$$

$$F_{tot} = 1,9 \cdot 10^1 1\,N$$

L'accelerazione sarà

$$a = \frac{F}{m} = K\frac{2q}{md^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

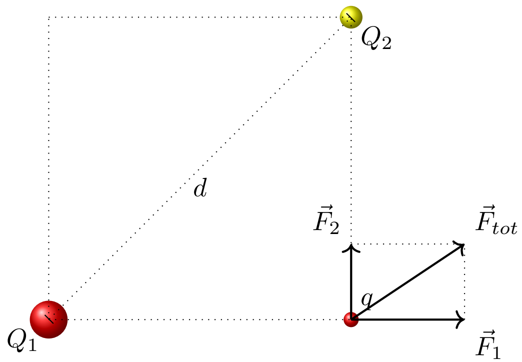
$$a = 0,48\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0024b$

Testo *[E0024b]* [2 2 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +5\,\mu C$ e $Q_2 = -2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$ corrispondente alla diagonale di un quadrato. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta in un vertice libero del quadrato.

Spiegazione Le due cariche del sistema esercitano una forza sulla carica di prova. E' importante tenere in considerazione l'orientamento delle due forze.

Svolgimento



La distanza tra le cariche e la carica di prova è

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Le due forze esercitate sulla terza carica sono quindi:

$$F_1 = K\frac{2Q_1q}{d^2}$$

$$F_2 = K\frac{2Q_2q}{d^2}$$

La forza complessiva è quindi

$$F_{tot} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = K\frac{2q}{d^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$F_{tot} = 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2} \cdot 4\,\mu C \cdot \sqrt{29}\,\mu C$$

$$F_{tot} = 1,9 \cdot 10^1 1\,N$$

L'accelerazione sarà

$$a = \frac{F}{m} = K\frac{2q}{md^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

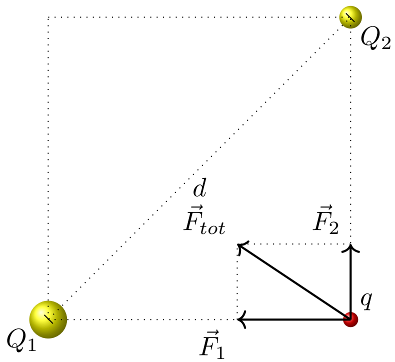
$$a = 0,48\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0024c$

Testo *[E0024c]* [2 2 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = -5\,\mu C$ e $Q_2 = -2\,\mu C$ sono poste a distanza $d = 1\,m$ corrispondente alla diagonale di un quadrato. Calcola l'accelerazione subita da una terza carica $q = 1\,\mu C$, di massa $m = 4\,g$, posta in un vertice libero del quadrato.

Spiegazione Le due cariche del sistema esercitano una forza sulla carica di prova. E' importante tenere in considerazione l'orientamento delle due forze.

Svolgimento



La distanza tra le cariche e la carica di prova è

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Le due forze esercitate sulla terza carica sono quindi:

$$F_1 = K\frac{2Q_1 q}{d^2}$$

$$F_2 = K\frac{2Q_2 q}{d^2}$$

La forza complessiva è quindi

$$F_{tot} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = K\frac{2q}{d^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$F_{tot} = 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2} \cdot 4\,\mu C \cdot \sqrt{29}\,\mu C$$

$$F_{tot} = 1,9 \cdot 10^{1}1\,N$$

L'accelerazione sarà

$$a = \frac{F}{m} = K\frac{2q}{md^2}\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$$

$$a = 0,48\,\frac{m}{s^2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0027$

Testo *[E0027]* [1 3 4a]
Tre cariche, una negativa e due positive, sono poste su una linea verticale a distanza r di un metro una dall'altra. Assegna dei valori alle cariche. Dopo aver disegnato sulla carica posta più in basso i vettori campo elettrico generati su di essa, calcola e disegna la forza che subisce.

Spiegazione Dopo aver assegnato i valori come richiesto dal problema, in questo esercizio si devono disegnare le forze sulla carica più in basso e poi le si devono sommare.

Svolgimento Ipotizziamo di avere le cariche $Q_1 = 1\,\mu C$, $Q_2 = 2\,\mu C$ e $Q_3 = -3\,\mu C$ posizionate nell'ordine dal basso verso l'alto.

Sulla carica più in basso agiscono quindi due forze F_2 verso il basso e F_3 verso l'alto.

$$F_2 = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$
$$F_3 = K\frac{Q_1Q_3}{4r^2}$$

Quindi

$$F_{tot} = K\frac{Q_1Q_2}{r^2} - K\frac{Q_1Q_3}{4r^2}$$
$$F_{tot} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{2\,\mu^2C^2}{1\,m^2} - 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\,\mu^2C^2}{4\,m^2}$$
$$F_{tot} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{5}{4}\,\mu^2N$$
$$F_{tot} = 1,125\cdot 10^{-2}\,N$$

Tale forza è verso il basso.

Problema di: Elettrostatica - $E0027a$

Testo *[E0027a]* [1 3 4a]
Tre cariche, una positiva e due negative, sono poste su una linea verticale a distanza di un metro una dall'altra. Assegna dei valori alle cariche. Dopo aver disegnato sulla carica posta più in basso i vettori campo elettrico generati su di essa, calcola e disegna la forza che subisce.

Spiegazione Dopo aver assegnato i valori come richiesto dal problema, in questo esercizio si devono disegnare le forze sulla carica più in basso e poi le si devono sommare.

Svolgimento Ipotizziamo di avere le cariche $Q_1 = -1\,\mu C$, $Q_2 = -2\,\mu C$ e $Q_3 = 3\,\mu C$ posizionate nell'ordine dal basso verso l'alto.

Sulla carica più in basso agiscono quindi due forze F_2 verso il basso e F_3 verso l'alto.

$$F_2 = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$
$$F_3 = K\frac{Q_1Q_3}{4r^2}$$

Quindi

$$F_{tot} = K\frac{Q_1Q_2}{r^2} - K\frac{Q_1Q_3}{4r^2}$$
$$F_{tot} = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{2\,\mu^2C^2}{1\,m^2} - 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\,\mu^2C^2}{4\,m^2}$$
$$F_{tot} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{5}{4}\,\mu^2N$$
$$F_{tot} = 1,125\cdot 10^{-2}\,N$$

Tale forza è verso l'alto.

Problema di: Elettrostatica - $E0028$

Testo *[E0028]* [3 7 4a]
Disponi a piacere su di un piano cartesiano due cariche elettriche opposte di valore a tua scelta. Scegli un terzo punto del piano cartesiano non allineato con i primi due.

1. Disegna e calcola i vettori capo elettrico generati in quel punto dalle due cariche.
2. Disegna e calcola il campo elettrico complessivo in quel punto.
3. Calcola il valore del potenziale in quel punto.
4. Metti poi in quel punto una carica di prova di valore a tua scelta.
5. Disegna e calcola la forza elettrostatica su quella carica.
6. Calcola l'energia potenziale elettrostatica di quella sola carica
7. Calcola l'energia potenziale elettrostatica del sistema di tre cariche.

Spiegazione In questo esercizio, le distanze tra le cariche, necessarie per calcolare le distanze nelle formule necessarie, le si calcolano a partire dalle coordinate dei punti.

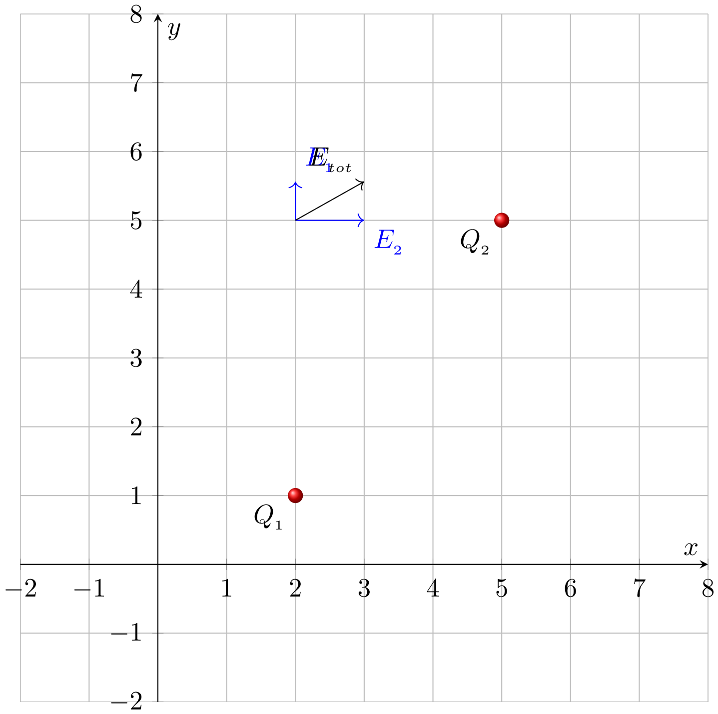
Svolgimento Ipotizziamo per le due cariche i valori $Q_1 = 1\,\mu C$ e $Q_2 = -2\,\mu C$ poste nei punti di coordinate $A_1(2,1)$ e $A_2(6,5)$ in un sistema di assi cartesiani espresso in metri. Consideriamo un terzo punto di coordinate $B(2,5)$. I valori dei segmenti tra le cariche ed il punto scelto sono: $\overline{A_1B} = 4\,m$ e $\overline{A_2B} = 3\,m$. Possiamo adesso disegnare i due campi elettrici generati dalle due cariche e quindi il campo elettrico totale in quel punto.

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{1\,\mu C}{16\,m^2} = \frac{9}{16}\,\frac{kN}{C}$$

$$E_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{-2\,\mu C}{9\,m^2} = 1\,\frac{kN}{C}$$

Con le scelte fatte per la posizione delle cariche e del punto di prova, questi due vettori risultano perpendicolari tra loro, e quindi

$$E_{tot} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 1,15\,\frac{kN}{C}$$



Se ipotizziamo di mettere nel punto B una carica di prova $q = 1\,\mu C$ possiamo calcolare il valore dell'energia potenziale del sistema e quindi del potenziale nel punto B

$$U = K\frac{Q_1 q}{r_1} + K\frac{Q_2 q}{r_2} = 9\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\cdot 1\,\mu C\cdot\left(\frac{1\,\mu C}{4\,m} - \frac{2\,\mu C}{3\,m}\right)$$

$$U = -\frac{15}{4}\cdot 10^{-3}\,J$$

ed il potenziale

$$U = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N\,m^2}{C^2} \cdot \left(\frac{1\,\mu C}{4\,m} - \frac{2\,\mu C}{3\,m}\right)$$

$$U = -\frac{15}{4} \cdot 10^3\,V$$

La forza elettrostatica sulla carica di prova la trovo con

$$\vec{F} = q\vec{E}_{tot}$$

per cui

$$F = 1\,muC \cdot 1,15\,\frac{kN}{C} = 1,15\,mN$$

Abbiamo calcolato l'energia potenziale elettrostatica della carica di prova. Il sistema di tre cariche ha un'energia potenziale totale differente, in quanto dobbiamo tenere conto anche dell'energia potenziale delle due cariche iniziali:

$$U_{12} = K\frac{Q_1 Q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N\,m^2}{C^2}\frac{-2\mu^2 C^2}{25\,m^2} = -\frac{18}{25} \cdot 10^{-3}\,J$$

$$U_{tot} = -\left(\frac{15}{4} + \frac{18}{25}\right) mJ = -4,47\,mJ$$

Problema di: Elettrostatica - $E0029$

Testo *[E0029]* [3 6 4a]

Due protoni Q_1 e Q_2 sono posti in un sistema di riferimento cartesiano in metri nei punti $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Un terzo protone è posto fermo nel punto $C(0,4)$. Calcola il campo elettrico e la forza subiti dalla terza carica. Calcola il potenziale a cui si trova la terza carica e il lavoro da compiere per portarlo nell'origine degli assi.

Spiegazione In questo esercizio, le distanze tra le cariche, necessarie per calcolare le distanze nelle formule necessarie, le si calcolano a partire dalle coordinate dei punti.

Svolgimento Il terzo protone sente i campi elettrici degli altri due. La distanza del terzo protone da entrambi gli altri due è $r = \sqrt{3^2+4^2}\,m = 5\,m$

Il campo elettrico che agisce sul terzo protone dovuto ad ognuna delle due cariche vale

$$E = K\frac{e}{r^2}$$

e forma con l'asse verticale un angolo definito da

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}$$

e di conseguenza da

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

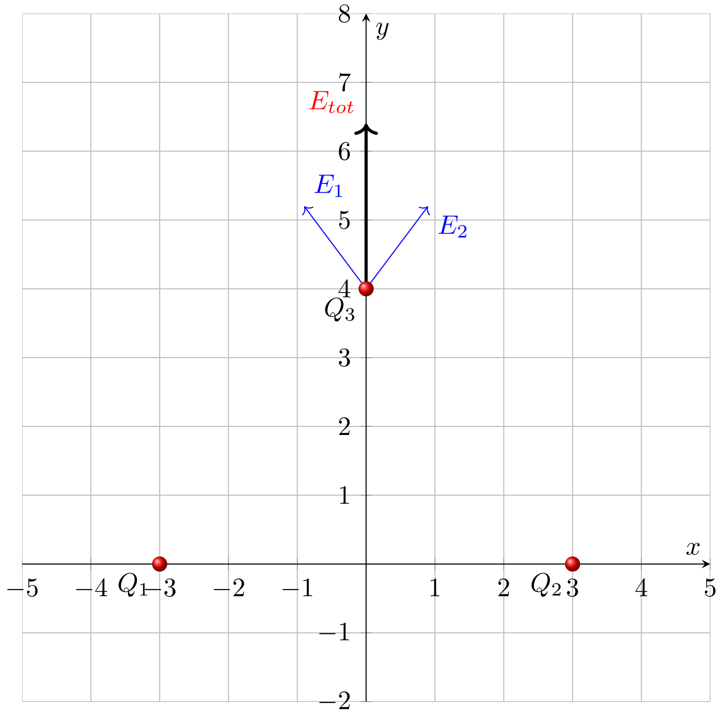
Il campo elettrico totale è quindi la somma dei due campi elettrici. Le loro componenti orizzontali si cancellano e quelle verticali si sommano.

$$E_{tot} = 2K\frac{e}{r^2} \cdot \cos(\theta) = \frac{8}{5}K\frac{e}{r^2}$$

La forza subita è quindi

$$F = \frac{8}{5}K\frac{e^2}{r^2}$$

diretta nello stesso verso del campo elettrico.



Il potenziale a cui si trova la terza carica è dato da

$$V = 2K\frac{e}{r}$$

Il potenziale a cui si troverebbe se fosse nell'origine (cioè a distanza $x = 3\,m$ dalle altre cariche) è dato da

$$V = 2K\frac{e}{x}$$

Per cui

$$L = e\Delta V = -2Ke^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)$$

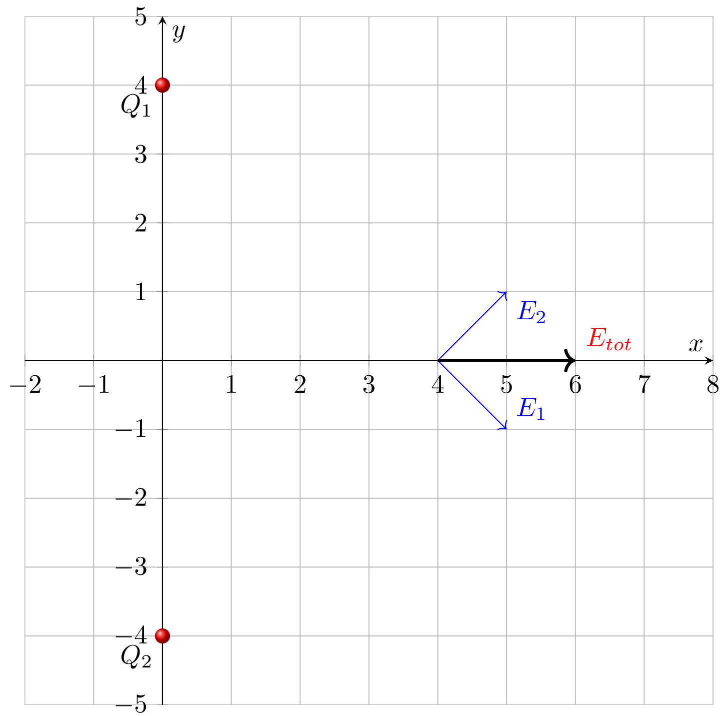
è il lavoro che dobbiamo fare per portare la carica nell'origine degli assi

Problema di: Elettrostatica - $E0029a$

Testo *[E0029a]* [3 6 4a]
Due protoni sono posti in un sistema di riferimento cartesiano in metri nei punti $A(0,4)$ e $B(0,-4)$. Un nucleo di elio è posto fermo nel punto $C(4,0)$. Calcola il campo elettrico e la forza subiti dalla terza carica. Calcola il potenziale a cui si trova la terza carica e il lavoro da compiere per portarlo nell'origine degli assi.

Spiegazione In questo esercizio, le distanze tra le cariche, necessarie per calcolare le distanze nelle formule necessarie, le si calcolano a partire dalle coordinate dei punti.

Svolgimento Il terzo protone sente i campi elettrici degli altri due.



Le tre cariche sono disposte sui vertici di un quadrato. I campi elettrici sono quindi perpendicolari tra loro. I campi elettrici sono anche uguali (stesso valore delle cariche e stessa distanza $r = 4\sqrt{2}\,m$ della terza carica dalle prime due) e quindi

$$E_1 = E_2 = K\frac{e}{r^2}$$

$$E_{tot} = \sqrt{2}K\frac{e}{r^2}$$

Considerando che la terza carica è un nucleo di elio, il quale contiene due protoni, la forza su tale nucleo è

$$F = 2\sqrt{2}K\frac{e^2}{r^2}$$

nella stessa direzione e verso del campo elettrico totale.

Il potenziale a cui si trova la terza carica è dato da

$$V = 2K\frac{e}{r}$$

Il potenziale a cui si troverebbe il nucleo di elio se si trovasse nell'origine degli assi, cioè a distanza $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, è

$$V = 2K\frac{e}{x} = 2\sqrt{2}K\frac{e}{r}$$

Il lavoro che una forza esterna dovrebbe fare sarebbe quindi

$$L = \Delta U = e\Delta V = 2K\frac{e}{r}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $E0030$

Testo *[E0030]* [3 4 4a]

Una carica $q = 2\,\mu C$ di massa $m = 1\,g$ si muove con velocità $U = 5\,\frac{m}{s}$ di moto circolare uniforme con raggio $r = 2\,m$ intorno ad una seconda carica Q supposta ferma. Calcola il valore della carica Q indicandone il segno, e l'energia totale del sistema.

Spiegazione Il sistema fisico proposto vede una carica ferma ed una seconda carica che si muove di moto circolare uniforme intorno alla prima.

Svolgimento Studiando il moto circolare uniforme della carica avremo

$$m\frac{U^2}{r} = K\frac{qQ}{r^2}$$

$$|Q| = \frac{mU^2 r}{Kq} = \frac{10^{-3}\,kg \cdot 25\,\frac{m^2}{s^2} \cdot 2\,m}{2\mu C \cdot 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = \frac{25}{9} \cdot 10^{-6}\,C$$

La forza tra le cariche deve essere attrattiva, quindi la carica Q deve essere negativa.

L'energia totale del sistema la si calcola sommando l'energia cinetica e l'energia potenziale elettrostatica

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mU^2 - K\frac{qQ}{r}$$

Utilizzando la rima equazione che descrive il moto circolare avremo

$$E_{tot} = -\frac{1}{2}K\frac{qQ}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{\frac{50}{9}\,\mu^2 C^2}{2\,m} = 12,5\,mJ$$

Problema di: Elettrostatica - $E0032$

Testo *[E0032]* [3 4 4a]
Un filo verticale, infinito, uniformemente carico negativamente, con densità lineare di carica $\lambda = 2\,\frac{\mu C}{m}$, genera un campo elettrico con simmetria cilindrica orientato in ogni punto verso il filo. Una carica positiva di massa $m = 10^{-3}\,kg$ si muove di moto elicoidale attorno ad esso con raggio $r = 0,5\,m$ e con passo $\Delta y = 0,1\,m$. Determina la componente orizzontale della velocità della carica, il periodo del moto circolare in orizzontale, la velocità del moto in verticale, la velocità della carica.

Spiegazione In questo esercizio una carica si muove nel campo elettrico generato da un filo verticale uniformemente carico. Il campo elettrico è centrale e genera sulla carica una forza sempre diretta verso il filo. Il moto della carica è un moto parabolico.

Svolgimento Dal teorema di Gauss possiamo trovare l'equazione del campo elettrico generato dal filo uniformemente carico. Per applicare il teorema scegliamo una superficie cilindrica che abbia come asse il filo.

$$2\pi r h E = \frac{Q}{\epsilon}$$
$$E = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon}$$
$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon}$$

La particella, mentre compie un moto rettilineo uniforme in verticale, contemporaneamente compie un moto circolare uniforme intorno al filo. Quindi

$$m\frac{\mathcal{V}_\perp^2}{r} = qE$$

$$\mathcal{V}_\perp = \sqrt{\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon m}}$$

Il periodo del moto circolare è

$$T = \sqrt{\frac{8\pi^3\epsilon r^2 m}{q\lambda}}$$

Analizzando il moto in verticale possiamo stimare la velocità della particella parallelamente al filo

$$\mathcal{V}_\parallel = \frac{\Delta y}{T} = \Delta y\sqrt{\frac{q\lambda}{8\pi^3\epsilon r^2 m}}$$

La velocità della carica nel suo moto elicoidale è quindi

$$\mathcal{V} = \sqrt{\mathcal{V}_\perp^2 + \mathcal{V}_\parallel^2}$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon m} + \frac{\Delta y^2 q\lambda}{8\pi^3\epsilon r^2 m}} = \sqrt{\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon m}\left(1 + \frac{\Delta y^2}{4\pi^2 r^2}\right)}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0033$

Testo *[E0033]* [3 3 4a]
Un filo verticale, infinito, uniformemente carico, con densità lineare di carica $\lambda = -2\,\frac{\mu C}{m}$, genera un campo elettrico con simmetria cilindrica di modulo

$$E = 2K\frac{\lambda}{r}$$

Una carica positiva $q = 4\,\mu C$ e di massa $m = 10^{-3}\,kg$ si muove di moto circolare attorno ad esso con raggio $r = 0,5\,m$. Determina la velocità della carica ed il raggio dell'orbita.

Spiegazione In questo problema la particella si muove di moto circolare uniforme sotto l'azione di una forza centrale generata sulla carica dal campo elettrico.

Svolgimento Affermando che la forza elettrostatica è una forza di tipo centripeto, avremo:

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = qE$$

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = 2Kq\frac{\lambda}{r}$$

In questa equazione, trattandosi del modulo del vettore forza, le grandezze λ e q sono da intendersi in valore assoluto.

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2Kq\lambda}{m}}$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot 4\mu C \cdot 2\,\frac{\mu C}{m}}{10^{-3}\,kg}} = 12\,\frac{m}{s}$$

Come si vede dai calcoli, il raggio dell'orbita si semplifica e viene cancellato dall'equazione. Ne segue che esso non influisce sulla velocità della particella.

La risposta al problema è che il raggio dell'orbita è indeterminato (ogni valore è soluzione del problema).

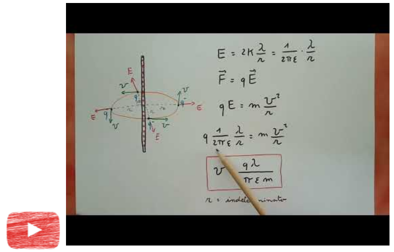


Fig. 3.7: *Guarda il video youtu.be/YDVGcqczMIw*

Problema di: Elettrostatica - $E0033a$

Testo *[E0033a]* [3 3 4a]
Un filo verticale infinito, con densità di carica lineare uniforme $\lambda = +2\,\frac{\mu C}{m}$, genera un campo elettrico con simmetria cilindrica di modulo

$$E = 2K\frac{\lambda}{r}$$

Una carica $q = -8\,\mu C$ e massa $m = 0,2\,kg$ si muove di moto circolare attorno ad esso. Determina la velocità della carica ed il raggio dell'orbita.

Spiegazione In questo problema la particella si muove di moto circolare uniforme sotto l'azione di una forza centrale generata sulla carica dal campo elettrico.

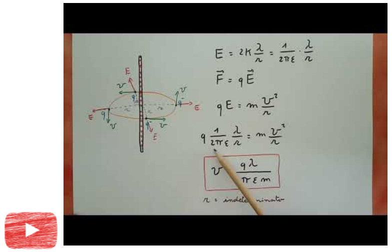


Fig. 3.8: *Guarda il video youtu.be/YDVGcqczMIw*

Svolgimento Affermando che la forza elettrostatica è una forza di tipo centripeto, avremo:

$$m\frac{v^2}{r} = qE$$

$$m\frac{v^2}{r} = 2Kq\frac{\lambda}{r}$$

In questa equazione, trattandosi del modulo del vettore forza, le grandezze λ e q sono da intendersi in valore assoluto.

$$v = \sqrt{\frac{2Kq\lambda}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot 8\mu C \cdot 2\,\frac{\mu C}{m}}{0,2\,kg}} = 1,2\,\frac{m}{s}$$

Come si vede dai calcoli, il raggio dell'orbita si semplifica e viene cancellato dall'equazione. Ne segue che esso non influisce sulla velocità della particella.

La risposta al problema è che il raggio dell'orbita è indeterminato (ogni valore è soluzione del problema).

Problema di: Elettrostatica - $E0034$

Testo *[E0034]* [3 4 4a]
Un condensatore piano di lunghezza d e con le piastre distanti h è alimentato da una differenza di potenziale $\Delta V = 100\,Volt$. Un elettrone entra nel centro del condensatore perpendicolarmente al campo elettrico. Quale velocità minima deve avere per non sbattere contro la piastra del condensatore? *[E' sufficiente impostare l'esercizio senza svolgere i conti]*

Spiegazione Questo esercizio è sul moto parabolico di una carica in un campo elettrico uniforme

Svolgimento L'accelerazione che subisce la carica vale

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{e\Delta V}{mh}$$

L'elettrone impiegherà ad uscire dal condensatore un tempo

$$\Delta t = \frac{d}{V_x}$$

Il valore di V_x che permette all'elettrone di uscire dal condensatore è quanto richiesto dal problema.

Lo spostamento verticale della particella è

$$\Delta S_y = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{eEd^2}{2mV_x^2}$$

da cui

$$V_x^2 = \frac{eEd^2}{2m\Delta S_y}$$

Impostando la condizione per cui la particella non urti contro le piastre troviamo il limite per la velocità della particella

$$|\Delta S_y| < \frac{h}{2}$$

$$V_x^2 > \frac{eEd^2}{mh}$$

$$V_x > \sqrt{\frac{eEd^2}{mh}}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0035$

Testo *[E0035]* [3½ 4 4a]
Un protone viene sparato con una velocità $V_i = 1000\,\frac{m}{s}$ contro un nucleo di elio da una distanza iniziale $L = 5\,cm$. A quale distanza minima dal nucleo riesce ad arrivare?

Spiegazione Questo è un problema sull'energia e sulla legge di conservazione dell'energia. E' importante ricordare che l'energia cinetica del baricentro non può essere convertita in energia potenziale elettrostatica, in quanto la forza elettrostatica è una forza interna e non può modificare la velocità del centro di massa. In modo equivalente è possibile arrivare allo stesso risultato con la legge di conservazione della quantità di moto.

Svolgimento Applichiamo la legge di conservazione dell'energia. Per definire quale sia il momento in cui si ha la minima distanza tra le due cariche è sufficiente pensare che il protone, inizialmente più veloce, rallenta perché respinto dal nucleo di elio; il nucleo di elio, inizialmente fermo, accelera respinto dal protone. Inizialmente la distanza tra le due particelle sta diminuendo; la distanza smette di diminuire quando le due particelle avranno la stessa velocità. Di li in poi le due particelle si allontanano. La condizione di minima distanza si ottiene eguagliando le velocità finali delle due particelle. Per la legge di conservazione dell'energia avremo quindi

$$\frac{1}{2}mV_i^2 + K\frac{2e^2}{r_i} = \frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2}\cdot(4m)V_f^2 + K\frac{2e^2}{r_f}$$

$$\frac{1}{2}mV_i^2 + K\frac{2e^2}{r_i} = \frac{5}{2}mV_f^2 + K\frac{2e^2}{r_f}$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto, applicabile in quanto siamo in presenza di sole forze interne, avremo

$$mV_i = mV_f + 4mV_f$$

$$V_f = \frac{1}{5}V_i$$

Quindi

$$\frac{1}{2}mV_i^2 + K\frac{2e^2}{r_i} = \frac{1}{10}mV_i^2 + K\frac{2e^2}{r_f}$$

$$\frac{2}{5}mV_i^2 + K\frac{2e^2}{r_i} = K\frac{2e^2}{r_f}$$

$$\frac{1}{r_f} = \frac{mV_i^2}{5Ke^2} + \frac{1}{r_i}$$

$$r_f = \frac{1}{\frac{mV_i^2}{5Ke^2} + \frac{1}{r_i}}$$

Calcoliamo la quantità

$$\frac{5Ke^2}{mV^2} = \frac{45\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\cdot\left(1,6\cdot 10^{-19}\,C\right)^2}{1,67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 10^6\,\frac{m^2}{s^2}} = 6,9\cdot 10^{-7}\,m$$

Se la distanza iniziale fosse infinita, avremmo che questa è la distanza minima raggiunta. La distanza di $r_i = 0,05\,m$ è trascurabile rispetto a questa e di conseguenza la distanza raggiunta è

$$r_f = 6,9\cdot 10^{-7}\,m = 0,69\,\mu m$$

Problema di: Elettrostatica - $E0036$

Testo *[E0036]* [3 3 4a]
Due cariche elettriche positive si trovano su di un piano alla distanza $d = 2L$ tra loro. Dimostra che in un solo punto del piano il campo elettrico complessivo è nullo e studia la tipologia di equilibrio di una carica di prova positiva posta in quel punto.

Spiegazione Un problema nel quale dobbiamo sommare i campi elettrici di due cariche su di un piano. Immaginando di spostare un poco la carica di prova dal punto di equilibrio capiamo se tale punto è di equilibrio stabile, instabile o indifferente.

Svolgimento Per ragionare con più facilità posizioniamo le cariche elettriche in un piano cartesiano nei punti $A(-L;0)$ e $B(L;0)$

Analizziamo adesso il campo elettrico totale in vari punti di tale piano.

Per tutti i punti con $x > L \vee x < -L$ la componente orizzontale dei due campi ha lo stesso verso e punta verso destra per le x positive e verso sinistra per le x negative. Per $x = \pm L$ una delle due componenti orizzontali è nulla, per l'altra vale quanto appena detto.

Per quanto riguarda la parte di piano con $-L < x < L$, la componente orizzontale del campo sarà nulla solo per $x = 0$ in quanto i due campi sono opposti ma solo in quel caso uguali.

In modo analogo, per tutti i punti con $y > 0$ le componenti verticali del campo elettrico hanno lo stesso verso, verso l'alto; per tutti i punti con $y < 0$ le componenti verticali del campo elettrico hanno lo stesso verso, verso il basso.

Per tutti i punti con $y = 0$ la componente verticale del campo è nulla.

Per tutti i punti con $x = 0$ la componente orizzontale del campo è nulla.

Da quanto detto solo nel punto centrale tra le due cariche il campo elettrico è nullo e quindi una carica di prova può stare in equilibrio.

Una carica di prova positiva, se spostata di poco lungo l'asse orizzontale sentirà un campo che la spinge a tornare verso la posizione iniziale. Se invece la carica di prova viene spostata di poco lungo l'asse verticale essa sente un campo che l'allontana dalla posizione iniziale. Quindi l'unica posizione di equilibrio è stabile sull'asse x e instabile sull'asse y.

Se la carica di prova avesse segno opposto la condizione di equilibrio sarebbe esattamente opposta.

Problema di: Elettrostatica - $E0037$

Testo *[E0037]* [2 2 4a]
Due condensatori di capacità $C_1 = 3\,\mu F$ e $C_2 = 5\,\mu F$ sono caricati con potenziali $\Delta V_1 = 200\,V$ e $\Delta V_2 = 100\,V$. Una volta collegati in parallelo, quale potenziale sarà presente ai loro estremi?

Spiegazione Una volta collegati in parallelo, i differenti potenziali determinano una redistribuzione di cariche che porta entrambi i condensatori ad essere caricati con lo stesso potenziale. L'esercizio si risolve con la legge di conservazione della carica elettrica.

Svolgimento La carica sui due condensatori è

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V_1 = 600\,\mu C$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_2 = 500\,\mu C$$

La carica complessiva è

$$Q_{tot} = 1100\,\mu C$$

I due condensatori collegati in parallelo hanno una capacità complessiva

$$C_{tot} = C_1 + C_2 = 8\,\mu F$$

La differenza di potenziale con cui sono caricati i condensatori è quindi

$$\Delta V_f = \frac{Q_{tot}}{C_{tot}} = \frac{1100}{8}\,V = 112,5\,V$$

Problema di: Elettrostatica - $E0038$

Testo *[E0038]* [2 3 4a]
Un condensatore piano di capacità $C = 100\,nF$, con le armature distanti tra loro $d = 5\,mm$, è mantenuto carico con una differenza di potenziale $\Delta V = 24\,Volt$. Successivamente viene inserita in un punto centrale tra le due piastre, una lastra metallica dello spessore $l = 3\,mm$. Calcola la nuova capacità del condensatore e la carica elettrica fornita dal generatore per mantenerlo allo stesso valore di potenziale.

Spiegazione La difficoltà proposta da questo esercizio è la comprensione che il nuovo condensatore è realizzato dall'aver montato in serie due condensatori.

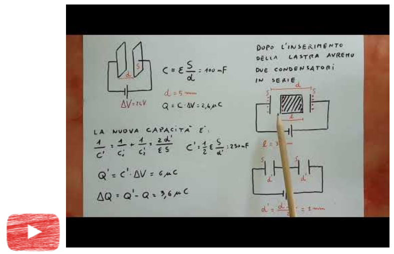


Fig. 3.9: *Guarda il video youtu.be/vl2V1eBztgA*

Svolgimento La carica presente sul condensatore è

$$Q = C \cdot \Delta V = 2,4\,\mu C$$

L'introduzione della lastra lascia uno spazio

$$x = \frac{d-l}{2} = 1\,mm$$

tra le piastre dei due nuovi condensatori. La loro capacità risulta quindi maggiore, infatti

$$C' = \epsilon_0 \frac{S}{x} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \cdot \frac{d}{x} = C\frac{d}{x} = 500\,nF$$

I condensatori sono però due, montati in serie. Quindi $C'_{eq} = \dfrac{C' \cdot C'}{C' + C'} = 250\,nF$

La carica presente sul nuovo condensatore è

$$Q' = C'_{eq} \cdot \Delta V = 6\,\mu C$$

quindi la carica fornita dal generatore è

$$\Delta Q = Q' - Q = 3,6\,\mu C$$

Problema di: Elettrostatica - $E0039$

Testo *[E0039]* [3 3 4a]
Tra le armature di un condensatore piano sotto vuoto, si sviluppa una forza attrattiva $F = 1\,mN$. Sapendo che il condensatore è realizzato con due piastre poste alla distanza $d = 5\,mm$, e sapendo che un generatore carica il condensatore con una differenza di potenziale $\Delta V = 12\,V$, calcola la carica presente sul condensatore.

Spiegazione In questo esercizio è necessario conoscere il condensatore piano in ogni suo aspetto.

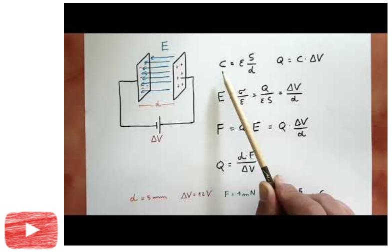


Fig. 3.10: *Guarda il video youtu.be/reBC0w9z2dg*

Svolgimento La capacità del condensatore è $C = \epsilon_0 \dfrac{S}{d}$ La carica con il quale è stato caricato è $Q = C \cdot \Delta V$

Sappiamo che in un condensatore piano il campo elettrico al suo interno è dato da

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La forza con cui le piastre si attraggono è quindi

$$F = Q \cdot E = C \cdot \Delta V \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$F = \epsilon_0 \frac{S\,\Delta V\,Q}{\epsilon_0 S d} = \frac{\Delta V\,Q}{d}$$

Quindi

$$Q = \frac{F \cdot d}{V} = \frac{5}{12}\,\mu C$$

Problema di: Elettrostatica - $E0040$

Testo *[E0040]* [2 2 4a]
Un protone viene lanciato con un'energia cinetica E, da molto distante, contro un secondo protone sempre in quiete (è quindi mantenuto fermo). Determinare la minima distanza tra le due particelle in funzione dell'energia E

Spiegazione Questo problema si risolve con la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$E + U_i = U_f$$

Essendo le due particelle inizialmente molto distanti allora $U_i = 0$ e quindi

$$E = \frac{K\,e^2}{r}$$

$$r = \frac{K\,e^2}{E}$$

dove $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$ è la carica (positiva) del protone.

Problema di: Elettrostatica - $E0041$

Testo *[E0041]* [2½ 3 4a]
Un elettrone inizialmente fermo si muove all'interno di un campo elettrico uniforme per una distanza $\Delta S = 1\,mm$. Sapendo che la differenza di potenziale tra i due punti è $\Delta V = 24\,V$, calcola quanto tempo ci impiega.

Spiegazione Una particella carica in un campo elettrico uniforme, partendo da ferma, si muove di moto uniformemente accelerato.

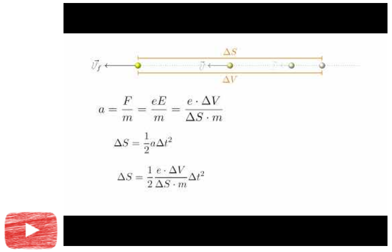
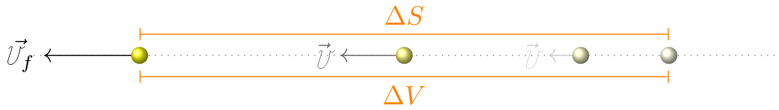


Fig. 3.11: *Guarda il video youtu.be/xgEcjvDlMWE*

Svolgimento



Un campo elettrico costante genera su di un elettrone una forza costante e quindi un'accelerazione costante. Conoscendo inoltre la relazione tra campo elettrico e differenza di potenziale, avremo

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{e \cdot \Delta V}{\Delta S \cdot m}$$

Per il moto uniformemente accelerato avremo

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + V_i \Delta t$$

e considerato che la particella parte da ferma

$$\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{e \cdot \Delta V}{\Delta S \cdot m} \Delta t^2$$

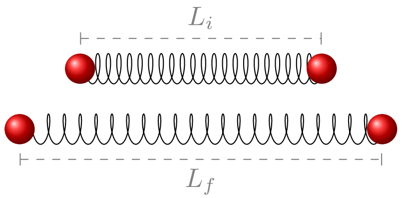
$$\Delta S^2 = \frac{e\Delta V}{2m} \Delta t^2$$

$$\Delta t = \Delta S \cdot \sqrt{\frac{2m}{e\Delta V}}$$

$$\Delta t = 0,001\,m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} kg}{1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 24\,V}} = 6,9 \cdot 10^{-10}\,s$$

Problema di: Elettrostatica - $E0042$

Testo *[E0042]* [2 4 4a]



Due cariche elettriche Q entrambe positive, sono poste a distanza L_i unite da una molla di lunghezza a riposo L_i e di costante elastica k. Lasciate libere si allontaneranno raggiungendo dopo alcune oscillazioni una posizione di equilibrio a distanza L_f tra loro. Determinate il valore della carica Q e la quantità di energia E dissipata dal sistema.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio tra la forza elastica e la forza elettrostatica.

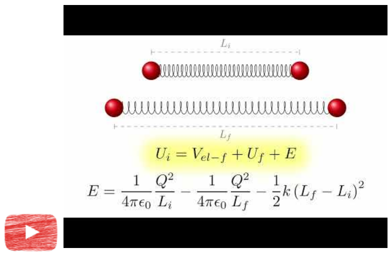
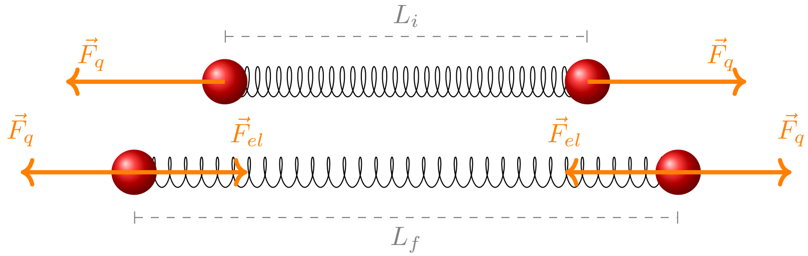


Fig. 3.12: *Guarda il video youtu.be/khx7kyr4lro*

Svolgimento Inizialmente il sistema fisico si trova nello stato mostrato nel disegno. La molla non esercita alcuna forza, mentre è presente la forza repulsiva tra le due cariche elettriche.



La forza elettrostatica tra le cariche è repulsiva. Allontanandosi, le cariche sono trattenute dall'azione della molla che si sta allungando. All'equilibrio l'allungamento è $\Delta L = L_f - L_i$ Quindi

$$k\left(L_f - L_i\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L_f^2}$$

$$Q^2 = 4\pi\epsilon_0 k\left(L_f - L_i\right)L_f^2$$

$$Q = 2L_f\sqrt{\pi\epsilon_0 k\left(L_f - L_i\right)}$$

Per la legge di conservazione dell'energia

$$U_i = V_{el-f} + U_f + E$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L_i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L_f} - \frac{1}{2}k\left(L_f - L_i\right)^2$$

Problema di: Elettrostatica - $E0043$

Testo *[E0043]* [2 ⭐ 2 ⌛ 4a 📖]
E' data una piramide retta a base quadrata, con il lato di base $l = 2\,m$ e l'altezza $h = 3\,m$. La piramide è immersa in un campo elettrico uniforme perpendicolare alla sua base. Calcola il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale della piramide.

Spiegazione Questo esercizio si risolve applicando la prima equazione di Maxwell.

Svolgimento Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è

$$\Phi(\vec{E})_S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Essendo il campo uniforme, le linee di campo sono rette parallele. Se immaginate di guardare la piramide dall'alto (e quindi nella stessa direzione delle linee di campo) noterete che tutte le linee di campo che attraversano la base attraversano poi una delle facce della superficie laterale. E' quindi evidente che il flusso attraverso la base è uguale (ma di segno opposto) al flusso sulla superficie laterale.

Considerando il vettore superficie orientato verso l'esterno della piramide, allora il flusso attraverso la base vale

$$\Phi(\vec{E})_{_{base}} = -E \cdot l^2$$

Quindi il flusso attraverso la superficie laterale vale

$$\Phi(\vec{E})_{_{sl}} = E \cdot l^2$$

Problema di: Elettrostatica - $E0044$

Testo *[E0044]* [3 ⭐ 4 ⌛ 4a 📖]
Un gas di particelle cariche occupa in modo uniforme un contenitore sferico di raggio $r = 50\,cm$. A distanza $d = 3\,m$ dal centro della sfera il campo elettrico misurato vale $E = 2\,\frac{N}{C}$ verso il centro della sfera. Quanto vale il campo elettrico a $x = 10\,cm$ dal centro della sfera?

Spiegazione Questo esercizio si risolve applicando la prima equazione di maxwell.

Svolgimento Cominciamo con il notare che il sistema fisico ha simmetria sferica, e quindi il campo elettrico è radiale. La sfera uniformemente carica si comporta quindi, a distanze maggiori del raggio della sfera, come una singola carica posta nel centro. Quindi la carica complessiva Q presente nella sfera è:

$$K\frac{Q}{d^2} = E$$

$$Q = \frac{Ed^2}{K} = 4\pi\epsilon_0 Ed^2$$

Internamente alla sfera, per esempio su di una superficie sferica di raggio x, il campo ha ancora simmetria sferica ma la carica che contribuisce a determinarlo è solo quella contenuta nella porzione interna della sfera, cioè all'interno della sfera di raggio x.

La carica Q_x interna alla sfera di raggio x è calcolabile come: $Q_x = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}Q = \frac{x^3}{r^3}Q$

Per il teorema di Gauss Il flusso del campo elettrico sulla superficie sferica di raggio x vale

$$\Phi(\vec{E_x}) = \frac{Q_x}{\epsilon_0}$$

$$E_x \cdot 4\pi x^2 = \frac{x^3 Q}{r^3\epsilon_0}$$

$$E_x \cdot 4\pi x^2 = \frac{x^3 4\pi\epsilon_0 Ed^2}{r^3\epsilon_0}$$

$$E_x = xE\frac{d^2}{r^3}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0045$

Testo *[E0045]* [2 4 4a]
In un condensatore piano al cui interno si trova un campo elettrico $E = 4 \cdot 10^3\,\frac{V}{m}$, un protone inizialmente fermo si sposta di $\Delta S = 10\,cm$. Calcolare la variazione di potenziale lungo il percorso fatto, la variazione di energia potenziale del protone e la sua velocità finale.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si allena la capacità di utilizzare le formule studiate.

Svolgimento Lo spostamento della carica positiva inizialmente ferma è parallelo e nello stesso verso delle linee di campo. La differenza di potenziale è quindi data da

$$\Delta V = -\vec{E} \times \vec{\Delta S} = -E \cdot \Delta S \cdot \cos(0) = -400\,V$$

La variazione di energia potenziale è quindi

$$\Delta U = q\Delta V = -6,4 \cdot 10^{-17}\,J$$

Per la legge di conservazione dell'energia, l'energia potenziale persa si è convertita in energia cinetica. Quindi

$$\Delta E_c + \Delta U = 0$$

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = -\Delta U$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{-2\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{12,8 \cdot 10^{-17}}{1,67 \cdot 10^{-27}kg}} = 277\,\frac{km}{s}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0046$

Testo *[E0046]* [3½ 4 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +1\,mC$ e $Q_2 = +2\,mC$, entrambe di massa $m = 1\,g$ e inizialmente ferme, sono poste alla distanza iniziale $r_i = 2\,m$. Quale velocità avranno quando si troveranno alla distanza finale $r_f = 10\,m$?

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

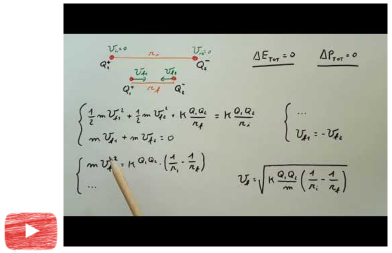


Fig. 3.13: *Guarda il video youtu.be/hPjn8Ih8JWM*

Svolgimento Le cariche elettriche si respingono. La forza che le spinge converte l'energia potenziale elettrostatica in energia cinetica. Vale inoltre la legge di conservazione della quantità di moto.

Indicando le due particelle con gli indici 1 e 2, per la legge di conservazione dell'energia possiamo scrivere:

$$E_{ci1} + E_{ci2} + U_i = E_{cf1} + E_{cf2} + U_f$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto

$$0 = m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2$$

Essendo uguali le masse, allora saranno uguali, anche se di segno opposto, le due velocità.

$$\mathcal{V}_1 = -\mathcal{V}_2$$

Quindi

$$E_{cf1} + E_{cf2} = U_i - U_f$$

$$2E_{cf} = U_i - U_f$$

$$m\mathcal{V}_f^2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi m\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0046a$

Testo *[E0046a]* [3½ 4 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +1\,mC$ e $Q_2 = +2\,mC$, inizialmente ferme, la prima di massa $m_1 = 1\,g$ e la seconda di massa doppia, sono state poste alla distanza iniziale $r_i = 2\,m$. Quale velocità avranno quando si troveranno alla distanza finale $r_f = 10\,m$?

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Svolgimento Le cariche elettriche si respingono. La forza che le spinge converte l'energia potenziale elettrostatica in energia cinetica. Vale inoltre la legge di conservazione della quantità di moto.

Indicando le due particelle con gli indici 1 e 2, per la legge di conservazione dell'energia possiamo scrivere:

$$E_{c1i} + E_{c2i} + U_i = E_{c1f} + E_{c2f} + U_f$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto

$$0 = m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2$$

Essendo la massa $m_2 = 2m_1$, allora per le due velocità, di segno opposto, varrà

$$\mathcal{V}_{1f} = -2\mathcal{V}_{2f}$$

$$\mathcal{V}_{2f} = -\frac{1}{2}\mathcal{V}_{1f}$$

Quindi

$$E_{c1f} + E_{c2f} = U_i - U_f$$

$$\frac{1}{2}m_1 \mathcal{V}_{1f}^2 + \frac{1}{8}m_1 \mathcal{V}_{1f}^2 = U_i - U_f$$

$$\frac{5}{8}m_1 \mathcal{V}_{1f}^2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$$\mathcal{V}_{1f} = \sqrt{\frac{2Q_1 Q_2}{5\pi m_1 \epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}$$

Si può capire che è più facile dare energia cinetica alle particelle di minore massa.

Problema di: Elettrostatica - $E0046b$

Testo *[E0046b]* [3½ 4 4a]
Due cariche elettriche $Q_1 = +1\,mC$ e $Q_2 = -2\,mC$, entrambe di massa $m = 1\,g$ e inizialmente ferme, sono poste alla distanza iniziale $r_i = 15\,m$. Quale velocità avranno quando si troveranno alla distanza finale $r_f = 5\,m$?

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

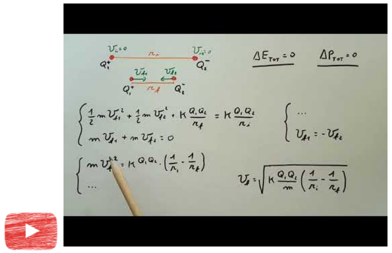


Fig. 3.14: *Guarda il video youtu.be/hPjn8Ih8JWM*

Svolgimento Le cariche elettriche si attraggono. La forza che le spinge converte l'energia potenziale elettrostatica in energia cinetica. Vale inoltre la legge di conservazione della quantità di moto.

Indicando le due particelle con gli indici 1 e 2, per la legge di conservazione dell'energia possiamo scrivere:

$$E_{ci1} + E_{ci2} + U_i = E_{cf1} + E_{cf2} + U_f$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto

$$0 = m_1 \mathcal{V}_1 + m_2 \mathcal{V}_2$$

Essendo uguali le masse, allora saranno uguali, anche se di segno opposto, le due velocità.

$$\mathcal{V}_1 = -\mathcal{V}_2$$

Quindi

$$E_{cf1} + E_{cf2} = U_i - U_f$$

$$2E_{cf} = U_i - U_f$$

$$m\mathcal{V}_f^2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi m\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0046c$

Testo *[E0046c]* [3½ 4 4a]
Due cariche elettriche Q_1 e Q_2, di massa m_1 ed m_2, inizialmente ferme, sono poste alla distanza iniziale r_i. Quale velocità avranno quando si troveranno alla distanza finale r_f? [Esegui solo il calcolo letterale.]

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Svolgimento Indipendentemente dal fatto che le cariche elettriche si attraggano o respingano, aumenteranno la loro velocità a causa della forza elettrostatica. La forza che le spinge converte l'energia potenziale elettrostatica in energia cinetica. Vale inoltre la legge di conservazione della quantità di moto visto che la forza elettrostatica in questo caso è una forza interna.

Indicando le due particelle con gli indici 1 e 2, per la legge di conservazione dell'energia possiamo scrivere:

$$E_{ci1} + E_{ci2} + U_i = E_{cf1} + E_{cf2} + U_f$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto

$$0 = m_1 \mathcal{V}_{f1} + m_2 \mathcal{V}_{f2}$$

$$\mathcal{V}_{f1} = -\frac{m_2}{m_1}\mathcal{V}_{f2}$$

Quindi

$$E_{cf1} + E_{cf2} = U_i - U_f$$

$$\frac{1}{2}m_1\mathcal{V}_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathcal{V}_{f2}^2 = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$$\frac{m_2}{2m_1}(m_1+m_2)\mathcal{V}_{f2}^2 = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

$$\mathcal{V}_{f2}^2 = \frac{2m_2}{m_1(m_1+m_2)}\cdot\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

ed infine

$$\mathcal{V}_{f2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2(m_1+m_2)}\cdot\frac{Q_1Q_2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}$$

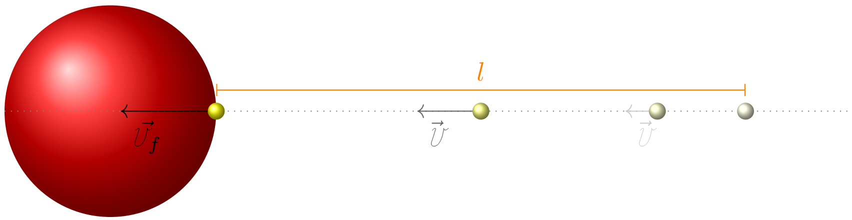
$$\mathcal{V}_{f1} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\cdot\frac{Q_1Q_2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}$$

Considerato che qui si sta parlando di energie e non di moduli di vettori, le grandezze sono considerate con segno. Indipendentemente dai segni delle due cariche è possibile verificare che sotto radice avremo sempre un numero positivo.

Problema di: Elettrostatica - $E0047$

Testo *[E0047]* [3 4 4a]
Un elettrone inizialmente fermo cade su di una sfera carica di raggio $r_0 = 10\,cm$ caricata positivamente con un potenziale $V_0 = 100\,Volt$. L'elettrone si trova inizialmente distante $l = 50\,cm$ dalla superficie della sfera. Con quale velocità arriva sulla superficie della sfera?

Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia nel quale è necessario conoscere le caratteristiche elettrostatiche di una sfera carica. L'elettrone inizialmente fermo acquista energia cinetica grazie al lavoro fatto dal campo elettrostatico.



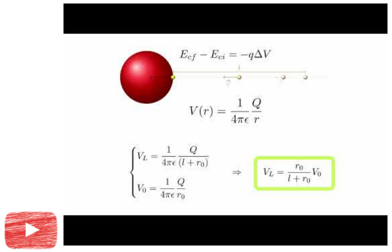


Fig. 3.15: *Guarda il video youtu.be/IYOYeRZRUEg*

Svolgimento Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di energia cinetica è data dal lavoro della forza elettrostatica

$$E_{cf} - E_{ci} = -q\Delta V$$

Per prima cosa calcoliamoci la carica presente sulla sfera, sapendo che è una sfera e che si trova ad un determinato potenziale. La capacità di una sfera è

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\epsilon r_0$$

La carica Q sulla sfera è

$$Q = 4\pi\epsilon r_0 V_0$$

Sappiamo che il campo elettrico di una sfera carica, esternamente alla sfera, è uguale a quello che si genererebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro della sfera. Quindi alla generica distanza r maggiore o uguale al raggio della sfera carica, il potenziale è

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r}$$

Calcolando il potenziale alla distanza iniziale l e sulla superficie della sfera avremo quindi

$$\begin{cases} V_L = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{Q}{(l+r_0)} \\ V_0 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{Q}{r_0} \end{cases} \Rightarrow \quad V_L = \frac{r_0}{l+r_0}V_0$$

Il potenziale alla distanza l dalla superficie (e quindi a distanza $L = l + r_0$ dal centro della sfera) è quindi

$$V_L = \frac{r_0}{l+r_0}V_0$$

Quindi

$$E_{cf} - E_{ci} = -q\,(V_0 - V_L)$$

$$E_{cf} - E_{ci} = -qV_0\left(1 - \frac{r_0}{l+r_0}\right)$$

Sappiamo poi che l'elettrone parte da fermo, e quindi la sua energia cinetica iniziale è nulla, e sapendo che si tratta di un elettrone possiamo al posto della generica carica q mettere nell'equazione la carica dell'elettrone. Quindi il termine $-q$ lo indichiamo come

$$-q = e = +1,6\cdot 10^{-19}C$$

L'equazione diventa quindi

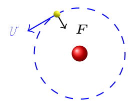
$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = eV_0\left(1 - \frac{r_0}{l + r_0}\right)$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{2\frac{e}{m}V_0\left(1 - \frac{r_0}{l + r_0}\right)} = \sqrt{2,8 \cdot 10^{13}\,\frac{m^2}{s^2}} = 5,3 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0048$

Testo *[E0048]* [3 3 4a]

Dopo aver ricavato la formula per l'energia di un elettrone in un atomo di idrogeno, determina il lavoro che deve fare una forza esterna per estrarre l'elettrone dall'atomo.



Spiegazione Un problema sulla legge di conservazione dell'energia nel quale è necessario conoscere la dinamica di una carica in moto intorno ad un nucleo.

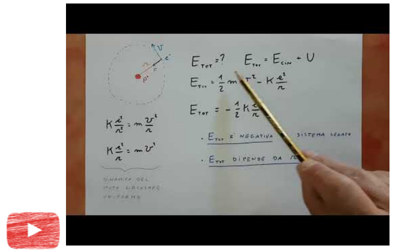


Fig. 3.16: *Guarda il video youtu.be/0wCEVd87NeU*

Svolgimento L'energia totale di un elettrone intorno ad un protone è data da

$$E_{tot} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2$$

Assumendo un'orbita circolare

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$m\mathcal{V}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Quindi

$$E_{tot} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

L'energia totale è negativa in quanto il sistema è un sistema legato. La quantità di energia che una forza esterna deve fornire è quindi

$$L = -E_{tot} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0049$

Testo *[E0049]* [2 3 4a]
Una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 10\,cm$ è caricata da un generatore e portata ad una differenza di potenziale $\Delta V_{1i} = 24\,V$ rispetto all'infinito. Successivamente viene scollegata da esso. In un secondo momento la sfera viene poi collegata con un filo conduttore ad una seconda sfera lontana di raggio $r_2 = 20\,cm$. A quale potenziale saranno disposte le cariche elettriche?

Spiegazione Le due sfere a contatto si distribuiranno della carica elettrica fino a raggiungere lo stesso potenziale.

Svolgimento La capacità della prima sfera è

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1$$

Sapendo che è stata caricata con un potenziale V_{1i} avremo

$$Q_{1i} = 4\pi\epsilon_0 r_1 V_{1i}$$

Messa la prima sfera a contatto con la seconda, la carica presente inizialmente sulla prima sfera si divide tra le due sfere

$$Q_{1i} = Q_{1f} + Q_{2f}$$

da cui, tenendo conto che il potenziale finale delle due sfere deve essere lo stesso, avremo

$$4\pi\epsilon_0 r_1 V_{1i} = 4\pi\epsilon_0 r_1 V_f + 4\pi\epsilon_0 r_2 V_f$$

$$r_1 V_{1i} = r_1 V_f + r_2 V_f$$

$$V_f = \frac{r_1}{r_1 + r_2} V_{1i} = 8\,V$$

Problema di: Elettrostatica - $E0050$

Testo *[E0050]* [2 3 4a]
Una sfera isolante di raggio $R = 1\,m$, omogeneamente carica positivamente, genera un campo elettrico che vale $E_1 = 2\,\frac{N}{C}$ a distanza $r_1 = 0,5\,m$ dal centro. Calcola la carica complessiva di tutta la sfera.

Spiegazione Avendo informazioni sulla geometria del sistema e sui valori del campo elettrico, il teorema di Gauss permetterà di determinare la carica elettrica.

Svolgimento Scegliamo una superficie sferica concentrica con la sfera e di raggio r_1. All'interno di tale sfera è presente una carica elettrica complessiva pari a

$$Q_1 = \epsilon\Phi(E)_S = 4\pi\epsilon E r_1^2$$

La densità di carica, esseno la sfera uniformemente carica, è costante in ogni punto, quindi calcolando la densità di carica interna alla superficie scelta otteniamo la densità di carica di tutta la sfera.

$$\delta = \frac{3Q_1}{4\pi r_1^3} = \frac{3\epsilon E}{r_1}$$

La carica complessiva della sfera isolante è

$$Q = \frac{4}{3}\pi\delta R^3 = 4\pi\epsilon\frac{E}{r_1}R^3$$

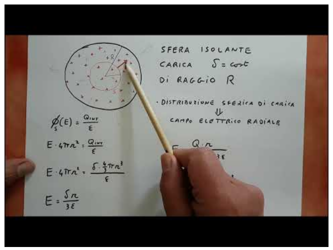


Fig. 3.17: *Guarda il video youtu.be/stNFVwrkkyE*

Problema di: Elettrostatica - $E0051$

Testo *[E0051]* [2 3 4a]
In un campo elettrico uniforme $E = 100\,\frac{N}{C}$, con direzione parallela e verso concorde con l'asse x, un elettrone si è spostata dal punto $O(0,0,0)$ al punto $B(2,3,5)$ ed infine al punto $C(5,0,0)$ le cui coordinate sono espresse in metri. Quanto lavoro ha fatto il campo elettrico sull'elettrone?

Spiegazione Essendo il campo elettrostatico è possibile semplicemente calcolare il lavoro per ogni tratto, oppure semplificarci la mole di calcoli e utilizzare il teorema sulla circuitazione del campo elettrostatico.

Svolgimento Il calcolo del lavoro fatto dal campo elettrico lungo la linea spezzata $A \rightarrow B \rightarrow C$, sapendo che la circuitazione del campo elettrostatico lungo un percorso chiuso è nulla, è equivalente a lavoro lungo il segmento $A \rightarrow C$. Quindi

$$L = qE \cdot \overline{AC} \cdot \cos(0°) = -1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 5\,m \cdot 100\,\frac{N}{C} = -500\,eV$$

Problema di: Elettrostatica - $E0052$

Testo *[E0052]* [2 3 4a]
Ricava, motivando i passaggi eseguiti, l'equazione del campo elettrico generato da un filo infinito, uniformemente carico e con densità lineare di carica λ, a distanza r dal filo stesso. Mostra l'equazione su di un grafico.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento La geometria del problema ci suggerisce di scegliere una superficie cilindrica di raggio r ed altezza h, che abbia come asse il filo carico. Scegliamo in vettore superficie puntato verso l'esterno della superficie. Per il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(E)_S = \frac{Q}{\epsilon}$$

dove Q è la sola carica presente nella parte di filo interna alla superficie.

Dividendo la superficie nella somma delle due superfici di base e di quella laterale possiamo scrivere

$$\Phi(E)_{Sb} + \Phi(E)_{Sb} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Per la simmetria del problema, il campo elettrico sarà in ogni punto dello spazio perpendicolare al filo e diminuirà di intensità all'allontanarsi del filo.

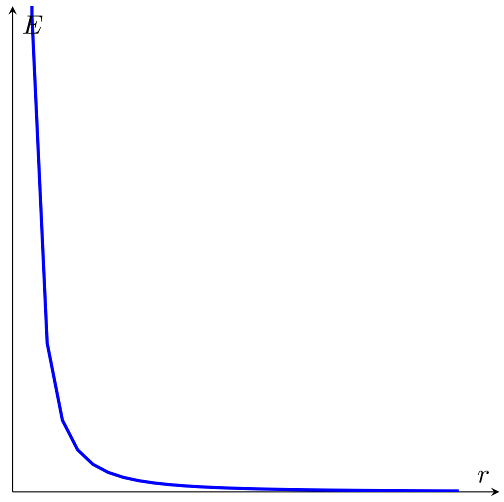
Il flusso del campo elettrico sulle superfici di base sarà nullo in quanto l'angolo tra il vettore superficie ed il campo elettrico, per ogni punto della superficie, è retto.

Sebbene la superficie laterale non sia piana, in ogni punto su di essa il campo elettrico è perpendicolare alla superficie.

Avremo quindi

$$0 + E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon r h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$



Problema di: Elettrostatica - $E0052a$

Testo *[E0052a]* [2½ 3½ 4a]

Motivando i passaggi eseguiti, ricava l'equazione del campo elettrico generato da una sfera conduttrice carica, di raggio R e carica Q, in punti a distanza r dal centro della sfera. Mostra l'equazione su di un grafico.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

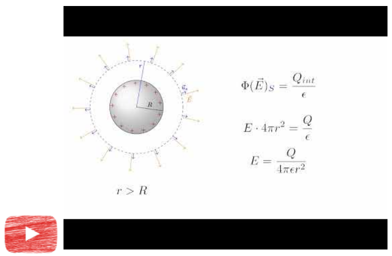
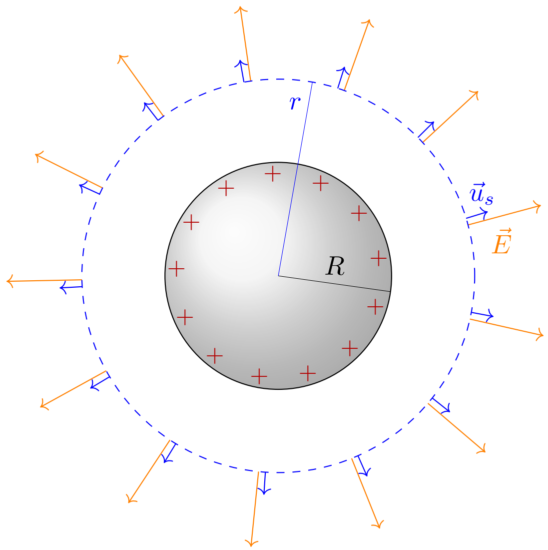


Fig. 3.18: *Guarda il video youtu.be/Nw4ykNZyyvk*

Svolgimento La geometria del problema ci suggerisce di scegliere una superficie sferica di raggio r che abbia come centro la sfera carica. Scegliamo in vettore superficie puntato verso l'esterno della superficie.



Per il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(\vec{E})_S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

dove Q_{int} è la carica presente all'interno della superficie.

Per la simmetria del problema, il campo elettrico sarà in ogni punto dello spazio radiale rispetto al centro della sfera e diminuirà di intensità all'allontanarsi da esso. Se però la superficie è interna alla sfera allora il campo elettrico è nullo.

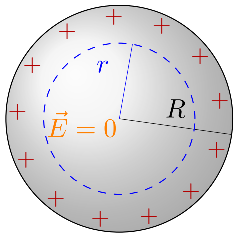
Sebbene la superficie scelta non sia piana, in ogni punto su di essa il campo elettrico è perpendicolare alla superficie.

Avremo quindi, se $r > R$

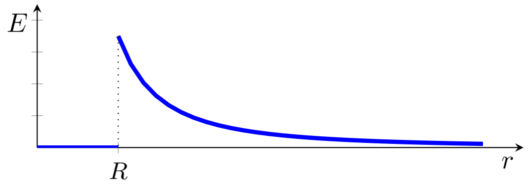
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

se invece $r < R$ avremo che il campo elettrico è $E = 0$, cosa sempre vera all'interno di un conduttore carico.



Il grafico dell'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dal centro della sfera è qui di seguito rappresentato.



Problema di: Elettrostatica - $E0052b$

Testo *[E0052b]* [2 3 4a]
Ricava, motivando i passaggi eseguiti, l'equazione del campo elettrico generato da una lastra infinita conduttrice carica, con densità superficiale di carica σ, a distanza r dalla lastra. Mostra l'equazione su di un grafico.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento Scegliamo come superficie chiusa un cilindro con asse perpendicolare alla lastra le cui superfici di base di area S siano alla stessa distanza r dalla lastra stessa. Consideriamo il vettore superficie che punta verso l'esterno del cilindro. Per ragioni di simmetria, legate al fatto che la lastra è infinita, il campo elettrico deve essere, in ogni punto dello spazio, perpendicolare alla lastra.

Applicando il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(E)_{S.lat} + \Phi(E)_{S.base} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Il campo elettrico, per ogni punto sulla superficie laterale, è sempre ad essa parallelo, quindi il corrispondente flusso è nullo. Il flusso del campo elettrico attraverso le superfici di base è uguale ad entrambe le superfici. Esso vale

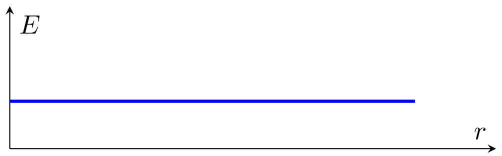
$$\Phi(E)_{S.base} = 2ES$$

Quindi

$$2ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

Si nota che il campo non dipende dalla distanza, in quanto stiamo ipotizzando una lastra infinita. Nella realtà questo è realizzabile solo se consideriamo lastre grandi rispetto alla distanza da essa del punto in cui cerchiamo il campo elettrico.



Problema di: Elettrostatica - $E0052c$

Testo *[E0052c]* [3 3½ 4a]

Motivando i passaggi eseguiti, ricava l'equazione del campo elettrico generato da una sfera isolante uniformemente carica, di raggio R e densità volumetrica di carica δ, in un punto a distanza r dal centro della sfera. Mostra l'equazione su di un grafico.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento La geometria del problema ci suggerisce di scegliere una superficie sferica di raggio r che abbia come centro la sfera carica. Scegliamo in vettore superficie puntato verso l'esterno della superficie.

Per il teorema di Gauss avremo

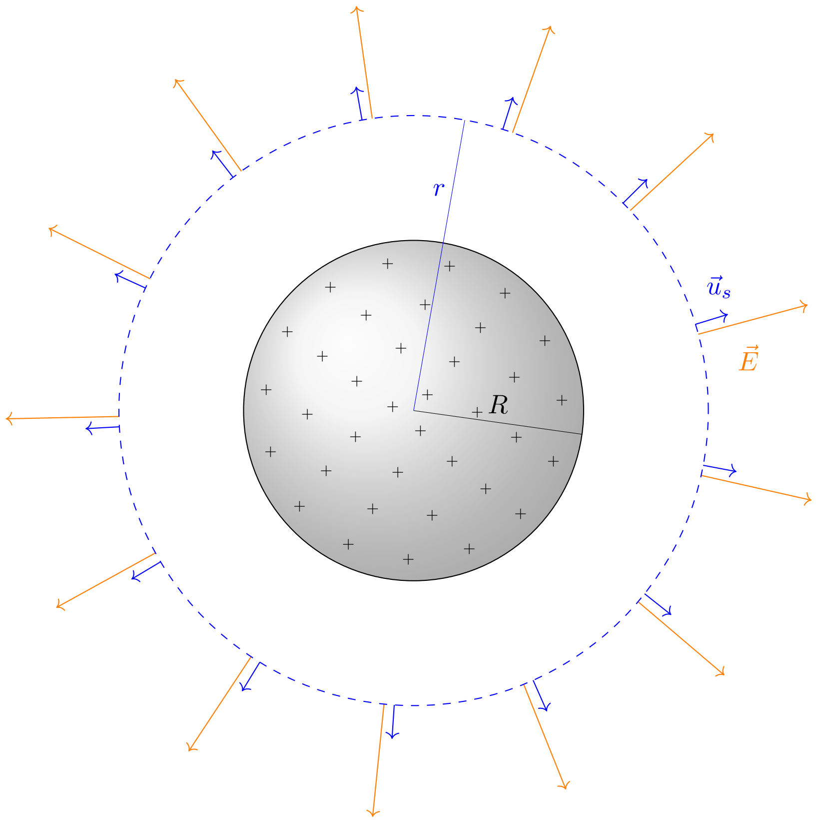
$$\Phi(E)_S = \frac{Q}{\epsilon}$$

dove Q è la carica presente all'interno della superficie.

Per la simmetria del problema, il campo elettrico sarà in ogni punto dello spazio radiale rispetto al centro della sfera. Se però la superficie è interna alla sfera allora il campo elettrico dipenderà soltanto dalla carica interna alla superficie.

Sebbene la superficie scelta non sia piana, in ogni punto su di essa il campo elettrico è perpendicolare alla superficie.

Avremo quindi, se $r > R$



$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

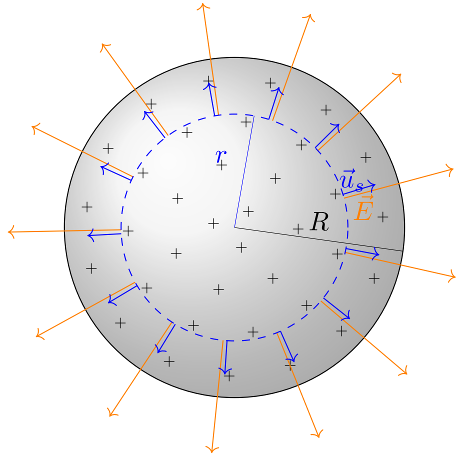
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{\delta \cdot V_{sf.is.}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{\delta \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{\delta R^3}{3\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

se invece $r < R$ avremo, la carica interna alla superficie è solo una parte della carica della sfera, in quanto contenuta all'interno della superficie di Gauss più piccola della superficie del corpo carico.



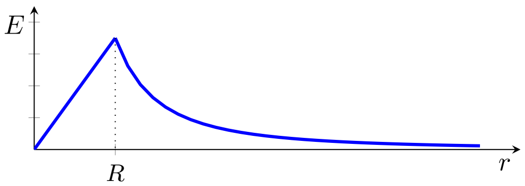
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\delta \cdot V_{sup.Gauss}}{\epsilon}$$

$$E = \frac{\delta \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon r^2}$$

$$E = \frac{\delta}{3\epsilon} \cdot r$$

Il campo elettrico ha quindi l'andamento mostrato nel grafico



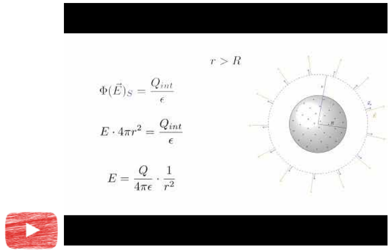


Fig. 3.19: *Guarda il video youtu.be/QpAPzS46bOw*

Problema di: Elettrostatica - $E0052d$

Testo *[E0052d]* [2½ 3 4a]
Ricava, motivando i passaggi eseguiti, l'equazione del campo elettrico generato da un filo conduttore infinito, uniformemente carico, con densità lineare di carica λ, diametro della sezione d, a distanza r dall'asse del filo stesso.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento La geometria del problema ci suggerisce di scegliere una superficie cilindrica di raggio r ed altezza h, che abbia come asse il filo carico. Scegliamo in vettore superficie puntato verso l'esterno della superficie. Per il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(E)_S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

dove Q_{int} è la sola carica presente nella parte di filo interna alla superficie.

Dividendo la superficie nella somma delle due superfici di base e di quella laterale possiamo scrivere

$$\Phi(E)_{Sb} + \Phi(E)_{Sb} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Cominciamo con il considerare il caso $r > \frac{d}{2}$

Per la simmetria del problema, il campo elettrico sarà in ogni punto dello spazio perpendicolare al filo e diminuirà di intensità all'allontanarsi del filo.

Il flusso del campo elettrico sulle superfici di base sarà nullo in quanto l'angolo tra il vettore superficie ed il campo elettrico, per ogni punto della superficie, è retto.

Sebbene la superficie laterale non sia piana, in ogni punto su di essa il campo elettrico è perpendicolare alla superficie.

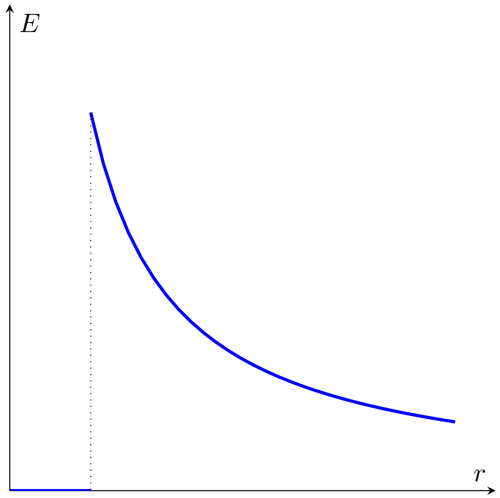
Avremo quindi

$$0 + E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon r h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

Per quanto riguarda invece il caso $r < \frac{d}{2}$ avremo che il campo elettrico è identicamente nullo.

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza è quindi



Problema di: Elettrostatica - $E0052e$

Testo [E0052e] [3 3½ 4a]
Ricava, motivando i passaggi eseguiti, l'equazione del campo elettrico generato da un filo isolante infinito, uniformemente carico, con densità lineare di carica λ, diametro della sezione d, a distanza r dall'asse del tubo stesso.

Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento La geometria del problema ci suggerisce di scegliere una superficie cilindrica di raggio r ed altezza h, che abbia come asse il filo carico. Scegliamo in vettore superficie puntato verso l'esterno della superficie. Per il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(E)_S = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

dove Q_{int} è la sola carica presente nella parte di filo interna alla superficie.

Dividendo la superficie nella somma delle due superfici di base e di quella laterale possiamo scrivere

$$\Phi(E)_{Sb} + \Phi(E)_{Sb} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Cominciamo con il considerare il caso $r > \frac{d}{2}$

Per la simmetria del problema, il campo elettrico sarà in ogni punto dello spazio perpendicolare al filo e diminuirà di intensità all'allontanarsi del filo.

Il flusso del campo elettrico sulle superfici di base sarà nullo in quanto l'angolo tra il vettore superficie ed il campo elettrico, per ogni punto della superficie, è retto.

Sebbene la superficie laterale non sia piana, in ogni punto su di essa il campo elettrico è perpendicolare alla superficie.

Avremo quindi

$$0 + E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q_{int}}{2\pi\epsilon r h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

Per quanto riguarda invece il caso $r < \frac{d}{2}$ avremo che

$$E = \frac{Q_{int}}{2\pi\epsilon r h}$$

dove Q_{int} è la carica contenuta all'interno della superficie cilindrica.

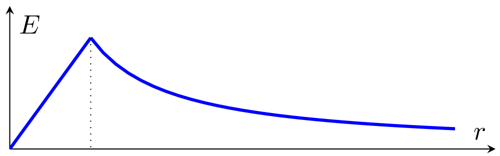
Essa è legata alla carica contenuta Q' nel pezzo di cavo alto come la superficie scelta secondo la seguente espressione

$$Q_{int} = Q' \frac{4\pi r^2 h}{4\pi d^2 h}$$

quindi

$$E = \frac{Q' r^2}{2\pi\epsilon r d^2 h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon d^2} r$$

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza è quindi



Problema di: Elettrostatica - $E0052f$

Testo *[E0052f]* [2 3 4a]
Ricava, motivando i passaggi eseguiti, l'equazione del campo elettrico generato da una carica puntiforme a distanza r da essa. Mostra l'equazione su di un grafico.

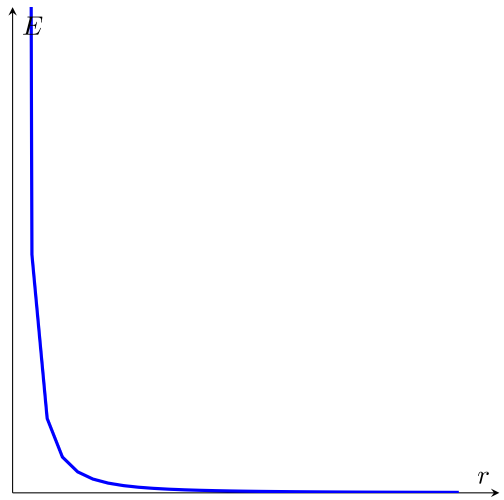
Spiegazione Per ricavare l'equazione del campo ci serviamo del teorema di Gauss e delle proprietà di simmetria del sistema di cariche.

Svolgimento Per ragioni di simmetria il campo elettrico di una carica puntiforme deve essere radiale. Scegliamo come superficie chiusa una sfera di raggio r centrata sulla carica, il cui vettore superficie, per ogni punto della sfera, punta verso l'esterno. In ogni punto il campo sarà quindi parallelo al vettore superficie. Applicando il teorema di Gauss avremo

$$\Phi(E)_S = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$



Problema di: Elettrostatica - $E0053$

Testo *[E0053]* [2 ★ 3 ⌛ 4a 📖]
Due corpi conduttori sferici di eguale raggio r e carica elettrica Q, sono posti a distanza d e tra loro si misura una forza $F = 80\,N$. Un terzo corpo conduttore neutro, uguale ai precedenti, viene prima messo a contatto con una delle sfere e successivamente con l'altro. Il terzo corpo viene poi allontanato all'infinito. Quanto vale adesso la forza tra i due corpi iniziali?

Spiegazione I corpi si caricano per contatto e quindi dopo le operazioni indicate non hanno la stessa carica che avevano in precedenza.

Svolgimento Il terzo corpo a contatto con in primo acquista una carica

$$Q_{3i} = \frac{Q}{2}$$

e di conseguenza la prima carica avrà adesso carica

$$Q_{1f} = \frac{Q}{2}$$

Ora il terzo corpo è a contatto con il secondo, quindi

$$Q_{2f} = \frac{Q + \frac{Q}{2}}{2} = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{4}$$

Dal momento che la distanza tra le prime due sfere non cambia, possiamo scrivere

$$\frac{F_f}{F_i} = \frac{\frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4}\right)}{Q^2}$$

$$\frac{F_f}{F_i} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

$$F_f = \frac{3}{8} F_i$$

$$F_f = 30\,N$$

Problema di: Elettrostatica - $E0053a$

Testo *[E0053a]* [2 3 4a]
Due corpi conduttori uguali, di carica $Q_1 = 2\mu C$ e $Q_2 = 6\mu C$ sono posti a distanza d. Tra loro si misura una forza $F = 80\,N$. Essi sono poi messi a contatto e riportati a distanza $2d$. Quale forza subiscono adesso?

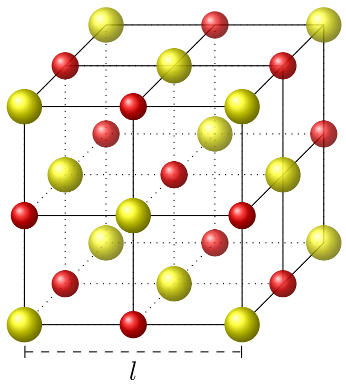
Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Elettrostatica - $E0054$

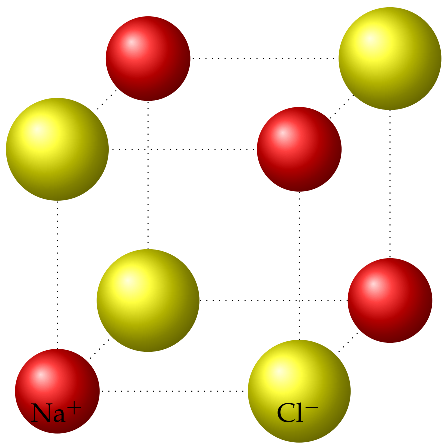
Testo *[E0054]* [2 3 4a]

Nel cristallo di sale (Na^+ Cl^-) gli ioni positivi e negativi Na^+ e Cl^- si dispongono alternandosi, ai vertici di celle cubiche, con una distanza tra due consecutivi ioni Na^+ (o Cl^-) pari a $l = 0,567\,nm$. In questo cristallo l'energia di legame è dovuta in buona parte all'interazione coulombiana tra gli ioni. Considerando una cella cubica contenente quattro ioni positivi e quattro ioni negativi, calcolare l'energia coulombiana per ione del cristallo, e determinare quale percentuale essa rappresenta del valore sperimentale dell'energia di legame, pari a $4,07\,eV$. *[Simulazione esame di maturità scientifica: fisica - 25 gennaio 2016]*



Spiegazione In questo problema bisogna calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche della cella cubica di base.

Svolgimento



Consideriamo la cella cubica indicata dal testo, chiamiamo $d = \frac{l}{2}$ il lato del cubo.

Tutte le coppie di cariche lungo gli spigoli del cubo sono di segno opposto e distano d tra loro; ci sono 12 coppie e quindi

$$U_1 = -12K\frac{e^2}{d}$$

I secondi vicini sono due coppie per ogni faccia del cubo per un totale di 12 coppie di ioni di segno uguale, ad una distanza pari alla diagonale del quadrato. Quindi

$$U_2 = 12K\frac{e^2}{d\sqrt{2}}$$

Le ultime coppie rimaste sono di ioni di segno opposto disposti sulla diagonale del cubo. Ci sono 4 di queste coppie a distanza $d\sqrt{3}$, quindi

$$U_3 = -4K\frac{e^2}{d\sqrt{3}}$$

Quindi

$$U_{tot} = K\frac{e^2}{d}\left(-12 + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$U_{tot} = K\frac{e^2}{l}\left(-24 + \frac{24}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 47,28\,eV$$

L'energia potenziale media per ogni ione è quindi l'energia totale diviso per il numero di ioni.

$$U = \frac{U_{tot}}{8} = -3,69\,eV$$

Il valore sperimentale è ovviamente comprensivo dell'energia potenziale di tutti gli ioni presenti intorno alla cella elementare

Il contributo degli ioni della cella rappresenta una percentuale

$$p = \frac{U}{U_{sper}} = 90,7\%$$

Problema di: Elettrostatica - $E0056$

Testo *[E0056]* [2½ 4 4a]
Due protoni Q_1 e Q_2 sono posti in un sistema di riferimento cartesiano in metri nei punti $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Un terzo protone è posto fermo nel punto $C(0,4)$. Calcola il campo elettrico e la forza subiti dalla terza carica.

Spiegazione In questo esercizio, le distanze tra le cariche, necessarie per calcolare le distanze nelle formule necessarie, le si calcolano a partire dalle coordinate dei punti.

Svolgimento Il terzo protone sente i campi elettrici degli altri due. La distanza del terzo protone da entrambi gli altri due è $r = \sqrt{3^2 + 4^2}\,m = 5\,m$

Il campo elettrico che agisce sul terzo protone dovuto ad ognuna delle due cariche vale

$$E = K\frac{e}{r^2}$$

e forma con l'asse verticale un angolo definito da

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}$$

e di conseguenza da

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

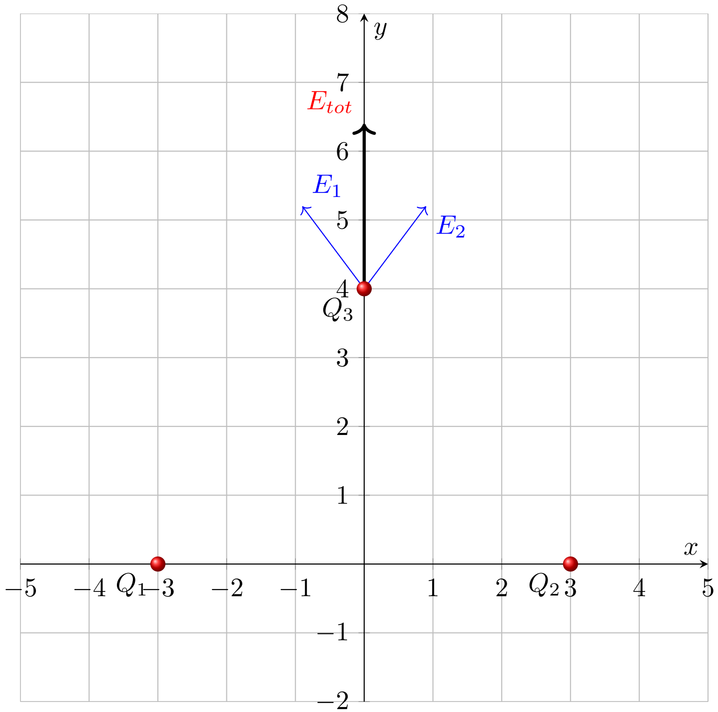
Il campo elettrico totale è quindi la somma dei due campi elettrici. Le loro componenti orizzontali si cancellano e quelle verticali si sommano.

$$E_{tot} = 2K\frac{e}{r^2} \cdot \cos(\theta) = \frac{8}{5}K\frac{e}{r^2}$$

La forza subita è quindi

$$F = \frac{8}{5}K\frac{e^2}{r^2}$$

diretta nello stesso verso del campo elettrico.



Problema di: Elettrostatica - $E0057$

Testo *[E0057]* [1 ★ 2 ⌛ 4a 📖]
Un condensatore piano di sezione $S = 1\,cm^2$, distanza tra le piastre $d = 1\,mm$, riempito con materiale isolante con $\epsilon_r = 4$, è caricato da un generatore $\Delta V = 12\,V$. Calcola la carica elettrica sulle piastre e l'energia immagazzinata nel volume del condensatore.

Spiegazione Semplice applicazione delle formule.

Svolgimento La capacità del condensatore piano è data da

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

Allo stesso tempo la definizione di capacità dice che

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Quindi

$$\frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$
$$Q = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S \cdot \Delta V}{d}$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è data da

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{2d} \Delta V^2$$

Problema di: Elettrostatica - $E0058$

Testo *[E0058]* [2 ★ 4 ⌛ 4a 📖]
Quattro cariche positive del valore $Q = 2\,\mu C$ sono poste ai vertici di un quadrato di lato $L = 2\,m$. Calcola il lavoro necessario per portare una delle cariche nel centro del quadrato

Spiegazione Il sistema ha inizialmente una certa energia potenziale elettrostatica. Portando una delle due cariche nel centro del quadrato tale energia cambia e quindi è possibile calcolare il lavoro necessario allo spostamento.

Svolgimento Il lavoro di una forza esterna, necessario a portare la carica nel centro del quadrato, corrisponde alla variazione di energia potenziale del sistema. L'energia potenziale dovuta alla presenza di una sola delle cariche (ipotizziamo cioè di averla portata nel vertice del quadrato partendo dall'infinito) è data da

$$U_i = KQ^2 \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}L} \right)$$
$$U_i = K\frac{Q^2}{L} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ottenuta sommando le tre energie potenziali della carica con le altre. Portando la carica nel centro del quadrato, avremo

$$U_f = KQ^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{L} + \frac{\sqrt{2}}{L} + \frac{2}{\sqrt{2}L} \right)$$
$$U_f = K\frac{Q^2}{L} \left(3\sqrt{2} \right)$$

questo perché tutte le cariche sono adesso più vicine; due sono più vicine di un fattore $\sqrt{2}$, quella opposta rispetto al centro è più vicina di un fattore 2

Il lavoro fatto da una forza esterna sarà quindi

$$L = \Delta U = U_f - U_i = K\frac{Q^2}{L} \left(3\sqrt{2} - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$
$$L = \Delta U = U_f - U_i = K\frac{Q^2}{\sqrt{2}L} \left(5 - 2\sqrt{2} \right)$$

Problema di: Elettrostatica $E0059$

Testo *[EM0059]* [2 3 5a]
Due sfere conduttrici di raggio rispettivamente $r_1 = 3\,cm$, $r_2 = 4\,cm$, sono cariche con la stessa carica Q. Si mettono a contatto e poi le si allontana. Quale carica finale avranno le tre sfere?

Spiegazione [...]

Svolgimento Mettendo a contatto le sfere, di fatto si realizza un collegamento in parallelo, in quanto la superficie delle sfere avrà lo stesso potenziale.

La capacità della sfera conduttrice è data da

$$C = 4\pi\epsilon r$$

La capacità delle prime due sfere collegate sarà

$$C_{12} = 4\pi\epsilon\,(r_1 + r_2)$$

Il potenziale a cui si dispongono sarà

$$V_{12} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon\,(r_1 + r_2)}$$

Il valore della carica sulla seconda sfera è quindi

$$Q_2 = C_2 V_{12} = 2Q\frac{4\pi\epsilon r_2}{4\pi\epsilon\,(r_1 + r_2)} = 2Q\frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

La prima per lo stesso motivo avrà carica

$$Q_1 = C_1 V_{12} = 2Q\frac{4\pi\epsilon r_1}{4\pi\epsilon\,(r_1 + r_2)} = 2Q\frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

Problema di: Elettrostatica - $E0060$

Testo *[E0060]* [2 3 4a]

E' dato un cubo di lato $L = 1\,m$ ai cui vertici sono posizionate quattro cariche elettriche positive e quattro cariche elettriche negative tutte di valore $|Q| = 2\,\mu C$. Le cariche sono disposte in modo tale per cui gli spigoli del cubo collegano cariche di segno opposto. Quanto vale il flusso attraverso una superficie sferica di raggio $r = 1,2\,m$ il cui centro si trova su di una carica negativa?

Spiegazione Utilizzando l'equazione di Gauss arriviamo alla soluzione del problema. Bisogna solo capire quali cariche sono interne alla sfera.

Svolgimento Le cariche interne alla sfera sono solo la carica negativa al centro della sfera e le cariche positive ad essa vicine collegate da uno spigolo. Le altre cariche negative, infatti, sono ad una distanza corrispondente alla diagonale di un quadrato che in questo problema è maggiore del raggio. L'altra carica positiva è ancora più distante.

Quindi

$$\Phi(E) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{+3Q_+ + Q_-}{\epsilon_0} = \frac{+2Q_+}{\epsilon_0}$$

Problema di: Cinematica - Elettromagnetismo - $CE0002$

Testo *[CE0002]* [3 2 4a]

Quanto vale la velocità con cui si muove un elettrone all'interno di un atomo di idrogeno? Ipotizza che il raggio dell'orbita sia $r = 1\,\text{Å}$.

Spiegazione Assumendo che l'elettrone compia un orbita circolare intorno al nucleo, visto che la forza di tipo centripeto che subisce l'elettrone è la forza di Coulomb, il problema si risolve eguagliando la formula della forza centripeta con la formula della forza di Coulomb

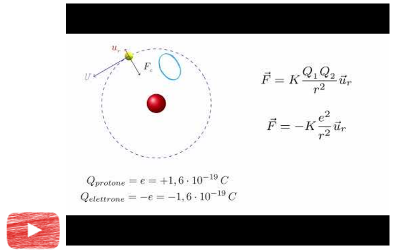
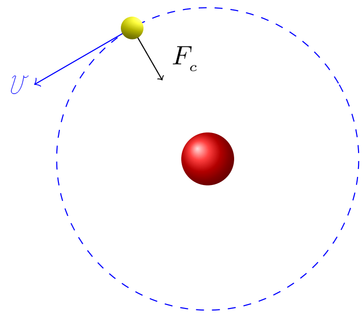


Fig. 3.20: *Guarda il video youtu.be/NrfSChY7wIw*

Svolgimento



Indicando con

$$Q_{protone} = e = +1,6 \cdot 10^{-19}\,C$$

$$Q_{elettrone} = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}\, C$$

i valori delle cariche elettrice del protone e dell'elettrone, con m_e la massa dell'elettrone, con $\mathcal{V}$ la sua velocità, e con r il raggio dell'atomo, avremo, affermando che la forza di Coulomb è la forza di tipo centripeto che tiene in orbita l'elettrone, che[1]:

$$\frac{m_e \mathcal{V}^2}{r} = \frac{Ke^2}{r^2}$$

da cui, stimando il raggio dell'orbita $r = 1\,\text{Å} = 10^{-10}\, m$, pari all'ordine di grandezza delle dimensioni di un atomo

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{Ke^2}{m_e r}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} C)^2}{9.1 \cdot 10^{-31} kg \cdot 10^{-10}\, m}}$$

$$\mathcal{V} = 1,59 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

[1] La forza di Coulomb è nella sua forma vettoriale

$$\vec{F} = K\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Che in questo caso diventa, applicata all'atomo di idrogeno

$$\vec{F} = -K\frac{e^2}{r^2}\vec{u}_r$$

Il modulo della forza vale quindi

$$F = \frac{Ke^2}{r^2}$$

in quanto il meno ed il versore servono solo a determinarne direzione e verso. In questo esercizio avremo solo bisogno del modulo della forza.

Problema di: Elettrostatica - $CE0003$

Testo *[CE0003]* [3 4 4a]
Un elettrone si muove l'ungo l'asse x di un sistema di riferimento, con velocità $\mathcal{V}_{ix} = 10\, \frac{m}{s}$. Ad un certo punto entra in un condensatore in cui si trova un campo elettrico uniforme $E = 1\, \frac{N}{C}$ rivolto lungo l'asse delle y e in verso opposto. Percorre in esso una distanza in orizzontale $d = 10\, cm$ per poi uscirne e dirigersi verso uno schermo posto alla distanza $L = 1\, m$ dal punto di uscita dal condensatore. In quale posizione sull'asse delle y si trova lo schermo?

Spiegazione La particella quando si muove nel condensatore subisce una forza costante verso l'alto, quindi si muove di moto uniformemente accelerato in verticale e rettilineo uniforme in orizzontale. Uscita dal condensatore si muove di moto rettilineo uniforme.

Svolgimento Cominciamo a calcolare quanto tempo passa nel condensatore

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{\mathcal{V}_x} = \frac{d}{\mathcal{V}_{ix}}$$

La velocità cambia di un vettore verso l'alto il cui modulo è

$$\Delta \mathcal{V}_y = a \cdot \Delta t = \frac{eEd}{m_e \mathcal{V}_{ix}}$$

La componente verticale della velocità sarà quindi

$$\mathcal{V}_{fy} = \mathcal{V}_{iy} + \Delta \mathcal{V}_y = 0 + \frac{eEd}{m_e \mathcal{V}_{ix}}$$

Lo spostamento verso l'alto sarà

$$\Delta S_{1y} = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{eEd^2}{2 m_e \mathcal{V}_{ix}^2}$$

L'elettrone raggiunge lo schermo dopo un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{L}{\mathcal{V}_{ix}}$$

In questo intervallo di tempo si è spostata verso l'alto di

$$\Delta S_{2y} = V_{fy}\Delta t_2 = \frac{eEdL}{m_e V_{ix}^2}$$

Il punto di impatto sullo schermo sarà in un punto all'altezza

$$S_y = 0 + \Delta S_{1y} + \Delta S_{2y} = \frac{eEd^2}{2m_e V_{ix}^2} + \frac{eEdL}{m_e V_{ix}^2} = \frac{eEd}{m_e V_{ix}^2}\left(\frac{d}{2} + L\right)$$

Problema di: Elettrostatica - $CE0004$

Testo [CE0004] [3 2 4a]
Un elettrone si muove con velocità $V_{ix} = 10\,\frac{m}{s}$ lungo l'asse x di un sistema di riferimento. Ad un certo punto entra in un condensatore in cui si trova un campo elettrico $E = 1\,\frac{N}{C}$ uniforme rivolto lungo l'asse delle y e in verso opposto. Percorre in esso una distanza in orizzontale $d = 10\,cm$ per poi uscirne. In quale posizione sull'asse delle y esce dal condensatore?

Spiegazione La particella quando si muove nel condensatore subisce una forza costante verso l'alto, quindi si muove di moto uniformemente accelerato in verticale e rettilineo uniforme in orizzontale. Uscita dal condensatore si muove di moto rettilineo uniforme.

Svolgimento Cominciamo a calcolare quanto tempo passa nel condensatore

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{V_x} = \frac{d}{V_{ix}}$$

Lo spostamento verso l'alto sarà

$$\Delta S_{1y} = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{eEd^2}{2m_e V_{ix}^2}$$

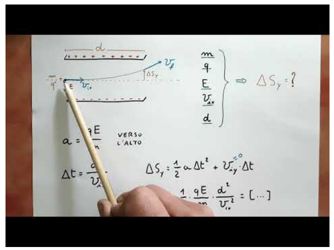


Fig. 3.21: *Guarda il video youtu.be/awtMbWTGChA*

Problema di: Elettrostatica - $CE0005$

Testo *[CE0005]* [3 5 4a]
Una carica $C = 1\,\mu C$ di massa $m = 10^{-3}\,kg$ si muove in un campo elettrico uniforme parallelo all'asse orizzontale $\vec{E} = 100\,\frac{N}{C}\vec{u}_x$ con velocità iniziale $V_i = 10\,\frac{m}{s}$ lungo una direzione inclinata di $\alpha = 60°$ con le linee del campo elettrico. Dove si trova la carica dopo un tempo $\Delta t = 2\,s$? Che angolo forma alla fine la velocità della carica con il campo elettrico?

Spiegazione La carica elettrica si muove in un campo elettrico costante e quindi subisce una forza elettrica costante. Essa si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione perpendicolare alla forza e quindi al campo elettrico, e di moto uniformemente accelerato nella direzione parallela al campo elettrico.

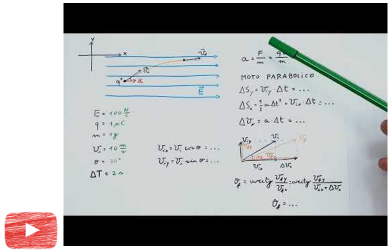


Fig. 3.22: *Guarda il video youtu.be/rJ17kd1FmjY*

Svolgimento Scomponendo la velocità iniziale della carica lungo le direzioni parallela e perpendicolare al campo elettrico

$$\begin{cases} V_{ix} = V_i \cos\alpha = 2,5\,\dfrac{m}{s} \\ V_{iy} = V_i \sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Considerando l'asse verticale, la carica si muove di moto rettilineo uniforme, quindi la velocità in verticale è costante

$$V_{fy} = V_{iy}$$

$$\Delta S_y = V_{iy}\cdot\Delta t = 5\sqrt{3}\,m \simeq 8,66\,m$$

Considerando l'asse orizzontale la carica si muove di moto uniformemente accelerato

$$\Delta S_x = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\Delta t^2 + V_{ix}\cdot\Delta t = 0,2\,m + 1,25\,m = 1,45\,m$$

La carica si trova quindi $8,66\,m$ più in alto e $1,45\,m$ più a destra
La velocità finale della carica sull'asse orizzontale sarà

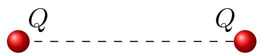
$$V_{fx} = V_{ix} + a\Delta t = V_{ix} + \frac{qE}{m}\Delta t = 2,7\,\frac{m}{s}$$

L'angolo che la carica forma con l'asse orizzontale sarà quindi

$$\beta = \arctan\frac{V_{fy}}{V_{fx}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2,7} = 58,1°$$

Problema di: Dinamica - Elettromagnetismo - $DE0010$

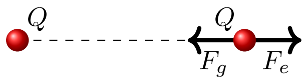
Testo *[DE0010]* [1 ⭐ 1 ⌛ 4a 📖]



Due cariche elettriche uguali, con eguale carica elettrica e massa, di carica $Q = 4\mu C$ si trovano alla distanza $d = 2\,m$. Quale massa devono avere affinché l'attrazione gravitazionale tra loro equilibri la repulsione elettrostatica? $[K = 9 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2}; G = 6,67 \cdot 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2}]$

Spiegazione Tra le due cariche elettriche agiscono due forze: la repulsione dovuta alla forza di Coulomb e l'attrazione gravitazionale dovuta alla loro massa. Si tratta di stabilire quanto deve valere la massa delle due particelle affinché le due forze, che ovviamente sono opposte, siano anche uguali.

Svolgimento Eguagliando le due forze avremo



$$G\frac{M_1 M_2}{d^2} = K\frac{Q_1 Q_2}{d^2}$$

Le particelle hanno stessa massa e carica elettrica, quindi $M_1 = M_2 = M$ e $Q_1 = Q_2 = Q$ da cui

$$M^2 = \frac{K \cdot Q^2}{G}$$

$$M = \sqrt{\frac{K \cdot Q^2}{G}} = Q\sqrt{\frac{K}{G}}$$

Mettiamo adesso i valori numerici all'interno della formula

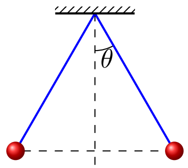
$$M = 4 \cdot 10^{-6} C \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2}}{6,67 \cdot 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2}}} = 4,65 \cdot 10^4\, kg$$

Il fatto che il valore delle masse sia risultato molto grande è dovuto al fatto che l'interazione gravitazionale è estremamente più debole dell'interazione elettromagnetica.

Problema di: Elettromagnetismo - $DE0022$

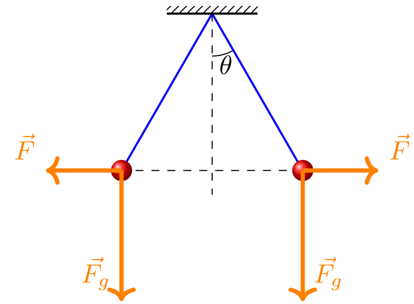
Testo *[DE0022]* [3 ⭐ 4 ⌛ 4a 📖]

Due sfere di massa $m = 15\,g$, elettrizzate con la stessa carica Q, sono appese con due fili entrambi lunghi $l = 20\,cm$. Nella condizione di equilibrio tali fili formano un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla verticale. Quanto vale la carica elettrica sulle due sfere?



Spiegazione Le due sfere si respingono. Nella posizione di equilibrio ogni sfera è soggetta ad una forza elettrostatica che genera un momento antiorario ed un momento orario è invece generato dalla forza di gravità. Nella condizione di equilibrio i due momenti si equivalgono.

Svolgimento Consideriamo il filo sulla destra nel disegno. Il momento della forza di gravità rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è orario e vale



$$M_g = F_g \cdot l \cdot \sin\theta$$

Il momento della forza di Coulomb rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è antiorario e vale

$$M_c = F_c \cdot l \cdot \sin(90 - \theta) = F_c \cdot l \cdot \cos\theta$$

Quindi la condizione di equilibrio è

$$F_c \cdot l \cdot \cos\theta = F_g \cdot l \cdot \sin\theta$$

$$K\frac{Q^2}{(r)^2} \cdot \cos\theta = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

La distanza tra le due cariche è

$$r = 2 \cdot l \sin\theta$$

$$K \frac{Q^2}{(2 \cdot l \sin\theta)^2} \cdot \cos\theta = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

$$Q^2 = \frac{4 \cdot l^2 \cdot m \cdot g \cdot \sin^3\theta}{K \cdot \cos\theta}$$

$$Q = \sqrt{\frac{4 \cdot l^2 \cdot m \cdot g \cdot \sin^3\theta}{K \cdot \cos\theta}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,04\, m^2 \cdot 0,015\, kg \cdot 9,8\, \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{8}}{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$Q = 6,1\, \mu C$$

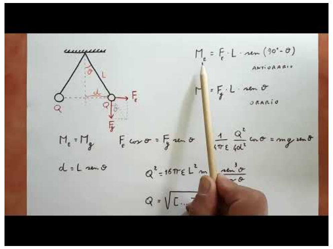


Fig. 3.23: *Guarda il video youtu.be/x8o634xF34c*

Problema di: Magnetismo - $M0001$

Testo *[M0001]* [1 3 4a]
Due sfere con carica elettrica $C = 10\,\mu C$ sono poste alla distanza $d = 30\,cm$. Calcolare la forza con la quale le sfere si respingono quando sono in quiete e quando si muovono parallelamente con velocità costante $V = 90000\frac{km}{s}$.

Spiegazione Le due sfere cariche si respingono tra loro a causa della forza di Coulomb. Quando poi le due cariche si muovono, generano un campo magnetico; ognuna delle due cariche si muove quindi nel campo magnetico generato dall'altra, e quindi subisce una forza magnetica. Essendo le due cariche con velocità parallele nello stesso verso, allora la forza magnetica è attrattiva e si oppone alla forza di Coulomb repulsiva.

Svolgimento Per risolvere il problema è sufficiente calcolare le due forze con le opportune le formule.

Forza di Coulomb

$$F_c = K\frac{Q^2}{d^2} = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{10^{-10}C^2}{0,09\,m^2} = 10\,N$$

Il vettore che definisce la posizione di una carica rispetto all'altra è perpendicolare alla velocità delle cariche. Il campo magnetico generato da una delle due cariche in moto sull'altra è quindi

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QV}{d^2} = 10^{-7}\frac{Ns^2}{C^2}\frac{10^{-5}C\cdot 90000000\frac{m}{s}}{0,09\,m^2} = 10^{-3}\,T$$

La forza magnetica e la forza totale agenti tra le due cariche risultano

$$F_m = QVB = 0,9\,N$$

$$F = F_c - F_m = 9,1\,N$$

Domanda di teoria: Magnetismo - $M0002$

Testo *[M0002]* [2 4 4a]
La forza elettrostatica e la forza magnetica hanno una struttura profondamente differente. Descrivi tali strutture sottolineandone le differenze, e sulla base di esse spiega come può muoversi una carica in un campo elettrico ed in un campo magnetico costanti.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale.

Svolgimento Una carica elettrica immersa in un campo elettrico subisce una forza data dall'equazione

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Questo significa che, per campi costanti, la forza è costante e parallela al campo. Una forza costante genera un'accelerazione costante anch'essa parallela al campo. Se la particella ha una velocità iniziale parallela al campo, si muoverà di moto uniformemente accelerato, altrimenti di moto parabolico.

Una carica che si muove in un campo magnetico subisce una forza data dall'equazione

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{V}}\times\vec{B}$$

A differenza del caso precedente, la forza dipende anche dalla velocità della particella, sia dal modulo che dalla direzione e verso del vettore velocità. In ogni caso il vettore forza è perpendicolare alla velocità ed al campo magnetico. Il valore della forza è dato da

$$F = q\mathcal{V}B\sin\alpha$$

dove α è l'angolo tra la velocità ed il campo. Quando la velocità è parallela al campo la particella non subisce alcuna forza e si muove di moto rettilineo uniforme. Quando la velocità è perpendicolare al campo la particella si muoverà di moto circolare uniforme. Per altri angoli avremo la composizione dei due moti e quindi un moto elicoidale.

Considerando infine che una forza fa lavoro solo se l'angolo con la velocità della particella non è retto, allora, a differenza della forza elettrica, la forma magnetica non fa mai lavoro.

Griglia di valutazione dell'esercizio I concetti da sviluppare nello scrivere la risposta sono:

- Scrivere le equazioni sottolineando il tipo di operazione tra vettori e il conseguente angolo che si forma tra campo e forza; si deve evidenziare la dipendenza della forza magnetica dalla velocità della particella ed il fatto che la forza magnetica non fa lavoro.
- Tipi di moto: a seconda dell'angolo tra velocità iniziale della particella e campo elettrico il moto della particella è uniformemente accelerato oppure parabolico; a seconda dell'angolo tra velocità iniziale della particella e campo magnetico, il moto della particella è rettilineo uniforme per angolo nullo o piatto, circolare uniforme per angolo retto, elicoidale per angoli differenti.

Esercizi concettualmente identici

Qui di seguito una serie di domande la cui risposta è di fatto contenuta nello svolgimento sopra illustrato.

1. Descrivi la forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\mathcal{V}} \times \vec{B}$ evidenziando le principali differenze tra la componente dovuta al campo elettrico e quella dovuta al campo magnetico, anche in relazione ai moti che ne seguono.
2. Come si muove una carica sotto l'azione di un campo elettrico o di un campo magnetico?

Domanda di teoria: Magnetismo - $M0003$

Testo *[M0003]* [3 4 4a]
Dopo aver illustrato le finalità dell'utilizzo di uno spettrometro di massa, descrivi il moto di una particella al suo interno, sia nella prima parte del selettore di velocità, sia nella seconda. Dai particolare risalto alla relazione tra i campi elettrici e magnetici e alla forza risultante sulla particella.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale.

Svolgimento Lo spettrometro di massa serve per separare, in un gas, gli elementi che lo costituiscono in funzione della loro massa, allo scopo di conoscerne l'abbondanza relativa all'interno del campione di gas analizzato.

Le molecole (o gli atomi) vengono prima ionizzati (acquisendo la carica di un protone) e poi accelerati da una differenza di potenziale. La prima parte dello spettrometro è costituito dal selettore di velocità. le particelle vi entrano con una velocità non conosciuta, ma si trovano a viaggiare in uno spazio in cui è stato posizionato un campo elettrico ed un campo magnetico tra loro perpendicolari. I due campi sono posizionati in modo che le due conseguenti forze siano tra loro parallele ed opposte. La risultante tra le due forze dipende dalla velocità; la risultante è nulla per velocità corrispondenti al rapporto tra campo elettrico e magnetico.

$$\mathcal{V} = \frac{E_1}{B_1}$$

In tal caso le particelle si muovono di moto rettilineo uniforme e riescono ad uscire dallo spettrometro.

La seconda parte dello strumento vede le particelle muoversi con velocità ora ben determinata, in una regione con un campo magnetico perpendicolare al loro moto. La forza magnetica è quindi centripeta, conseguentemente alla presenza del prodotto vettoriale nella formula per la forza magnetica. Le particelle seguono quindi un percorso circolare di raggio

$$r = \frac{m\mathcal{V}}{qB_2}$$

Le velocità sono uguali per tutte le particelle, le cariche corrispondono a quella del protone, il campo magnetico è parte della costruzione dello strumento, la massa rimane l'unica grandezza che determina il raggio del percorso. Particelle di massa differente vengono quindi separate e raccolte in punti differenti.

Griglia di valutazione dell'esercizio I concetti da sviluppare nello scrivere la risposta sono:

- Finalità dello strumento
- Selettore di velocità: struttura dello strumento e posizionamento dei campi al suo interno.
- Moto circolare uniforme come conseguenza della struttura della formula e conseguenze su ioni differenti.

Domande di teoria: Campo magnetico - $M0004$

Testo *[M0004]* [3 20 4a]
Rispondi in modo conciso ma esauriente alle seguenti richieste.

1. Descrivi il ciclo di isteresi di un materiale
2. Qual é la principale differenza ingegneristica tra un ciclotrone ed un sincrotrone? Illustrala dando risalto alla relazione tra le due differenti soluzioni ingegneristiche e le connesse equazioni di dinamica elettromagnetica.
3. Qual'è la definizione di *Ampere*? Spiega il funzionamento dell'apparato sperimentale che definisce tale unità di misura.

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Domanda di teoria: Magnetismo - $M0005$

Testo *[M0005]* [2 ⭐ 4 ⌛ 4a 📖]
Descrivi il campo magnetico di un solenoide e di un filo percorso da corrente: forma, caratteristiche, formula. Ricava poi tale formula utilizzando la legge di Ampére.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale.

Svolgimento Un filo percorso da corrente emette un campo magnetico proporzionale alla corrente che lo percorre. In un solenoide tale campo è contenuto quasi completamente all'interno di esso, mentre all'esterno è minimo. La presenza all'esterno è necessaria in quanto le linee di campo magnetico sono linee chiuse. Nell'ipotesi di solenoide infinito il campo è interamente contenuto all'interno del solenoide. Il suo valore è $B = \mu_0 ni$ dove n è la densità lineare di spire. Per quanto riguarda il campo magnetico di un filo infinito, esso è formato da linee di campo circolari su piani perpendicolari al filo, concentriche con il filo. L'intensità del campo diminuisce linearmente con il raggio secondo la formula $M = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$

Le due formule citate sono conseguenza dell'applicazione della legge di Ampére. *[adesso è il momento di mostrare lo schema ed i calcoli che portano a ricavare la formula a partire dalla legge.]*

Griglia di valutazione dell'esercizio I concetti da sviluppare nello scrivere la risposta sono:

- Nell'ipotesi di lunghezza infinita: campo magnetico costante e uniforme tutto contenuto all'interno. In realtà all'esterno deve esserci un debole campo (le linee sono chiuse). Formula $B = \mu_0 ni$.
- Campo di un filo formato da linee di campo su piani perpendicolari al filo, circolari concentriche con il filo. $B = n\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$
- Indicazione di come utilizzare l'equazione di Ampere per ricavare tali formule.

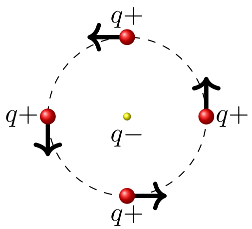
Esercizi concettualmente identici

1. .

Problema di: Magnetismo - $M0008$

Testo *[M0008]* [1 2 4a]

Quattro cariche elettriche identiche, tutte positive del valore $q = 4\,\mu C$ si muovono sul tuo foglio lungo un percorso circolare di raggio $r = 10\,cm$ e con velocità $V = 10\,\frac{m}{s}$. Quanto vale e dove è diretto il campo magnetico che generano nel centro della spira? Quanto vale la forza magnetica che subisce una carica negativa che entra perpendicolarmente al tuo foglio?



Spiegazione Ogni carica elettrica che si muove emette un campo magnetico; una carica elettrica che si muove in un campo magnetico subisce una forza. In questo esercizio quattro cariche positive si muovono e generano nel punto centrale un campo magnetico. Tale campo interagirà poi con la carica elettrica negativa generando su di essa una forza. per risolvere l'esercizio bisogna prima calcolarci i campi generati dalle quattro cariche, sommarli, ed infine calcolarci la forza magnetica sulla carica negativa.

Svolgimento Prendiamo in considerazione la prima carica: Con la regola della mano destra determiniamo che il campo magnetico generato nel centro del cerchio è un vettore perpendicolare al foglio e che esce dal foglio. Il valore è

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{V \cdot sen(\alpha)}{r^2}$$

$$B = 10^{-7} \frac{Tsm}{C} \cdot 4\,\mu C \frac{10\,\frac{m}{s} \cdot \sin(90^\circ)}{0,01\,m^2} = 4 \cdot 10^{-10}\,T$$

Se adesso consideriamo le altre tre cariche notiamo che esse generano campi magnetici assolutamente identici. Il campo magnetico totale nel centro del percorso circolare sarà quindi quattro volte quello della singola carica

$$B = 1,6 \cdot 10^{-9} T$$

Per quanto riguarda la forza sulla carica negativa, per prima cosa dobbiamo notare che la velocità della carica è un vettore parallelo al campo magnetico che abbiamo calcolato. Per questo motivo la formula della forza magnetica

$$F = qVB\sin(\alpha)$$

ci dice che la forza risulta nulla in quanto $\sin(0^\circ) = 0$

Problema di: Magnetismo - $M0009$

Testo *[M0009]* [3½ 5 4a]

Maturità scientifica - seconda prova - sessione ordinaria 2019

Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $B = 1\,mT$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38,1\,cm$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10,5\,cm$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$

Spiegazione Un moto elicoidale in un campo magnetico. Lo si studia come composizione del moto circolare uniforme in orizzontale e del moto rettilineo uniforme in verticale

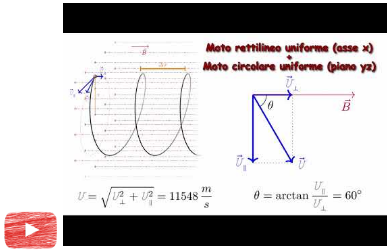


Fig. 4.1: *Guarda il video youtu.be/ag6q5HUUdDw*

Svolgimento Indichiamo con i pedici $\parallel$ e $\perp$ i vettori paralleli e perpendicolari al piano su cui si svolge il moto circolare.

Studiando il moto circolare sappiamo che

$$m\frac{\mathcal{V}_\parallel^2}{r} = q\mathcal{V}_\parallel B$$

$$\mathcal{V}_\parallel = \frac{q}{m}Br = \frac{1,6\cdot 10^{-19}\,C}{1,672\cdot 10^{-27}\,kg}\cdot 10^{-3}\,T\cdot 0,105\,m = 10^4\,\frac{m}{s}$$

Il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi r}{\mathcal{V}_\parallel} = 0,66\cdot 10^{-4}\,s$$

In tale intervallo di tempo la particella percorre un certo tratto parallelamente al campo magnetico. quindi la velocità perpendicolare al piano del moto circolare è

$$\mathcal{V}_\perp = \frac{\Delta x}{T} = 5775\,\frac{m}{s}$$

Il modulo del vettore velocità è quindi

$$\mathcal{V} = \sqrt{\mathcal{V}_\perp^2 + \mathcal{V}_\parallel^2} = 11548\,\frac{m}{s}$$

L'angolo di tale velocità con il campo magnetico corrisponde all'angolo tra la velocità e la sua componente $\mathcal{V}_\perp$

$$\theta = \arctan\frac{\mathcal{V}_\parallel}{\mathcal{V}_\perp} = 60°$$

Problema di: Magnetismo - $M0010$

Testo *[M0010]* [2 ⭐ 3 ⌛ 4a 📖]
Un filo rettilineo lungo $l = 2\,m$, percorso da una corrente $i = 10\,A$, è posto in un volume in cui è presente un campo magnetico uniforme le cui componenti sono $B_x = 3\,mT$, $B_y = 0$, $B_z = 4\,mT$, con z l'asse verticale. Come deve essere posizionato il filo per subire la massima forza e come per ottenere quella minima? Calcola tali forze

Spiegazione La forza magnetica è data dal prodotto vettoriale della corrente che la subisce e del campo che la genera. E' quindi necessario ragionare in tre dimensioni per comprendere come affrontare il problema.

Svolgimento Il campo magnetico complessivo è dato da

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = 5\,mT$$

La forza minima è sicuramente quella nulla ottenibile quando il filo è posto parallelamente al campo magnetico. Le due componenti ci permettono di calcolare direzione e verso del campo magnetico, coincidente con quello del filo, il quale sarà posizionato nel piano xz inclinato di un angolo

$$\theta = \arctan\frac{B_x}{B_z} = 36,9^\circ$$

rispetto all'asse verticale.

La massima forza la si avrà posizionando il filo su di una qualunque direzione perpendicolare al campo magnetico complessivo. L'intensità della forza ottenuta sarà

$$F = ilB = 100\,mN$$

Problema di: Magnetismo - $M0011$

Testo *[M0011]* [2 ⭐ 3 ⌛ 4a 📖]
Un filo rettilineo lungo $l = 2\,m$, percorso da una corrente $i = 10\,A$, è posto in orizzontale. Nello spazio circostante è presente un campo magnetico uniforme le cui componenti sono $B_x = 3\,mT$, $B_y = 0$, $B_z = 4\,mT$, con z l'asse verticale. Come deve essere posizionato il filo per subire la massima forza e come per ottenere quella minima? Calcola tali forze.

Spiegazione La forza magnetica è data dal prodotto vettoriale della corrente che la subisce e del campo che la genera. E' quindi necessario ragionare in tre dimensioni per comprendere come affrontare il problema.

Svolgimento Essendo il filo vincolato al piano orizzontale, esso sarà sempre perpendicolare alla componente verticale del campo magnetico. Il modulo della forza generata da tale componente è quindi indipendente dalla posizione del filo e avrà direzione orizzontale perpendicolare al filo. Tale forza vale $F_1 = ilB_z = 80\,mN$

Rimane quindi solo da analizzare la forza generata sul filo dalla componente del campo magnetico lungo l'asse x.

La componente orizzontale del campo genererà una forza nulla se il filo è posizionato lungo l'asse x e quindi questa è la configurazione che determina la minima forza, corrispondente al solo valore di F_1 posizionata lungo l'asse x e generata da B_z.

Se il filo è posto lungo l'asse y avremo la massima forza data da

$$F_2 = ilB_x = 60\,mN$$

posizionata lungo l'asse z

Le due forze F_1 ed F_2 sono quindi perpendicolari tra loro e la forza complessiva si calcola

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 100\,mN$$

Problema di: Magnetismo - $M0012$

Testo *[M0012]* [1 2 4a]
Un elettrone si muove con un'energia $E = 0,3\,eV$ perpendicolarmente al campo magnetico terrestre $B = 50\,\mu T$. Quanto vale la forza magnetica che subisce?

Spiegazione Forza magnetica su di una carica in moto. In questo esercizio una carica si muove dentro un campo magnetico e di conseguenza subisce una forza. E' sufficiente quindi utilizzare la formula opportuna.

Svolgimento La forza subita dalla particella è

$$F = q \cdot V \cdot B \cdot \sin\alpha$$

L'angolo $\alpha = 90°$ in quanto la particella si muove perpendicolarmente al campo magnetico e quindi $\sin\alpha = 1$. La carica $q = 1,6 \cdot 10^{-19}C$ è la carica dell'elettrone Il campo magnetico B è un dato del problema. Per poter utilizzare la formula bisogna solo più determinare la velocità della particella conoscendone l'energia. L'energia della particella è

$$E = 0,3\,eV = 0,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,J = 4,8 \cdot 10^{-20}\,J$$

Dall'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ ricavo poi la velocità della particella.

$$V = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-20}\,J}{9,1 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 3,25 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

Infine troviamo la forza che agisce sulla particella

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 3,25 \cdot 10^5\,\frac{m}{s} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\,T$$

$$F = 2,6 \cdot 10^{-18}\,N$$

Problema di: Magnetismo - $M0013$

Testo *[M0013]* [2 2 4a]
Due bobine di raggi $r_1 = 10\,cm$ ed $r_2 = 20\,cm$, contenenti rispettivamente $N_1 = 150$ ed $N_2 = 100$ avvolgimenti sono disposte parallele e concentriche. Nella prima bobina scorre una corrente $i_1 = 2\,A$. Determina modulo e verso della corrente che deve scorrere nella seconda bobina affinché il campo magnetico nel centro delle spire sia nullo.

Spiegazione In questo problema è sufficiente conoscere il campo magnetico di una spira. Una Bobina è semplicemente una serie di spire concentriche nello stesso piano.

Svolgimento Le correnti nelle due bobine devono essere necessariamente opposte in modo che i campi magnetici generati risultino opposti e si possano quindi cancellare a vicenda.

Dall'equazione del campo magnetico di una bobina avremo:

$$B_1 = B_2$$

$$\frac{\mu N_1 i_1}{2r_1} = \frac{\mu N_2 i_2}{2r_2}$$

$$i_2 = \frac{N_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot N_2} i_1 = 6\,A$$

Problema di: Magnetismo - $M0015$

Testo *[M0015]* [3 2 4a]
Si vuole misurare la velocità del sangue in un'arteria immergendola in un campo magnetico ed in un campo elettrico uniformi perpendicolari all'arteria stessa. Come devono essere disposti i due campi, e quali valori devono avere, affinché gli ioni sciolti nel sangue subiscano una forza risultante nulla?

Spiegazione Un problema sulla configurazione del selettore di velocità. Solo per una data velocità delle cariche, esse non subiscono alcuna forza risultante.

Svolgimento La forza elettrostatica e la forza magnetica subite dalle singole cariche devono essere uguali e opposte. Ipotizzando che l'arteria sia posizionata lungo l'asse x ed il campo magnetico lungo l'asse y, allora per la regola della mano destra uno ione positivo subirebbe una forza parallela e con verso concorde all'asse z. Il campo elettrico deve quindi essere posizionato anch'esso parallelo all'asse z ma con verso discorde. Con questa configurazione sia gli ioni positivi che quelli negativi subiscono due forze opposte.

Eguagliando i moduli avremo:

$$qE = q\mathcal{V}B$$

$$\mathcal{V} = \frac{E}{B}$$

Regolando i valori dei campi elettrico e magnetico, otterremo che solo per una determinata velocità gli ioni non subiscono una forza e di conseguenza non la subisce l'arteria. Osservando quindi l'arteria e regolando opportunamente i campi è possibile determinare la velocità del sangue.

Problema di: Magnetismo - $M0015a$

Testo *[M0015a]* [3 2 4a]
Si vuole misurare la velocità dell'acqua marina in una conduttura immergendola in un campo magnetico ed in un campo elettrico uniformi perpendicolari alla conduttura stessa. Come devono essere disposti i due campi, e quali valori devono avere, affinché gli ioni sciolti nell'acqua subiscano una forza risultante nulla?

Spiegazione Un problema sulla configurazione del selettore di velocità. Solo per una data velocità delle cariche, esse non subiscono alcuna forza risultante.

Svolgimento La forza elettrostatica e la forza magnetica subite dalle singole cariche devono essere uguali e opposte. Ipotizzando che l'arteria sia posizionata lungo l'asse x ed il campo magnetico lungo l'asse y, allora per la regola della mano destra uno ione positivo subirebbe una forza parallela e con verso concorde all'asse z. Il campo elettrico deve quindi essere posizionato anch'esso parallelo all'asse z ma con verso discorde. Con questa configurazione sia gli ioni positivi che quelli negativi subiscono due forze opposte.

Eguagliando i moduli avremo:

$$qE = q\mathcal{V}B$$

$$\mathcal{V} = \frac{E}{B}$$

Regolando i valori dei campi elettrico e magnetico, otterremo che solo per una determinata velocità gli ioni non subiscono una forza e di conseguenza non la subisce l'arteria. Osservando quindi l'arteria e regolando opportunamente i campi è possibile determinare la velocità del sangue.

Problema di: Magnetismo - $M0015b$

Testo *[M0015b]* [1 2 4a]
Disegna sul tuo foglio un campo elettrico $\vec{E}$ uniforme verso destra ed uno magnetico uniforme $\vec{B}$ verticale entrante nel foglio. Disegna adesso un elettrone che si muove parallelo al vostro foglio e verso l'alto. A quale velocità deve andare affichè si muova con velocità costante?

Spiegazione L'elettrone, muovendosi sia in un campo elettrico che in un campo magnetico, subisce due forze. Tali forze, vista la posizione dei vettori, sono tra loro opposte. Affinché l'elettrone viaggi con velocità costante, le due forze opposte devono essere uguali.

Svolgimento Chiamiamo e la carica elettrica dell'elettrone. La forza elettrica vale

$$F = e \cdot E$$

La forza magnetica vale

$$F = e \cdot V \cdot B$$

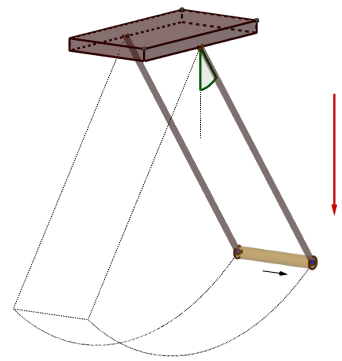
per cui

$$e \cdot E = e \cdot V \cdot B$$

$$V = \frac{E}{B}$$

Problema di: Magnetismo - $M0016$

Testo *[M0016]* [3 3 4a]
Un pendolo di massa $m = 100\,g$ è formato da una bacchetta lunga $L = 20\,cm$ e due fili tutti conduttrici, come mostrato in figura. Le linee puntinate della figura, immaginarie, servono unicamente a farti meglio comprendere lo schema. Il pendolo è immerso in un campo magnetico uniforme verticale $B = 0,3\,T$ ed è attraversato da una corrente $i = 15\,A$. Nella posizione di equilibrio, quale angolo forma il pendolo con la verticale? Quanto vale la tensione su ognuno dei due fili?



Spiegazione Fondamentalmente un problema di meccanica nel quale è necessario tenere presente la forza di Lorentz.

Svolgimento Il pendolo è soggetto a due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza di Lorentz orizzontale verso l'esterno. Dal disegno si comprende che la corrente che attraversa la bacchetta ed il campo magnetico sono tra loro perpendicolari. La tensione dei fili bilancia queste due forze. Quindi

$$F_g = mg = 0,98\,N$$

$$F_B = iLB = 0,9\,N$$

La risultante delle due forze è

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_B^2} = 1,33\,N$$

Ognuno dei due fili subirà quindi una tensione

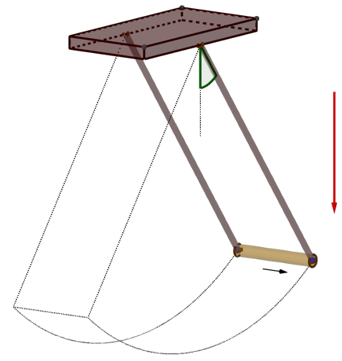
$$T = 0,665\,N$$

L'angolo formato con la verticale è ricavabile dalle dimensioni delle due forze che, con la loro risultante, formano un triangolo rettangolo nel quale uno degli angoli è proprio l'angolo cercato.

$$\theta = \arctan\frac{F_B}{F_g} = 42,6^\circ$$

Problema di: Magnetismo - $M0017$

Testo *[M0017]* [2 3 4a]
Un pendolo di massa $m = 200\,g$ è formato da una bacchetta lunga $L = 20\,cm$ e due fili tutti conduttrici, come mostrato in figura. Le linee puntinate della figura, immaginarie, servono unicamente a farti meglio comprendere lo schema. Il pendolo è immerso in un campo magnetico uniforme verticale $B = 0,3\,T$ ed è attraversato da una corrente $i = 15\,A$. Nella posizione di equilibrio, quanto vale la tensione su ognuno dei due fili?



Spiegazione Fondamentalmente un problema di meccanica nel quale è necessario tenere presente la forza di Lorentz.

Svolgimento Il pendolo è soggetto a due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza di Lorentz orizzontale verso l'esterno. Dal disegno si comprende che la corrente che attraversa la bacchetta ed il campo magnetico sono tra loro perpendicolari. La tensione dei fili bilancia queste due forze. Quindi

$$F_g = mg = 1,96\,N$$

$$F_B = iLB = 0,9\,N$$

La risultante delle due forze è

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_B^2} = 2,16\,N$$

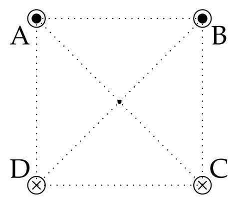
Ognuno dei due fili subirà quindi una tensione

$$T = 1,08\,N$$

Problema di: Magnetismo - $M0018$

Testo *[M0018]* [2 3 4a]

Quattro fili conduttori rettilinei infiniti A, B, C e D, tra loro paralleli, sono percorsi da una corrente $i = 10\,A$. I quattro fili intersecano un piano ad essi perpendicolare nei quattro vertici di un quadrato di lato $l = 5\,m$, come mostrato in figura. Le correnti di A e B escono dalla superficie, quelle dei fili C e D entrano nella superficie. Calcolare il campo magnetico prodotto dai quattro fili nel punto centrale del quadrato.



Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai quattro fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e *lunghi*, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

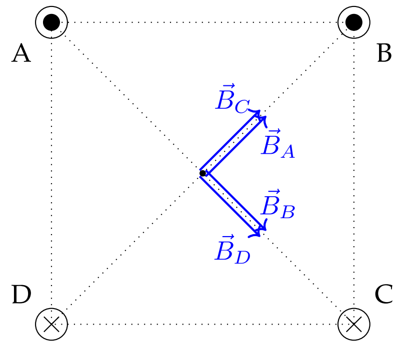
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore, corrispondente a metà della lunghezza della diagonale del quadrato. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

Svolgimento Prima di eseguire ogni tipo di conto cominciamo con l'osservare che il centro del quadrato è equidistante da tutti i vertici e che in tutti i fili scorre la stessa corrente elettrica. Per questo motivo il modulo dei campi magnetici dei vari fili è necessariamente uguale.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{l\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{l\sqrt{2}}$$

Lo stesso ragionamento non possiamo farlo per la direzione ed il verso dei quattro campi magnetici e dobbiamo necessariamente farci un disegno per capire come sono disposti i quattro vettori $\vec{B}_i$. Nello schema seguente è mostrata la disposizione dei quattro campi magnetici generati dalle quattro correnti. I vettori $\vec{B}_A$ e $\vec{B}_C$ sono perfettamente sovrapposti l'uno sull'altro. In questo schema sono stati disegnati affiancati per meglio far comprendere la loro effettiva disposizione; lo stesso vale per i vettori $\vec{B}_B$ e $\vec{B}_D$.



Come potete vedere i quattro campi magnetici sono disposti a due a due paralleli e nello stesso verso. Procediamo adesso a svolgere la somma dei vettori, per cui, come mostrato in figura **??**, avremo che

$$B_1 = B_A + B_C = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{\sqrt{2}i}{l}$$

$$B_2 = B_B + B_D = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{\sqrt{2}i}{l}$$

Dobbiamo adesso sommare i vettori $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$

Essendo essi disposti sulle diagonali del quadrato, ne consegue che tra loro sono perpendicolari, quindi la risultante sarà

$$B_{tot} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{2i}{l}$$

Nello schema seguente il vettore in rosso rappresenta la somma dei quattro vettori $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

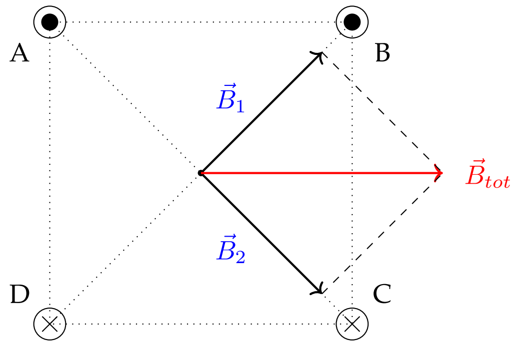


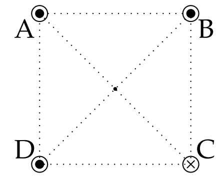
Fig. 4.2: *Campo magnetico totale generato dai quattro fili percorsi da corrente.*

Mettendo i valori avremo

$$B_{tot} = \frac{4\pi 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}}{\pi} \frac{20\,A}{5\,m} = 16 \cdot 10^{-7}\,T$$

Problema di: Mgnetismo - $M0018a$

Testo *[M0018a]* [2 3 4a]



Quattro fili conduttori rettilinei infiniti A, B, C e D, tra loro paralleli, sono percorsi da una corrente $i = 10\,A$. I quattro fili intersecano un piano ad essi perpendicolare nei quattro vertici di un quadrato di lato $l = 5\,m$, come mostrato in figura. Le correnti di A, B e D escono dalla superficie, quella del filo C entra nella superficie. Calcolare il campo magnetico prodotto dai quattro fili nel punto centrale del quadrato.

Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai quattro fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e *lunghi*, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

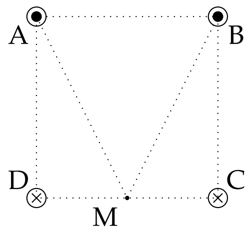
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore, corrispondente a metà della lunghezza della diagonale del quadrato. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

Svolgimento [...]

Problema di: Elettromagnetismo - $M0019$

Testo *[M0019]* [3 5 4a]



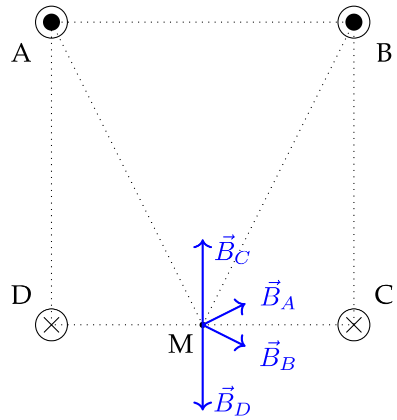
Sono dati quattro lunghi fili conduttori A, B, C e D percorsi da una corrente $i = 10\,A$ e disposti tra loro parallelamente; essi sono perpendicolari ad un piano (per esempio quello del tuo foglio). I quattro fili intersecano il piano in quattro punti disposti ai vertici di un quadrato di lato $l = 5\,m$, come mostrato in figura. Le correnti di A e B escono dalla superficie, quelle dei fili C e D entrano nella superficie. Calcolare il campo magnetico prodotto dai quattro fili nel punto medio del segmento $\overline{CD}$.

Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai quattro fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e *lunghi*, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

Svolgimento Cominciamo con il disegnare i quattro campi magnetici generati dai quattro fili; lo schema seguente mostra la disposizione dei quattro campi magnetici. I vettori $\vec{B}_C$ e $\vec{B}_D$ i cancellano tra loro.



Come potete vedere i campi magnetici $\vec{B}_C$ e $\vec{B}_D$ sono uguali e opposti. Il fatto che siano opposti lo si vede dalla geometria del problema; il fatto che siano uguali lo si vede dal fatto che il punto analizzato è equidistante dai due fili C e D nei quali scorre la stessa corrente.

Prima di procedere con la somma dei due vettori rimanenti, consideriamo il triangolo DAM. Si ha che

$$D\hat{A}M = \arctan\frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \arctan 0,5$$

Procediamo adesso a svolgere la somma dei due vettori rimanenti. Osservando la figura seguente, avremo che l'angolo tra il vettore $\vec{B}_A$ e il segmento $\overline{CD}$, esattamente come l'angolo tra il vettore $\vec{B}_B$ e il segmento $\overline{CD}$ è

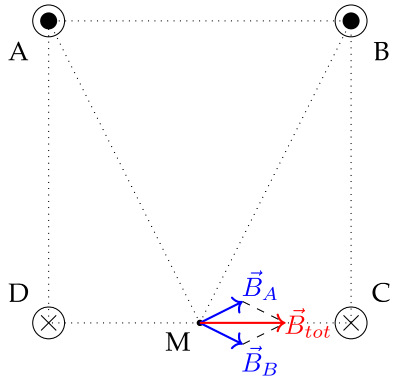
$$\alpha = D\hat{A}M = \arctan 0,5$$

L'angolo DAM è cioè uguale all'angolo che il vettore $\vec{B}_A$ forma con il segmento $\overline{CD}$. Lo si può vedere dal fatto che la direzione di $\vec{AD}$ ruotata di un angolo $D\hat{A}M$ councide con la direzione di $\vec{AM}$ e quindi un vettore orizzontale perpendicolare a $\vec{AD}$ ruotato dello stesso angolo deve avere la stessa direzione di $\vec{B}_A$ che sappiamo essere perpendicolare a $\vec{AM}$.

Il vettore somma $\vec{B}_{tot}$ coinciderà con la somma delle componenti orizzontali di $\vec{B}_A$ e $\vec{B}_B$ in quanto le loro componenti verticali si annullano tra loro.

$$B_{tot} = 2 \cdot B_A \cdot \cos\alpha = 2 \cdot B_A \cdot \cos(\arctan 0,5) = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot B_A$$

nella figura seguente il vettore in rosso rappresenta la somma dei quattro vettori $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_A + \vec{B}_B$



Il modulo del vettore $\vec{B}_A$ lo calcolo con la legge di Biot-Savart

$$B_A = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+l^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{l\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{l\sqrt{5}}$$

$$B_A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}}{\pi}\frac{10\,A}{5\,m\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-7}\,T$$

Mettendo i valori avremo

$$B_{tot} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-7}\,T \cdot = 6,4 \cdot 10^{-7}\,T$$

Problema di: Magnetismo - $M0020$

Testo *[M0020]* [3 3 4a]
Un lungo filo orizzontale trasporta una corrente $i = 60\,A$. Un secondo filo costituito di rame (densità $\rho = 8930\frac{kg}{m^3}$), avente il diametro $d = 3,00\,mm$ e percorso da una corrente, è mantenuto sospeso in equilibrio sotto il primo filo. Se i due fili si trovano a una distanza di $h = 5,0\,cm$, determina il verso di circolazione e l'intensità della corrente che percorre il secondo filo affinché esso rimanga in sospensione sotto il primo filo.

Spiegazione L'esercizio parla di un filo in equilibrio; questo significa che la somma di tutte le forze che agiscono sul filo è nulla. In questo caso bisogna eguagliare la forza di gravità sul filo con la forza di attrazione magnetica tra i due fili.

Svolgimento Chiamiamo il filo superiore a e quello inferiore b. Cominciamo con il determinare il verso della corrente nel filo b. Visto che la forza di gravità attrae il filo verso il basso, l'attrazione magnetica deve essere verso l'alto. Questo accade se le correnti nei due fili sono concordi, in modo che la forza magnetica sia rivolta verso l'alto.

Detto questo bisogna impostare la condizione di equilibrio[1]

$$F_g = F_m$$

$$m \cdot g = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_a \cdot i_b}{h} L$$

la massa m del filo inferiore, visto che ne conosciamo il materiale, la possiamo scrivere in funzione della densità del filo; quindi $m = \rho \dot{\pi} r^2 \cdot L = \rho\frac{\pi d^2}{4}L$ Per cui, indicando con L la generica lunghezza del filo inferiore, avremo

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}Lg = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_a \cdot i_b}{h} L$$

[1] La stada più semplice è in generale quella di disegnare i vettori con il verso giusto e poi scrivere l'equazione in forma scalare.

$$i_b = \frac{\rho \pi^2 d^2 h g}{2\mu_0 i_a}$$

$$i_b = \frac{8930\,\frac{kg}{m^3}\cdot \pi^2 \cdot 9\cdot 10^{-6} m^2 \cdot 0,05\,m \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2}}{8\cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\frac{mkg}{s^2 A^2} 60\,A}$$

$$i_b = \frac{8930\,kg \cdot \pi \cdot 9\cdot 10^{-6} \cdot 0,05 \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2}}{8\cdot 10^{-7}\,\frac{mkg}{s^2 A} 60}$$

$$i_b = \frac{8930\pi \cdot 9 \cdot 0,05 \cdot 9,81}{480}\cdot 10\,A$$

$$i_b = 2580\,A$$

Questo risultato significa ovviamente che la forza di gravità è troppo intensa per essere equilibrata dalla forza magnetica; infatti la corrente necessaria per farlo vaporizzerebbe il rame del filo scaldandolo per effetto Joule.

Problema di: Magnetismo - $M0021$

Testo *[M0021]* [3 3 4a]
Un solenoide indefinito è costituito di 800 spire per metro di lunghezza e ha un diametro $d = 20,0\,cm$. All'interno del solenoide un protone si muove di moto spiraliforme con velocità di modulo $U = 2,00\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$ e direzione inclinata di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'asse del solenoide. L'asse della spirale percorsa dal protone coincide con l'asse del solenoide. Calcola la minima intensità di corrente che deve circolare nel solenoide se si vuole che il protone lo percorra senza mai urtare le sue pareti.

Spiegazione Un protone si muove in un campo magnetico uniforme descrivendo una traiettoria spiraliforme. Visto che il campo magnetico è generato da un solenoide, allora il raggio del moto del protone deve essere minore del raggio della spira.

Svolgimento La componente della velocità che contribuisce a generare un moto circolare è

$$V_\perp = V\sin\alpha$$

Il raggio del moto perpendicolare al campo magnetico lo si ottiene eguagliando la forza centripeta con la forma magnetica, per cui

$$F_m = qVB\sin\alpha = m\frac{V^2\sin^2\alpha}{r} = F_c$$

da cui

$$r = \frac{mV\sin\alpha}{qB}$$

Il campo magnetico generato dal solenoide è $B = \mu_0 n i$ dove n è la densità di spire ed i la corrente che lo attraversa. Quindi

$$r = \frac{mV\sin\alpha}{q\mu_0 n i}$$

Imponiamo adesso la condizione del problema

$$r < \frac{d}{2}$$

da cui

$$\frac{mV\sin\alpha}{q\mu_0 ni} < \frac{d}{2}$$

$$\frac{q\mu_0 ni}{mV\sin\alpha} > \frac{2}{d}$$

$$i > \frac{2mV\sin\alpha}{\mu_0 qnd}$$

Svolgendo ora i conti

$$i > \frac{2\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 2,00\cdot 10^{5}\,\frac{m}{s}\cdot 0,5}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{kg\,m}{s^2A^2}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 800\,\frac{1}{m}\cdot 0,2\,m}$$

$$i > \frac{1,67\,\frac{kg\,m}{s}}{4\pi\cdot 1,6\frac{kg\,m\,C}{s^2A^2}\cdot 80}\cdot 10^4$$

$$i > \frac{1,67}{512\pi}\cdot 10^3\,A = 10,4\,A$$

Il risultato evidenzia come, tanto maggiore è la corrente nel solenoide, tanto maggiore è il campo magnetico prodotto, tanto minore il raggio della traiettoria della particella.

Problema di: Magnetismo - $M0026$

Testo *[M0026]* [2 2 4a]
Due cavi rettilinei di lunghezza infinita, tra loro paralleli e distanti $D = 1\,m$, sono entrambi percorsi da una corrente i. Le due correnti sono in verso opposte. Determina il campo magnetico (modulo, direzione e verso) presente in un generico punto tra i due cavi, a distanza x da uno di essi. Dimostrato che il modulo del campo è $B = k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$, determina le unità di misura di k utilizzando le unità standard.

Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai due fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e di lunghezza infinita, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

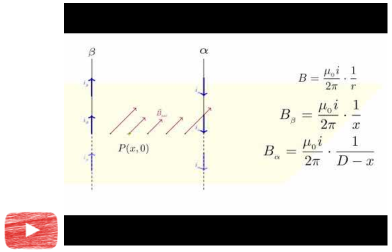


Fig. 4.3: *Guarda il video youtu.be/2PCq6eOk4W8*

Svolgimento Consideriamo un sistema di riferimento perpendicolare ai due cavi, la cui origine coincida con uno dei due cavi, e consideriamo il punto $P(x,0)$ nel segmento tra i due cavi. Quindi abbiamo che $0 < x < D$

Denominiamo i due cavi con le lettere α e β

Il cavo β con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $O(0,0)$, genera in P un campo magnetico verticale nel verso negativo delle y, il cui modulo vale

$$B_{\beta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}$$

.

Il cavo α con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $B(D,0)$, genera in P un campo magnetico verticale, anch'esso nel verso negativo delle y, il cui modulo vale

$$B_{\alpha} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{D-x}$$

.

Quindi il campo magnetico complessivo vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right)$$

La costante k indicata nel testo dell'esercizio è quindi

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

e la sua unità di misura è

$$[k] = [\mu_0] \cdot [i] = \frac{N}{A^2} \cdot A = \frac{N}{A}$$

Problema di: Magnetismo - $M0026a$

Testo *[M0026a]* [2 2 4a]
Due cavi rettilinei di lunghezza infinita, tra loro paralleli e distanti $D = 1\,m$, sono entrambi percorsi da una corrente i. Le due correnti sono in verso opposte. Determina il campo magnetico (modulo direzione e verso) presente in un generico punto tra i due cavi, ma esternamente ad essi, a distanza x da uno di essi. Dimostrato che il modulo del campo è $B = k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D-x}\right)$, determina le unità di misura di k utilizzando le unità standard.

Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai due fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e di lunghezza infinita, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

Svolgimento Consideriamo un sistema di riferimento perpendicolare ai due cavi, la cui origine coincida con uno dei due cavi, e consideriamo il punto $P(x,0)$ sulla retta tra i due cavi, esternamente ad essi. Quindi abbiamo che $x < 0 \vee x > D$

Chiamiamo i due cavi α e β.

Il cavo β con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $O(0,0)$, genera in P un campo magnetico verticale. Tale campo è nel verso negativo delle y per $x > 0$ e nel verso positivo delle y per $x < 0$. Il modulo del campo vale

$$B_{\beta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}$$

.

Il cavo con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $A(D,0)$, genera in P un campo magnetico verticale, nel verso negativo delle y per $x<0$ e opposto per $x>D$. Il modulo del campo vale

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\frac{1}{x-D}$$

.

Quindi il campo magnetico complessivo nei punti esterni al segmento vale quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-D}\right)$$

La costante k indicata nel testo dell'esercizio è quindi

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

e la sua unità di misura è

$$[k] = [\mu_0]\cdot[i] = \frac{N}{A^2}\cdot A = \frac{N}{A}$$

Problema di: Magnetismo - $M0026b$

Testo *[M0026b]* [2 2 4a]
Due cavi rettilinei di lunghezza infinita, tra loro paralleli e distanti $D = 1\,m$, sono entrambi percorsi da una corrente i. Le due correnti sono nello stesso verso. Determina il campo magnetico (modulo direzione e verso) presente in un generico punto tra i due cavi, a distanza x da uno di essi. Dimostrato che il modulo del campo è $B = k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{D-x}\right)$, determina le unità di misura di k utilizzando le unità standard.

Spiegazione Cominciamo con l'osservare che il problema mi chiede il campo magnetico prodotto dai due fili in un certo punto dello spazio. E' sicuramente vero che tra i fili si esercitano delle forze, ma questo fenomeno non è l'oggetto di studio in questo esercizio. Dal momento che tutti i fili sono rettilinei e di lunghezza infinita, allora la legge per calcolarsi i campi magnetici prodotti è la legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

dove r è la distanza del punto in analisi dal filo conduttore. Ogni filo genererà un suo campo magnetico; nel punto in analisi il campo magnetico totale sarà la somma vettoriale dei campi magnetici dei singoli fili.

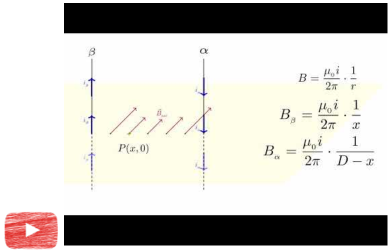


Fig. 4.4: *Guarda il video youtu.be/2PCq6eOk4W8*

Svolgimento Consideriamo un sistema di riferimento perpendicolare ai due cavi, la cui origine coincida con uno dei due cavi, e consideriamo il punto $P(x,0)$ nel segmento tra i due cavi. Quindi abbiamo che $0<x<D$

Denominiamo i due cavi con le lettere α e β

Il cavo α con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $O(0,0)$, genera in P un campo magnetico verticale nel verso negativo delle y, il cui modulo vale
$$B_\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}$$
.

Il cavo con la corrente entrante nel piano del sistema di riferimento, nel punto $B(D,0)$, genera in P un campo magnetico verticale, anch'esso nel verso negativo delle y, il cui modulo vale
$$B_\beta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{D-x}$$
.

Quindi il campo magnetico complessivo vale
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D-x}\right)$$

La costante k indicata nel testo dell'esercizio è quindi
$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

e la sua unità di misura è
$$[k] = [\mu_0] \cdot [i] = \frac{N}{A^2} \cdot A = \frac{N}{A}$$

Problema di: Magnetismo - $M0028$

Testo *[M0028]* [3 3 4a]
Un protone è accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = 500\,V$ ed entra in una regione con un campo magnetico perpendicolare alla sua velocità. Percorrerà quindi una traiettoria circolare di raggio $r = 2\,m$. Quanto vale l'intensità del campo magnetico?

Spiegazione Tutto il problema ruota intorno all'interazione di una carica, prima con il campo elettrico e poi con il campo magnetico. La differenza di potenziale da energia cinetica alla carica; il campo magnetico determina il moto circolare della stessa.

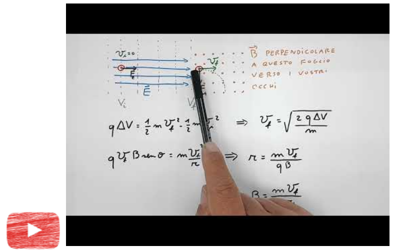


Fig. 4.5: *Guarda il video youtu.be/wHbTy6HOMNY*

Svolgimento La carica del protone è stata di seguito indicata con e da intendersi valore positivo. L'energia cinetica della carica, dopo essere stata accelerata dalla differenza di potenziale, vale
$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}_f^2 = e\Delta V$$
quindi
$$m^2 \mathcal{V}_f^2 = 2em\Delta V$$
$$m\mathcal{V}_f = \sqrt{em\Delta V}$$
Il moto circolare della particella è descrivibile dall'equazione
$$m\frac{\mathcal{V}_f^2}{r} = e\mathcal{V}_f B$$

che afferma che la forza centripeta causa del moto circolare è la forza magnetica sulla carica.

Avremo quindi

$$B = \frac{\sqrt{em\Delta V}}{er} = \sqrt{\frac{m\Delta V}{er^2}}$$

Problema di: Magnetismo - $M0028a$

Testo *[M0028a]* [3 3 4a]
Un protone è accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = 500\,V$ ed entra in una regione con un campo magnetico $B = 0,2\,T$ perpendicolare alla sua velocità. Quanto vale il raggio della sua traiettoria circolare?

Spiegazione Tutto il problema ruota intorno all'interazione di una carica, prima con il campo elettrico e poi con il campo magnetico. La differenza di potenziale da energia cinetica alla carica; il campo magnetico determina il moto circolare della stessa.

Svolgimento La carica del protone è stata di seguito indicata con e da intendersi valore positivo. L'energia cinetica della carica, dopo essere stata accelerata dalla differenza di potenziale, vale

$$\frac{1}{2}m\mathcal{V}_f^2 = e\Delta V$$

quindi

$$m^2\mathcal{V}_f^2 = 2em\Delta V$$

$$m\mathcal{V}_f = \sqrt{em\Delta V}$$

$$\mathcal{V}_f = \sqrt{\frac{e\Delta V}{m}}$$

Il moto circolare della particella è descrivibile dall'equazione

$$m\frac{\mathcal{V}_f^2}{r} = e\mathcal{V}_f B$$

che afferma che la forza centripeta causa del moto circolare è la forza magnetica sulla carica.

Avremo quindi

$$r = \frac{m\mathcal{V}_f}{eB}$$

$$r = \sqrt{\frac{m\Delta V}{eB^2}}$$

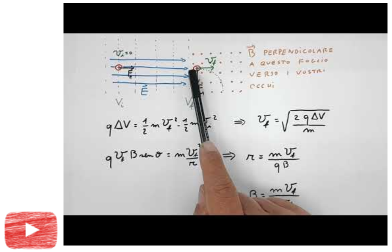


Fig. 4.6: *Guarda il video youtu.be/wHbTy6HOMNY*

Problema di: Campo magnetico - $M0031$

Testo *[M0031]* [3 3 4a]
Uno spettrometro di massa accelera ioni di carica Q e massa m, inizialmente fermi, utilizzando una differenza di potenziale ΔV. Gli ioni entrano in una camera con un campo magnetico perpendicolare alla loro velocità. Determina la loro massa in funzione delle variabili indicate e del raggio del loro percorso nella camera.

Spiegazione La differenza di potenziale permette di calcolare quanta energia viene data alla particella. Quando la particella entra nella camera con il campo magnetico all'interno, subisce una forza magnetica di tipo centripeto.

Svolgimento L'energia cinetica degli ioni dopo l'accelerazione è

$$\frac{1}{2} m \mathcal{V}^2 = Q \Delta V$$

La forza centripeta subita dalla carica permette di scrivere

$$m \frac{\mathcal{V}^2}{r} = Q \mathcal{V} B$$

Da cui

$$\frac{2 Q \Delta V}{r} = Q \mathcal{V} B$$

$$\mathcal{V} = \frac{2 \Delta V}{B r}$$

e quindi

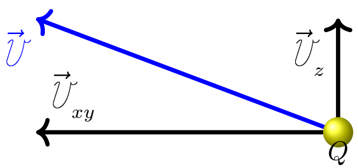
$$m = \frac{Q B^2 r^2}{2 \Delta V}$$

Problema di: Magnetismo - $M0032$

Testo *[M0032]* [3 6 4a]
Una particella di massa $m = 1\,mg$ e di carica $Q = 20\,\mu C$ si muove di moto elicoidale in un campo magnetico uniforme. Essa percorre $\Delta S_z = 30\,m$ nella direzione delle linee del campo magnetico in un tempo $\Delta t = 15\,s$ e compiendo in tale intervallo di tempo $n = 5$ rivoluzioni di raggio $r = 2\,m$. Determinate la velocità della particella e l'intensità del campo magnetico.

Spiegazione Una particella carica che si muove in un campo magnetico uniforme fa un moto circolare sul piano perpendicolare al campo. Se poi abbiamo una componente della velocità parallela al campo, allora avremo un moto elicoidale.

Svolgimento La particella durante il moto elicoidale ha una velocità costante in modulo che può efficacemente essere scomposta nelle due componenti verticale (parallela all'asse del moto rettilineo uniforme, e tangente alla circonferenza del moto circolare uniforme che avviene nel piano orizzontale.



La componente dalla velocità parallela al campo è

$$\mathcal{U}_z = \frac{\Delta S_z}{\Delta t} = 2\,\frac{m}{s}$$

La velocità della particella sul piano perpendicolare alle linee di campo è

$$\mathcal{U}_{xy} = \omega r = 2\pi\nu r = 2\pi\frac{n}{\Delta t}r = 4,2\,\frac{m}{s}$$

La velocità della particella è quindi

$$\mathcal{U} = \sqrt{\mathcal{U}_{xy}^2 + \mathcal{U}_z^2} = 4,65\,\frac{m}{s}$$

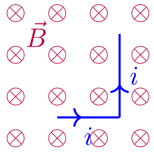
Per il moto circolare uniforme avremo

$$q\mathcal{U}B = m\frac{\mathcal{U}^2}{r}$$

$$B = \frac{m\mathcal{U}_{xy}}{qr} = 0,1\,T$$

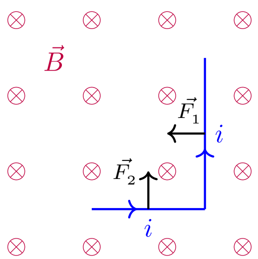
Problema di: Magnetismo - $M0037$

Testo *[M0037]* [2 3 4a]
Un conduttore rigido a forma di "L" è percorso da una corrente $i = 2\,A$ ed è immerso in un campo magnetico ad esso perpendicolare di valore $B = 1\,mT$. Il lato corto della "L" misura $L_1 = 3\,m$ ed il lato lungo misura $L_2 = 4\,m$. Determina la forza che agisce sul conduttore. Determina come varia tale forza al ruotare del conduttore intorno ad uno dei due rami della "L".



Spiegazione Abbiamo un conduttore percorso da corrente immerso perpendicolarmente in un campo magnetico. Necessariamente su di esso agisce una forza. La particolarità del problema è che, a causa della forma ad "L", la forza agente su di un ramo del conduttore ha direzione differente da quella agente sull'altro ramo del conduttore.

Svolgimento Il conduttore è posto perpendicolarmente al campo magnetico. Lo sono cioè entrambi i rami della sua forma ad "L". Ipotizziamo che il conduttore ed il campo magnetico siano disposti come in figura, con il campo magnetico entrante nel foglio.



La forza agente sul ramo corto del conduttore è

$$F_1 = iL_1 B \sin 90° = iL_1 B$$

ed è rivolta verso il basso.

La forza agente sul ramo corto del conduttore è

$$F_2 = iL_2 B \sin 90° = iL_2 B$$

ed è rivolta verso destra.

La forza complessiva agente sul conduttore sarà

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = iB\sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

Ruotando il conduttore attorno ad uno dei rami della "L" avremo che la forza agente su quel ramo rimane invariata, mente diminuisce la forza agente sull'altro ramo in quanto cambia il suo angolo rispetto al campo magnetico. La forza sul conduttore quindi diminuisce fino al valore minimo raggiunto dopo una rotazione di $90°$ che porta il ramo che ruota ad essere parallelo al campo magnetico. Continuando la rotazione la forza ricomincia a crescere, ma con verso opposto rispetto al caso precedente.

Problema di: Magnetismo - $M0038$

Testo *[M0038]* [3 4 4a]
Tre fili rettilinei infiniti attraversano perpendicolarmente un piano orizzontale intersecandolo in tre punti di coordinate $O(0,0)$, $A(0,1\,m)$ e $B(2\,m,0)$. Il primo filo è percorso da una corrente $i_o = 2\,A$ entrante nel foglio. Determina i valori delle correnti i_a e i_b affinché la forza risultante sul primo filo, per ogni metro di lunghezza, sia diretta lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante e valga $F = 5 \cdot 10^{-7}\,N$.

Spiegazione Il primo filo subisce due forze magnetiche a causa degli altri due fili. Disegnando tali forze potrai determinare la condizione da imporre per soddisfare le richieste del problema.

Svolgimento Il filo denominato A esercita sul filo O una forza diretta lungo l'asse delle y verso l'alto o verso il basso di quel sistema di riferimento a seconda che le correnti nei due fili siano concordi o discordi.

Il filo denominato B esercita sul filo O una forza diretta lungo l'asse delle x verso destra o verso sinistra in quel sistema di riferimento a seconda che le correnti nei due fili siano concordi o discordi.

Affinché la forza complessiva sul filo O sia diretta lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante è necessario che le due forze siano uguali in modulo e che se la forza A è verso l'alto la forza B sia verso destra o viceversa. Questa condizione la si realizza sempre se le correnti nei fili A e B sono concordi.

Imponiamo quindi adesso che le forze generate su un generico tratto L del filo siano uguali

$$F_{ao} = F_{bo}$$
$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_0 i_a}{d_{ao}}L = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_0 i_b}{d_{bo}}L$$
$$\frac{i_a}{d_{ao}} = \frac{i_b}{d_{bo}}$$
$$i_a\frac{d_{bo}}{d_{ao}} = i_b$$
$$2i_a = i_b$$

Sappiamo infine quanto vale la forza complessiva per ogni metro di cavo, quindi

$$F_{ao}^2 + F_{bo}^2 = F^2$$
$$2F_{ao}^2 = F^2$$

$$2\frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\frac{i_0^2 i_a^2}{d_{ao}^2}L^2 = F^2$$

e sostituendo i valori numerici

$$2\cdot 10^{-14}\,\frac{T^2\,m^2}{A^2}\cdot 4\,A^2 i_a^2 = 25\cdot 10^{-14}\,N^2$$
$$i_a^2 = \frac{25\,N^2}{8\,T^2\,m^2}$$
$$i_a = \frac{5}{2\sqrt{2}}\,A$$

infine

$$i_b = \frac{5}{4\sqrt{2}}\,A$$

con i_a e i_b concordi.

Problema di: Magnetismo - $M0038a$

Testo *[M0038a]* [3 4 4a]
Tre fili rettilinei infiniti attraversano perpendicolarmente un piano orizzontale intersecandolo in tre punti di coordinate $O(0,0)$, $A(0,5\,m)$ e $B(2\,m,0)$. Il primo filo è percorso da una corrente $i_o = 2\,A$ entrante nel foglio. Determina i valori delle correnti i_a e i_b affinché la forza risultante sul primo filo, per ogni metro di lunghezza, sia diretta lungo la bisettrice del secondo e quarto quadrante e valga $F = 4 \cdot 10^{-7}\,N$.

Spiegazione Il primo filo subisce due forze magnetiche a causa degli altri due fili. Disegnando tali forze potrai determinare la condizione da imporre per soddisfare le richieste del problema.

Svolgimento Il filo denominato A esercita sul filo O una forza diretta lungo l'asse delle y verso l'alto o verso il basso di quel sistema di riferimento a seconda che le correnti nei due fili siano concordi o discordi.

Il filo denominato B esercita sul filo O una forza diretta lungo l'asse delle x verso destra o verso sinistra in quel sistema di riferimento a seconda che le correnti nei due fili siano concordi o discordi.

Affinché la forza complessiva sul filo O sia diretta lungo la bisettrice del secondo e quarto quadrante è necessario che le due forze siano uguali in modulo e che se la forza A è verso l'alto la forza B sia verso sinistra o viceversa. Questa condizione la si realizza sempre se le correnti nei fili A e B sono discordi.

Imponiamo quindi adesso che le forze generate su un generico tratto L del filo siano uguali

$$F_{ao} = F_{bo}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_0 i_a}{d_{ao}} L = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_0 i_b}{d_{bo}} L$$

$$\frac{i_a}{d_{ao}} = \frac{i_b}{d_{bo}}$$

$$i_a \frac{d_{bo}}{d_{ao}} = i_b$$

$$\frac{2}{5} i_a = i_b$$

Sappiamo infine quanto vale la forza complessiva per ogni metro di cavo, quindi

$$F_{ao}^2 + F_{bo}^2 = F^2$$

$$2F_{ao}^2 = F^2$$

$$2\frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\frac{i_0^2 i_a^2}{d_{ao}^2} L^2 = F^2$$

e sostituendo i valori numerici

$$2 \cdot 10^{-14}\,\frac{T^2\,m^2}{A^2} \cdot \frac{4\,A^2 i_a^2}{25} = 16 \cdot 10^{-14}\,N^2$$

$$i_a^2 = \frac{16 \cdot 25\,N^2}{8\,T^2\,m^2}$$

$$i_a = \frac{10}{\sqrt{2}}\,A$$

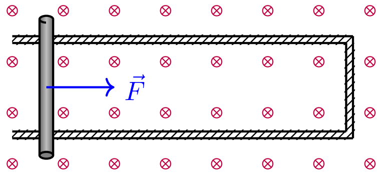
infine

$$i_b = \frac{4}{\sqrt{2}}\,A$$

con i_a e i_b concordi.

Problema di: Magnetismo - $M0040$

Testo *[M0040]* [4 4 4a]



Una barretta conduttrice di lunghezza L, massa m e resistenza R, inizialmente ferma, è libera di muoversi senza attrito su di una guida conduttrice di resistenza trascurabile. Nel piano contenente la guida e la barretta, è presente un campo magnetico uniforme ad esso perpendicolare. Applicando alla barretta una forza F come mostrato in figura, essa si muove con velocità U.

1. scrivi l'equazione che permette di trovare la velocità U in funzione del tempo.
2. determinare i valori U_{lim} e τ, sapendo che la velocità cercata ha come funzione

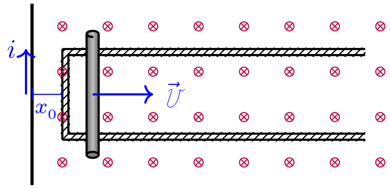
$$U = U_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Magnetismo - $M0041$

Testo *[M0041]* [4 4 4a]



Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i ed una rotaia conduttrice ad U di lunghezza infinita posizionata come rappresentato in figura ad una distanza x_0. Sulla rotaia è presente una barretta conduttrice di resistenza R e lunghezza L che viene mantenuta a velocità costante U.

1. Determina la differenza di potenziale lungo il circuito realizzato con la rotaia e la barretta, quando questa si trova ad una generica distanza x dal cavo conduttore.
2. Calcola la forza magnetica che agisce sulla barretta e la potenza necessaria per mantenere la barretta a velocità costante.

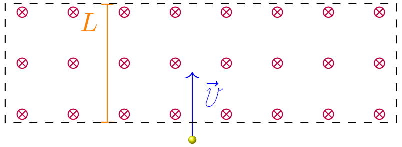
Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Magnetismo - $M0042$

Testo *[M0042]* [3 4 4a]

Una particella di massa m e carica q entra perpendicolarmente con velocità $\mathcal{V}$ in una regione di spessore L in cui è presente un campo magnetico B. Qual'è la velocità minima che deve avere la particella per superare la regione? Con quale angolo la particella viene deflessa in uscita dalla regione?



Spiegazione La particella nel campo magnetico percorre una traiettoria circolare. La risposta alle domande del problema è fondamentalmente un problema geometrico.

Svolgimento La particella, interagendo con il campo magnetico, segue un percorso circolare di raggio r calcolabile affermando che la forza magnetica è di tipo centripeto.

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = q\mathcal{V}B$$

$$r = \frac{m\mathcal{V}}{qB}$$

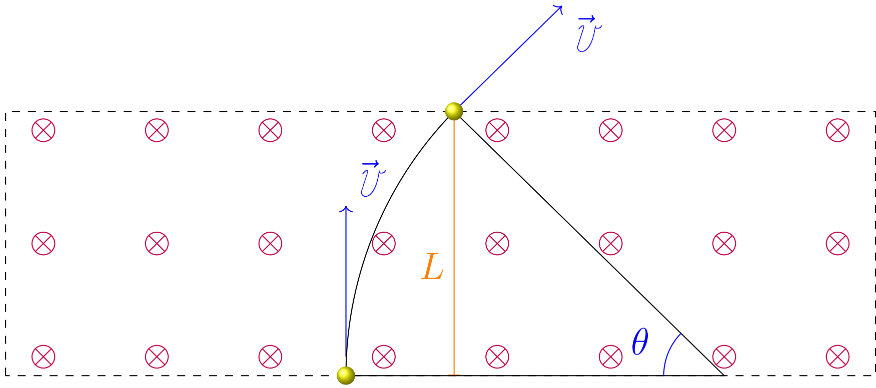
Affinché la particella superi la regione è necessario che tale raggio sia maggiore dello spessore della regione

$$r > L$$

$$\frac{m\mathcal{V}}{qB} > L$$

$$\mathcal{V} > \frac{q}{m}LB$$

Per velocità maggiori del valore limite avremo la seguente situazione geometrica.



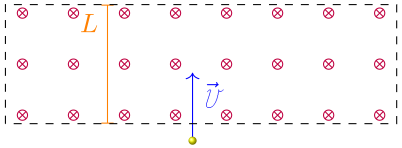
Come mostrato in figura, la deviazione angolare della particella corrisponde all'angolo θ. Tale angolo è misurabile con

$$\theta = \arcsin\frac{L}{r} = \arcsin\frac{qLB}{m\mathcal{V}}$$

L'angolo di deflessione dipende quindi dalla velocità della particella il cui modulo non è influenzo dal campo magnetico.

Problema di: Magnetismo - $M0044$

Testo *[M0044]* [2 4 4a]
Una particella di massa m e carica q entra perpendicolarmente con velocità U in una regione di spessore L in cui è presente un campo magnetico B. Qual'è la velocità minima che deve avere la particella per superare la regione?



Spiegazione Parliamo ancora del moto di una particella in un campo magnetico.

Svolgimento La particella, interagendo con il campo magnetico, segue un percorso circolare di raggio r calcolabile affermando che la forza magnetica è di tipo centripeto.

$$m\frac{U^2}{r} = qUB$$

$$r = \frac{mU}{qB}$$

Affinché la particella superi la regione è necessario che tale raggio sia maggiore dello spessore della regione

$$r > L$$
$$\frac{mU}{qB} > L$$
$$U > \frac{q}{m}LB$$

Problema di: Magnetismo - $M0045$

Testo *[M0045]* [2 3 4a]
Un elettrone si sta muovendo alla velocità $U = 0.95\,c$. Vogliamo che percorra un tragitto pseudo circolare approssimandolo con un poligono regolare con 1232 vertici. In ogni vertice è presente un magnete da $B = 4\,T$ che serve a deviare la particella di un angolo opportuno, il quale viene acceso al passaggio della particella per un intervallo di tempo opportuno. Calcola il valore di tale intervallo di tempo.

Spiegazione Parliamo ancora del moto di una particella in un campo magnetico.

Svolgimento L'elettrone in questione, ad ogni passaggio nel campo magnetico di ognuno dei magneti, deve essere deviato di un angolo

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{1232}$$

La particella, interagendo con il campo magnetico, segue un percorso circolare di raggio r calcolabile affermando che la forza magnetica è di tipo centripeto.

$$m\frac{U^2}{r} = qUB$$

$$r = \frac{mU}{qB}$$

Conoscendo la velocità con cui viaggia, possiamo calcolare l'angolo percorso nel moto circolare uniforme come

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{U}{r}\Delta t$$

da cui

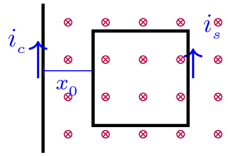
$$\frac{U}{r}\Delta t = \frac{2\pi}{1232}$$
$$\frac{UqB}{mU}\Delta t = \frac{2\pi}{1232}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi m}{1232\,q\,B}$$

Problema di: Magnetismo - $M0046$

Testo *[M0046]* [2 2 4a]

Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i_c ed una spira quadrata di lato L, percorsa da una corrente i_s in senso antiorario. Il filo rettilineo e il lato della spira più vicino al filo si trovano a distanza x_0. Quale forza agisce sulla spira?



Spiegazione Il cavo emette un campo magnetico nel quale la spira è immersa. Essendo la spira percorsa da corrente, necessariamente subisce una forza.

Svolgimento Il campo magnetico del filo è

$$B = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}$$

Solo i due lati del quadrato paralleli al filo subiscono una forza.

Il più vicino subisce una forza repulsiva; il più lontano una forza attrattiva.

$$F_1 = i_s L B_1 = \frac{\mu_0 i_c i_s L}{2\pi x_0}$$

$$F_2 = i_s L B_2 = \frac{\mu_0 i_c i_s L}{2\pi (x_0 + L)}$$

La forza complessiva sulla spira è quindi attrattiva

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 i_c i_s L}{2\pi} \cdot \left(\frac{L}{x_0 (x_0 + L)} \right)$$

Problema di: Magnetismo - $M0047$

Testo *[M0047]* [2 3 4a]

Una lastra conduttrice di lunghezza $L = 2\,m$ e larghezza $D = 20\,cm$, è attraversata per la sua lunghezza da una una corrente $i = 5\,A$. La velocità di deriva degli elettroni è dell'ordine di $U_d = 10^{-4}\,\frac{m}{s}$. Immergendo la lastra in un campo magnetico uniforme B, si misura sulla larghezza una differenza di potenziale $\Delta V_H = 4\,\mu V$. Indica modulo, direzione e verso dei campi elettrico e magnetico perpendicolari alla corrente lungo la lastra.

Spiegazione Questo è un esercizio sull'effetto Hall. Una volta compreso perché si genera sulla larghezza della lastra una differenza di potenziale, una semplice equazione di equilibrio risolve il problema.

Svolgimento Appoggiamo la lastra conduttrice sul piano xy in modo tale che la corrente elettrica scorra nel verso positivo dell'asse delle x. Mettiamo il campo magnetico nel verso positivo dell'asse z. Gli elettroni verranno spinti nel verso positivo dell'asse y lasciando scoperte cariche positive dal lato opposto del conduttore. Il campo elettrico si formerà quindi, all'interno del conduttore, nel verso positivo dell'asse y. La differenza di potenziale dell'effetto Hall permette di calcolare il campo elettrico corrispondente

$$E = \frac{\Delta V_H}{D}$$

Lo spostamento delle cariche sui lati del conduttore termina quando la forza elettrica che subiscono è pari alla forza magnetica. La stessa formazione del campo elettrico garantisce che le due forze siano opposte. La velocità delle cariche elettriche è la velocità di deriva tipica del conduttore.

$$qE = qU_d B$$

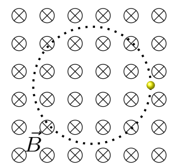
$$B = \frac{E}{U_d} = \frac{\Delta V}{D U_d}$$

$$B = \frac{4 \cdot 10^{-6}\, V}{0,2\, m \cdot 10^{-4}\, \frac{m}{s}} = 0,2\, T$$

Problema di: Cinematica - Magnetismo - $CM0001$

Testo *[CM0001]* [2 ⭐ 2 ⌛ 5a 📖]

Un elettrone si muove perpendicolarmente ad un campo magnetico $B = 10^{-6}\, T$ con velocità $\mathcal{V} = 90000\, \frac{m}{s}$. Quanto vale il raggio della sua traiettoria circolare? Nel disegno a fianco è indicato il percorso della particella. Sapendo che il campo magnetico è entrante nel foglio, indica il vettore velocità, giustificando la risposta data.



Spiegazione Una carica che si muove all'interno di un campo magnetico subisce una forza che, viste le caratteristiche dell'interazione magnetica, è sempre perpendicolare alla velocità della carica. Questa forza è quindi sempre una forza centripeta. La carica si muove quindi di moto circolare uniforme.

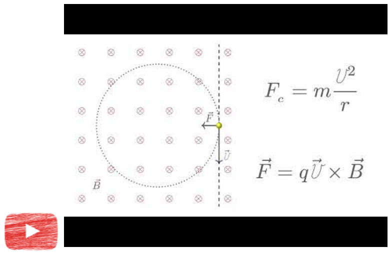


Fig. 4.7: *Guarda il video youtu.be/9WRpgBqGBBU*

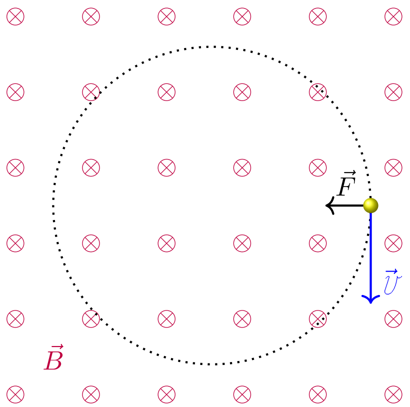
Svolgimento Per risolvere il problema è sufficiente eguagliare il modulo della forza magnetica alla forza centripeta subita dalla particella (indicando con e il valore della carica elettrica dell'elettrone trascurando il segno nel calcolo del modulo della forza).

$$F_c = |\vec{F}|$$

$$\frac{m\mathcal{V}^2}{r} = e\mathcal{V}B\sin\theta_{\mathcal{V}B}$$

da cui, sapendo che $\theta_{\mathcal{V}B} = 90°$, avremo

$$r = \frac{m\mathcal{U}}{eB} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} kg \cdot 9 \cdot 10^{4} \frac{m}{s}}{1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^{-6}\, T} = 51,2\, cm$$



La forza centripeta è nel disegno verso il centro della circonferenza. Per avere una forza di questo tipo, il campo magnetico e la velocità devono essere ad essa perpendicolari. Questo come conseguenza del prodotto vettoriale nella formula

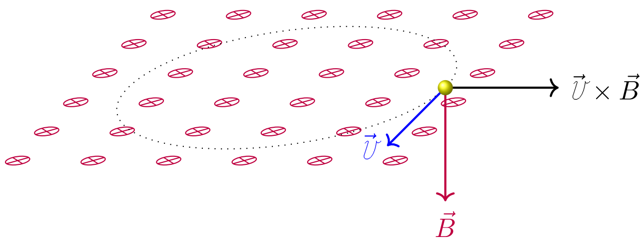
$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{U}} \times \vec{B}$$

Quindi la velocità della particella è sul piano del foglio, ovviamente tangente alla traiettoria per definizione stessa di velocità.

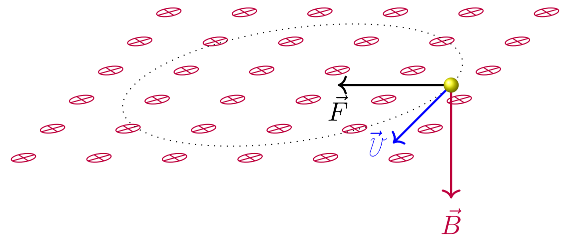
Per la regola della mano destra nella formula della forza magnetica nella parte del prodotto vettoriale $\vec{\mathcal{U}} \times \vec{B}$ la velocità deve essere in modo tale che il prodotto

$$\vec{\mathcal{U}} \times \vec{B}$$

sia un vettore verso l'esterno della circonferenza,



in modo che la forza sulla carica di segno negativo sia verso il centro.



Problema di: Magnetismo - $CM0002$

Testo *[CM0002]* [2 3 4a]
Un protone si muove alla velocità $U = 10^3\,\frac{m}{s}$ e vogliamo deviarne la traiettoria di $\Delta\theta = 30°$ facendolo muovere in un campo magnetico $B = 2\,mT$ perpendicolare alla sua velocità. Per quanto tempo dobbiamo mantenere presente il campo magnetico?

Spiegazione Una particella in un campo magnetico si muove di moto circolare uniforme. La deviazione angolare della sua velocità dipende ovviamente dal tempo.

Svolgimento La particella, muovendosi in un campo magnetico perpendicolare alla sua velocità, subisce una forza di tipo centripeto.

La forza magnetica che subisce la particella è

$$F = qUB$$

Quindi eguagliamo la forza magnetica all'equazione della forza centripeta

$$qUB = m\omega^2 r$$

In un moto circolare abbiamo che $U = \omega r$ e quindi

$$\omega = \frac{q\,B}{m}$$

La deviazione angolare per il moto circolare uniforme è

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{q\,B}{m}\Delta t$$

da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta\,m}{q\,B}$$

Non bisogna fare altro che sostituire i valori numerici per ottenere il risultato. Ovviamente l'angolo deve essere espresso in radianti per ottenere un risultato in secondi.

Domande di teoria sull'elettromagnetismo - $EM0001$

Testo *[EM0001]* [3 20 5a]
Rispondi in modo conciso ma esauriente alle seguenti richieste.

1. Illustra le quattro equazioni di Maxwell ed il loro ruolo nello sviluppo della fisica nei primi anni del novecento.
2. Parliamo di onde elettromagnetiche: descrivine la natura e le caratteristiche.
3. In cosa consiste il fenomeno dell'induzione elettromagnetica?
4. Descrivi il fenomeno del magnetismo nella materia
5. Perché si può parlare di energia potenziale elettrostatica ma non si può parlare di energia potenziale elettrica? Collega questo concetto con l'equazione di Kirchoff.
6. Descrivi la carica e la scarica di un condensatore e di un'induttanza. Descrivi il comportamento di un circuito oscillante.
7. Se vedi una carica elettrica che si muove allora sai che genera un campo magnetico. Nel sistema di riferimento di quella carica, tale campo però è nullo. Come giustifichi questa apparente contraddizione?
8. Parla di corrente elettrica... nel modo più completo possibile.
9. Hai caricato il cellulare? Com'è stato possibile?
10. Le equazioni di Maxwell mostrano un'asimmetria tra campo elettrico e campo magnetico. Approfondisci l'argomento.
11. Come possiamo generare il fenomeno della corrente alternata? Perché solo con la corrente alternata possiamo far funzionare un trasformatore?
12. Ricava, argomentando i vari passaggi, la curva di carica e di scarica di un condensatore
13. Ricava, argomentando i vari passaggi, la curva di carica e di scarica di un'induttanza

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0002$

Testo *[EM0002]* [2 ⭐ 2 ⏳ 5a 📖]
Una spira conduttrice elastica è allungata fino ad assumere forma circolare di raggio $r = 0,1\,m$, ed è immersa in un campo magnetico $B = 1\,mT$ parallelo all'asse della spira. Lasciata libera, nell'istante iniziale il raggio varia nel tempo come $v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = 0,2\,\frac{m}{s}$. Quanto vale la differenza di potenziale lungo la spira nell'istante iniziale?

Spiegazione L'equazione di Maxwell che descrive il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è ciò che serve per risolvere il problema

Svolgimento La spira cambia il valore dell'area nel tempo e quindi cambia il flusso del campo magnetico nel tempo. Se la spira diminuisce il suo raggio di una quantità molto piccola Δr, l'area della corona circolare ΔS è calcolabile come[1]

$$\Delta S = 2\pi r \Delta r$$

Per la legge di Maxwell sulla circuitazione del campo elettrico avremo

$$\Delta V = -\frac{\Delta\Phi\,(B)}{\Delta t} = -\frac{B \cdot 2\pi r \Delta r}{\Delta t} = -2\pi B r v$$

$$\Delta V = 1,26 \cdot 10^{-3}\,V$$

[1]Per chi non riuscisse a visualizzare la formula seguente può pensare che il calcolo dell'area di questa corona circolare è in prima approssimazione una sorta di *base per altezza*. Certo che non è un rettangolo, ma per piccolissimi Δr l'errore è trascurabile e per $\Delta r \to 0$ l'errore sparisce.

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0003$

Testo *[EM0003]* [2 ⭐ 2 ⏳ 5a 📖]
Considerata una spira di rame piana $A = 4\,cm^2$, realizzata con un cavo di rame di lunghezza $L = 10\,cm$ e sezione $S = 1\,mm^2$, immersa in un campo magnetico uniforme $B = 0.1\,T$, determina la frequenza con cui deve ruotare per vedere circolare in essa una corrente massima di $i = 300\,mA$

Spiegazione L'equazione di Maxwell che descrive il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è ciò che serve per risolvere il problema

Svolgimento Detto θ l'angolo tra il campo magnetico ed il vettore superficie della spira, il flusso del campo magnetico attraverso la spira di rame è

$$\Phi(B) = A \cdot B \cdot \cos(\theta)$$

La legge dell'induzione elettromagnetica ci permette di scrivere

$$\Delta V = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = AB\omega\sin(\theta)$$

dove $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ è la velocità angolare della spira.
Non essendoci resistenze, l'unica resistenza del circuito è quella del cavo

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

e quindi

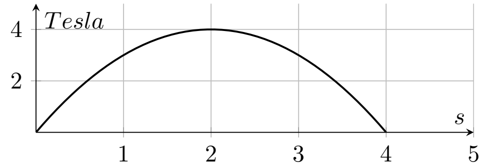
$$\rho\frac{L}{S}i = AB\omega\sin(\theta)$$

La massima corrente l'abbiamo quando $\sin(\theta) = 1$ e quindi

$$\omega = \frac{\rho L i}{SAB}$$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0004$

Testo *[EM0004]* [4 4 5a]
Una spira circolare di raggio r e resistenza R è immersa in un campo magnetico ad essa perpendicolare $B(t)$ variabile nel tempo secondo un andamento parabolico mostrato nel grafico in figura. Calcola la potenza media dissipata dal circuito nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 4\,s$.



Spiegazione L'equazione di Maxwell che descrive il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è ciò che serve per risolvere il problema. Da ricordare le formule di elettrotecnica per la determinazione della potenza dissipata.

Svolgimento La potenza media dissipata dal circuito è data

$$P = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\Delta V(t)^2}{R} dt$$

Dalla legge sull'induzione elettromagnetica avremo che

$$\Delta V = \frac{d\Phi(B(t))}{dt} = 2\pi r \frac{dB(t)}{dt}$$

L'andamento del campo magnetico ha forma di parabola. Vediamo dal grafico che tale parabola passa per i punti $O(0,0)$, $V(2,4)$, $A(4,0)$. Il campo magnetico ha quindi equazione

$$B(t) = \left(-t^2 + 4t\right)\tau$$

dove $\tau = Tesla$ serve per non perdere traccia delle unità di misura. La sua derivata rispetto al tempo

$$\frac{dB(t)}{dt} = (-2t + 4)\,\tau$$

$$P = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \frac{4\pi^2 r^2 \left(4t^2 + 16t + 16\right)\tau^2}{R} dt$$

$$P = \frac{4\pi^2 r^2 \tau}{R\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \left(4t^2 + 16t + 16\right) dt$$

$$P = \frac{4\pi^2 r^2 \tau}{R\Delta t} \left(\frac{4}{3}t^3 + 8t^2 + 16t\right)_{t_i}^{t_f}$$

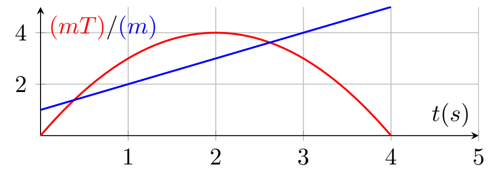
$$P = \frac{4\pi^2 r^2 \tau}{R\Delta t} \left(\frac{256}{3} + 128 + 64\right)$$

$$P = \frac{4\pi^2 r^2 \tau}{R\Delta t} \left(\frac{832}{3}\right)$$

$$P = \frac{\pi^2 r^2 \tau}{R} \left(\frac{832}{3}\right)$$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0005$

Testo *[EM0005]* [4 4 5a]
Una spira conduttrice di resistenza R inizialmente circolare ha raggio $r(t)$ è immersa in un campo magnetico $B(t)$ad essa perpendicolare. Sia il raggio della spira che il campo magnetico sono variabili nel tempo secondo il grafico mostrato in figura, lineare il primo e parabolico il secondo. Calcola la potenza media dissipata dal circuito nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 4\,s$.



Spiegazione L'equazione di Maxwell che descrive il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è ciò che serve per risolvere il problema. Da ricordare le formule di elettrotecnica per la determinazione della potenza dissipata.

Svolgimento Sia la spira che il campo magnetico variano nel tempo, quindi il flusso del campo magnetico attraverso la superficie circuitata dalla spira varia nel tempo. Sulla spira si genera una corrente elettrica indotta che, avendo la spira una resistenza R, dissipa dell'energia per effetto Joule.

Cominciamo a calcolare

[...]

Problema di: Elettromagnetismo - $EM0014$

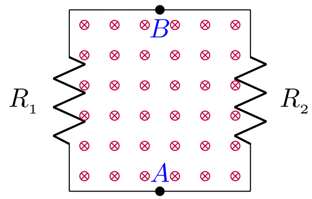
Testo *[EM0014]* [2 2 5a]
In un certo volume sono presenti un filo conduttore ed un campo magnetico uniforme ad esso parallelo. Dimostra che quel filo non può essere attraversato da una corrente elettrica.

Spiegazione Un problema sulla legge della circuitazione del campo magnetico.

Svolgimento Immaginiamo di prendere un qualunque percorso chiuso su di un piano perpendicolare al filo. Muovendoci lungo il percorso, gli spostamenti sarebbero sempre perpendicolari al campo magnetico. La circuitazione del campo magnetico è quindi nulla, e di conseguenza la corrente totale concatenata è anch'essa nulla. Essendoci un solo filo, necessariamente la corrente sul filo deve essere nulla.

Problema di: Induzione EM - $EM0015$

Testo *[EM0015]* [3 2 5a]



Il circuito in figura, a forma di un quadrato di lato $L = 10\,cm$, è realizzato con due resistenze $R_1 = 5\,k\Omega$ e $R_2 = 10\,k\Omega$, poste in serie. Esso è immerso in un campo magnetico variabile nel tempo di equazione $B = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $B_0 = 0.4\,T$ e $\tau = 4\,s$. Calcola la corrente indotta indicandone il verso. Calcola la differenza di potenziale $\Delta V_{1_{A\to B}}$ attraverso la resistenza R_1 e la differenza di potenziale $\Delta V_{2_{A\to B}}$ attraverso la resistenza R_2 all'istante $t = 2\,s$.

Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Svolgimento [...]

Domande di teoria: Elettromagnetismo - $EM0016$

Testo *[EM0016]* [3 4 5a]
Commenta la struttura ed il significato fisico dell'equazione di Maxwell sulla circuitazione del campo elettrico.

Spiegazione Domanda di teoria: organizza gli argomenti in una sequenza logica ordinata e scrivili.

Concetti da sviluppare

- Sulla struttura dell'equazione, identificare la relazione tra il percorso lungo il quale calcolo la circuitazione e la superficie attraverso la quale calcolo il flusso. Indicare quindi come flussi di campi magnetici che variano nel tempo generano campi elettrici citando la legge di Lenz e mostrando la necessità del segno negativo. Indicare infine i modi con cui si può avere una variazione del flusso.
- Sul significato fisico citare la conservatività del campo elettrico e il legame con l'energia potenziale elettrostatica

Svolgimento Consideriamo una superficie aperta orientata S, e consideriamo il suo bordo anch'esso orientato secondo la regola della mano destra rispetto alla superficie S. Una variazione di flusso di campo magnetico nel tempo sulla superficie S genera un campo elettrico lungo il bordo γ di tale superficie. Ovviamente la variazione del flusso la si può ottenere a seguito di variazioni del campo magnetico, variazioni della forma della superficie considerata, oppure variazioni dell'angolo tra il campo magnetico e la superficie. Campi magnetici ed elettrici sono quindi legati tra loro ed un campo magnetico, in opportune condizioni, può generare un campo elettrico. L'equazione è detta di Faraday - Neumann - Lenz, o equazione dell'induzione elettromagnetica. La legge di Lenz si riferisce al segno negativo che compare nell'equazione, ad indicare che gli effetti della variazione del flusso nel tempo si oppongono alle cause che li hanno generati. Se così non fosse gli effetti andrebbero ad incrementare le cause in una spirale crescente che porterebbe a campi di valore infinito ed a energie infinite.

Dal momento che la circuitazione del campo elettrico non è in generale nulla, ne segue che il campo elettrico non è conservativo e quindi non lo è nemmeno la forza elettrica, considerato che la forza elettrica è data da $\vec{F} = q\vec{E}$. Non esiste quindi un'energia potenziale elettrica. Tale energia esiste solo in casi di campi elettrici e magnetici statici nel tempo.

Esercizi concettualmente identici Altre domande la cui risposta è sostanzialmente la stessa:

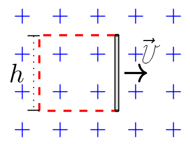
- Commenta la struttura dell'equazione di Maxwell sulla circuitazione del campo elettrico, dando risalto ai tre modi con cui può avvenire una variazione di flusso attraverso una superficie.

I concetti da sviluppare sono:

- Flusso del campo che varia genera un campo elettrico lungo un percorso.
- Relazione della relazione tra superficie e percorso.
- Legge di Lenz (cosa dice e perché deve essere così)
- Tre modi di variare il flusso

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0022$

Testo *[EM0022]* [3 2 5a]
Una sbarra conduttrice di lunghezza $h = 25\,cm$ si muove con velocità $U = 4\,\frac{m}{s}$ costante, su di un piano immerso in un campo magnetico uniforme e costante $B = 0,01\,T$ ad esso perpendicolare. Quanto vale la differenza di potenziale agli estremi della barretta?



Spiegazione In questo problema abbiamo una sbarra di materiale conduttore che si muove all'interno di un campo magnetico. Avremo quindi, su un percorso chiuso che contiene la sbarra, una differenza di potenziale dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

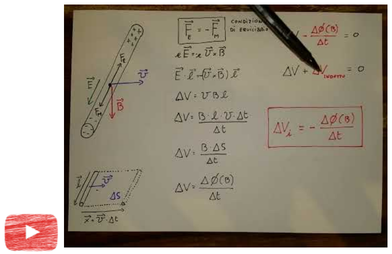


Fig. 5.1: *Guarda il video youtu.be/X3FUFTqZNdQ*

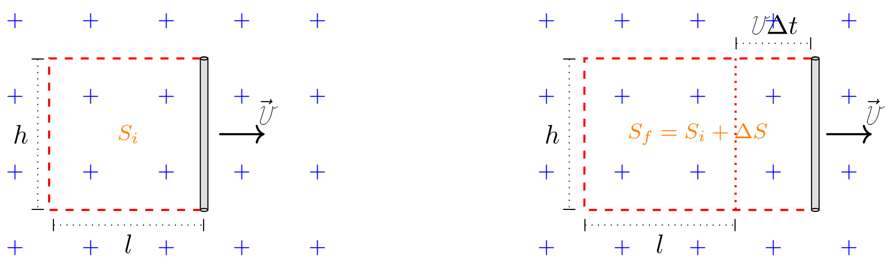
Svolgimento Per prima cosa definiamo un percorso chiuso che delimiti una superficie attraverso la quale calcolare il flusso del campo magnetico. Un rettangolo con un lato coincidente con la barretta sarà perfetto. Chiamiamo γ tale percorso.

La differenza di potenziale indotta lungo il percorso chiuso è dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

$$|\Delta V_\gamma| = \frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t}$$

Senza utilizzare il calcolo differenziale avremo quanto segue.[2]

Calcoliamoci adesso il flusso nell'istante iniziale e nell'istante finale di un certo intervallo di tempo Δt. Sappiamo che il campo magnetico è perpendicolare al piano del foglio e quindi l'angolo da utilizzare per il flusso è nullo.



$$\Phi_{S_i}(B) = B \cdot S_i \cdot \cos(0°) = B \cdot h \cdot l$$

$$\Phi_{S_f}(B) = B \cdot S_f \cdot \cos(0°) = B \cdot h \cdot (l + \mathcal{U}\Delta t)$$

Con semplici passaggi ci calcoliamo la variazione del flusso

$$\Phi_{S_f}(B) = \Phi_{S_i}(B) + B \cdot h \cdot \mathcal{U}\Delta t$$

$$\Phi_{S_f}(B) - \Phi_{S_i}(B) = B \cdot h \cdot \mathcal{U}\Delta t$$

[2]Possiamo impostare il problema più agevolmente con il calcolo differenziale. Partendo dal flusso del campo magnetico avremo

$$\Phi_S(B) = B \cdot S \cdot \cos(0°)$$

Essendo il campo magnetico costante e l'angolo anch'esso costante, ed essendo l'area infinitesima spaziata dalla sbarretta in un intervallo di tempo dt è $dS = h \cdot \mathcal{U}dt$, avremo

$$d\Phi_S(B) = B \cdot dS = B \cdot l \cdot \mathcal{U}dt$$

$$\frac{d\Phi_S(B)}{dt} = B \cdot h \cdot \mathcal{U}$$

$$\Delta\Phi_S(B) = B \cdot h \cdot \mathcal{U}\Delta t$$

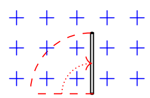
$$\frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t} = B \cdot h \cdot \mathcal{U}$$

Mettiamo i valori nella formula e troviamo il risultato

$$|\Delta V_{ind}| = 0,01\,T \cdot 0,25\,m \cdot 4\,\frac{m}{s} = 0,01\,Volt$$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0023$

Testo *[EM0023]* [3 2 5a]
Una sbarra conduttrice di lunghezza $l = 25\,cm$ ruota intorno ad uno degli estremi con frequenza $\nu = 4\,Hz$ su di un piano immerso in un campo magnetico ad esso perpendicolare. Quanto vale la differenza di potenziale agli estremi della sbarra?



Spiegazione In questo problema abbiamo un conduttore che si muove in un campo magnetico e quindi gli elettroni in esso subiscono una forza. Questo significa che c'è un campo elettrico e quindi una differenza di potenziale. In particolare in questo caso la legge dell'induzione magnetica descrive in modo accurato tale fenomeno.

Svolgimento Per prima cosa definiamo un percorso chiuso che delimiti una superficie attraverso la quale calcolare il flusso del campo magnetico. Un settore circolare con un lato coincidente con la barretta sarà perfetto. Chiamiamo γ tale percorso.

La differenza di potenziale indotta lungo il percorso chiuso è dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

$$|\Delta V_\gamma| = \frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t}$$

Senza utilizzare il calcolo differenziale avremo quanto segue.[3]

[3] L'area infinitesima spaziata dalla sbarretta in un intervallo di tempo dt è rappresentata da un settore circolare

$$dS = \frac{1}{2}l^2 \cdot d\alpha = h^2\pi\nu dt$$

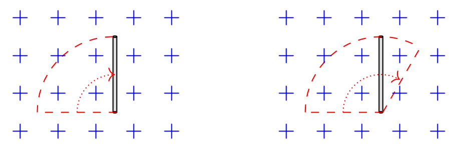
Il flusso del campo magnetico (anch'esso infinitesimo) è

$$d\Phi = B \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = B \cdot h^2\pi\nu dt$$

e di conseguenza il valore della differenza di potenziale indotta è

$$|\Delta V_{ind}| = \frac{d\Phi}{dt} = Bh^2\pi\nu$$

Calcoliamoci adesso il flusso nell'istante iniziale e nell'istante finale di un certo intervallo di tempo Δt. Sappiamo che il campo magnetico è perpendicolare al piano del foglio e quindi l'angolo da utilizzare per il flusso è nullo.



$$\Phi_{S_i}(B) = B \cdot S_i \cdot \cos(0^\circ) = \frac{1}{2}B \cdot h^2 \cdot \theta_i$$

$$\Phi_{S_f}(B) = B \cdot S_f \cdot \cos(0^\circ) = \frac{1}{2}B \cdot h^2 \cdot (\theta_i + \omega\Delta t)$$

Con semplici passaggi ci calcoliamo la variazione del flusso

$$\Phi_{S_f}(B) = \Phi_{S_i}(B) + \frac{1}{2}B \cdot h^2 \cdot \omega\Delta t$$

$$\Phi_{S_f}(B) - \Phi_{S_i}(B) = \frac{1}{2}B \cdot h^2 \cdot \omega\Delta t$$

$$\Delta\Phi_S(B) = \frac{1}{2}B \cdot h^2 \cdot \omega\Delta t$$

$$|\Delta V_{ind}| = \frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t} = B \cdot h^2 \cdot \omega = \pi B h^2 \nu$$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0024$

Testo *[EM0024]* [3 2 5a]
Una spira rettangolare piana ruota in un campo magnetico uniforme $B = 0,1\,T$ con velocità angolare costante $\omega = 4s^{-1}$. All'istante $t_i = 0$ la spira è perpendicolare al campo magnetico. Quale differenza di potenziale è misurabile lungo la spira all'istante $t_f = 0.3\,s$?

Spiegazione In questo problema abbiamo un conduttore che si muove in un campo magnetico e quindi gli elettroni in esso subiscono una forza. Questo significa che c'è un campo elettrico e quindi una differenza di potenziale. In particolare in questo caso la legge dell'induzione magnetica descrive in modo accurato tale fenomeno. In particolare in questo caso l'area racchiusa dalla spira non cambia in modulo ma cambia la sua inclinazione nel tempo e quindi cambia l'angolo con ilo campo magnetico esterno. La variazione dell'angolo implica una variazione del flusso e quindi una differenza di potenziale indotta.

Svolgimento Indichiamo con $\alpha(t)$ l'angolo che all'istante t la spira fa con il campo magnetico. Dal momento che il piano della spira all'istante $t_i = 0$ è perpendicolare al campo magnetico, allora l'angolo della spira con il campo magnetico è $\alpha(0) = 0$. Avremo che in generale

$$\alpha(t) = \omega t$$

Il flusso del campo magnetico è calcolabile con

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\left(\alpha(t)\right)$$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\left(\omega t\right)$$

La tensione indotta sarà

$$V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \cdot \sin\left(\omega t\right)$$

Problema di: Equazioni di Maxwell - $EM0025$

Testo *[EM0025]* [3 2 5a]
In un campo elettrico uniforme nello spazio ma variabile nel tempo individuiamo un percorso circolare di raggio r su di un piano perpendicolare al campo elettrico. La variazione del campo elettrico è costante nel tempo e vale $\frac{dE}{dt} = \alpha_{const}$. Quanto vale il campo magnetico lungo tale percorso?

Spiegazione In questo problema applichiamo l'equazione di Maxwell che parla della circuitazione del campo magnetico.

Svolgimento Calcolando la circuitazione del campo magnetico avremo:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi(E)}{dt}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0\epsilon_0 \pi r^2 \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{r}{2c^2}\frac{dE}{dt}$$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0027$

Testo [EM0027] [3 ★ 3 ⌛ 5a 📖]
Attraverso una spira di rame quadrata, formata da un cavo di sezione S e lunghezza L passa un campo magnetico di intensità $B(t) = B_0 e^{-\omega t} \sin(\omega t)$. Quanto vale la corrente indotta su tale spira?

Spiegazione In questo problema è sufficiente conoscere la seconda legge di Ohm e la legge dell'induzione elettromagnetica

Svolgimento La resistenza della spira, per la seconda legge di Ohm, vale

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

dove ρ è la conducibilità elettrica del rame.

La superficie della spira è

$$A = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$$

La corrente che passa attraverso la spira la si trova con la prima legge di Ohm e derivando il flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira:

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{L^2}{16R} \cdot \frac{-d\Phi(B(t))}{dt} = \frac{B_0 L^2}{16R} \left(-\omega e^{-\omega t} \cos(\omega t) - \omega e^{-\omega t} \sin(omegat)\right)$$

$$i = \frac{B_0 L^2 \omega}{16R} e^{-\omega t} \left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)$$

Gli istanti in cui varia il segno della funzione rappresentano gli istanti in cui varia il verso della corrente.

Problema di: Campo magnetico - $EM0029$

Testo [EM0029] [2 ★ 2 ⌛ 5a 📖]
Due cilindri cavi conduttori di dimensioni differenti r_a ed r_b, con $r_b = 2r_a$, hanno in comune il loro asse centrale. Essi sono percorsi da correnti opposte $i_b = 2i_a$. Determinare il campo magnetico nelle tre regioni di spazio delimitate dai due cilindri.

Spiegazione In questo problema utilizziamo l'equazione di Maxwell sulla circuitazione del campo magnetico.

Svolgimento In un sistema di riferimento radiale con origine nell'asse dei cilindri, avremo che nella regione di spazio interna al cilindro di raggio minore è

$$\begin{cases} r < r_a \\ B \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Tra i due cilindri è

$$\begin{cases} r_a < r < r_b \\ B \cdot 2\pi r = \mu i_a \Rightarrow B = \dfrac{\mu i_a}{2\pi r} \end{cases}$$

Se ipotizziamo la corrente diretta verso l'alto avremo il campo magnetico in senso antiorario se visto dall'alto.

Oltre il cilindro con raggio maggiore avremo

$$\begin{cases} r > r_b \\ B \cdot 2\pi r = \mu\left(i_a - i_b\right) \Rightarrow B = -\dfrac{\mu i_a}{2\pi r} \end{cases}$$

In questo caso il campo magnetico risulta in senso orario.

Problema di: Campo magnetico - $EM0030$

Testo *[EM0030]* [5 5 5a]
Un circuito è formato da un generatore di tensione costante $V = 9\,Volt$, un interruttore inizialmente aperto, un'induttanza del valore $H = 15\,H$ con resistenza trascurabile, e una resistenza $R = 5\,\Omega$, montate in serie. Chiamiamo A e B i due punti del circuito agli estremi dell'induttanza. All'istante $t_0 = 0$ l'interruttore viene chiuso e la corrente può cominciare a fluire nel circuito. Quanto vale la corrente all'istante $t_f = 4\,s$? Calcola poi, per lo stesso istante, l'integrale

$$\Lambda = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

prima lungo un percorso γ_1 lungo il filo, e poi lungo un percorso γ_2 esterno all'induttanza.

Spiegazione Un circuito LR di cui la teoria ci fornisce direttamente la soluzione della prima domanda. Per le successive due domande i calcoli degli integrali devono tenere conto del percorso lungo i quali li si vuole calcolare.

Svolgimento La video-soluzione si trova su YouTube nel video

Fig. 5.2: *Guarda il video youtu.be/Tm5FpMHnkUg*

La risposta alla prima domanda la si ottiene conoscendo il valore della corrente in funzione del tempo. Tale funzione è a soluzione dell'equazione differenziale caratterizzante il circuito.

Tale equazione è

$$\Delta V - \Delta V_{ind} - \Delta V_{res} = -L\frac{di}{dt}$$

La differenza di potenziale ai capi dell'induttanza è nulla in quanto la resistenza dell'avvolgimento è, come specificato dal testo, trascurabile. Questa è di fatto la risposta alla seconda domanda del problema, in quanto l'integrale chiesto dal problema, da A a B per un percorso che segue il cavo elettrico, è proprio la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza.

Percorriamo il circuito nel verso indicato dal generatore (uguale in questo caso al verso della corrente) e calcoliamo la circuitazione del campo elettrico. All'interno del generatore il campo elettrico è opposto al nostro verso di percorrenza, quindi

$$-\Delta V + Ri = -L\frac{di}{dt}$$

La soluzione di questa equazione è

$$i(t) = \frac{\Delta V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i(4\,s) = \frac{9\,V}{5\,\Omega} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right) = 1,326\,A$$

Adesso risolviamo l'integrale chiesto dal problema lungo un percorso esterno all'induttanza.

Consideriamo un percorso circolare che da B arrivi ad A lungo il cavo, e poi da A si ricongiunga a B esternamente al cavo. Lungo questo percorso la circuitazione del campo elettrico sarà

$$-\Delta V + \Lambda + Ri = 0$$

dove questa volta mettiamo 0 dopo l'uguale in quanto non ci sono induttanze lungo il percorso. Quindi

$$\Lambda = \Delta V - Ri = 9\,Volt - 6,63\,Volt = 2,37\,Volt$$

Domande di teoria: Elettromagnetismo - $EM0031$

Testo *[EM0031]* [3 ⭐ 4 ⌛ 5a 📖]
Cosa si intende per corrente di spostamento? Illustrane l'equazione e le sue caratteristiche, e mostra una situazione reale nella quale si veda che tale termine è necessario nella relativa equazione di Maxwell.

Spiegazione Domanda di teoria: organizza gli argomenti in una sequenza logica ordinata e scrivili.

Concetti da sviluppare

- Definizione dell'equazione di Maxwell e ruolo della corrente di spostamento all'interno dell'equazione
- Simmetria con l'equazione sull'induzione elettromagnetica; relazione tra campo elettrico e campo magnetico
- Indicazione di una situazione in cui si vede la necessarietà di tale termine.

Svolgimento Il termine di corrente di spostamento è

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E}}{dt}$$

ed è presente nell'equazione di Maxwell sulla circuitazione del campo magnetico

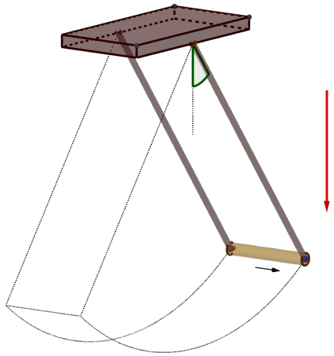
$$\oint_\gamma = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E}}{dt}$$

In essa si afferma che la circuitazione del campo magnetico su di un qualunque percorso chiuso è dato da μ_0 moltiplicato per la somma algebrica di tutte le correnti concatenate dal percorso. Nell'equazione la corrente è concatenata se, scelta la superficie il cui bordo è γ, la corrente attraversa tale superficie. La corrente di spostamento è una delle correnti che vengono sommate tra tutte le correnti concatenate. Analizzando la struttura della corrente di spostamento, si vede che essa non è generata da un movimento di cariche elettriche, ma da una variazione di flusso del campo elettrico attraverso la superficie che ha γ come bordo. Tale struttura mostra una simmetria contraria rispetto all'equazione sull'induzione elettromagnetica, mostrando come campo elettrico e magnetico sono vicendevolmente interconnessi, ed ognuno di essi, attraverso una variazione di flusso nel tempo, genera l'altro.

Per giustificare il fatto che tale termine sia necessario, possiamo considerare un circuito di carica di un condensatore. Consideriamo un percorso chiuso intorno al filo in modo tale da vedere che, a seconda della scelta della superficie che ha tale percorso come bordo, la corrente concatenata è la corrente dovuta al moto delle cariche elettrice, oppure la corrente legata alla variazione del flusso di un campo elettrico nel tempo. *[La trattazione va poi arricchita con il disegno del circuito che illustri in modo chiaro tutti i concetti]*

Problema di: Elettromagnetismo - $EM0033$

Testo *[EM0016]* [3 3 5a]
Un pendolo di massa $m = 100\,g$ è formato da una bacchetta lunga $L = 20\,cm$ e due fili tutti conduttrici, come mostrato in figura. Le linee puntinate della figura, immaginarie, servono unicamente a farti meglio comprendere lo schema. Il pendolo è immerso in un campo magnetico uniforme verticale $B = 0,2\,T$ ed è attraversato da una corrente $i = 15\,A$. Lasciato libero di oscillare intorno alla posizione di equilibrio, sapendo che il pendolo è lungo $r = 1\,m$, quanto vale il periodo dell'oscillazione?



Spiegazione Fondamentalmente un problema di meccanica nel quale è necessario tenere presente la forza di Lorentz.

Svolgimento Il pendolo è soggetto a due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza di Lorentz orizzontale verso l'esterno. Dal disegno si comprende che la corrente che attraversa la bacchetta ed il campo magnetico sono tra loro perpendicolari. La tensione dei fili bilancia queste due forze. Quindi

$$F_g = mg = 0,98\,N$$

$$F_B = iLB = 0,6\,N$$

La risultante delle due forze è

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_B^2} = 1,15\,N$$

Questa forza è costante durante l'oscillazione, e corrisponde ad un'accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = 11,5\,\frac{m}{s^2}$$

Il periodo del pendolo risulta quindi essere

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a}} = 1,85\,s$$

Problema di: Elettromagnetismo - $EM0034$

Testo *[EM0034]* [2 3 5a]
Due isotopi dell'Uranio, U^{235} e U^{238} sono inviati dallo stesso fascio ad uno spettrometro di massa con velocità $\mathcal{V} = 1,05 \cdot 10^5\, \frac{m}{s}$. L'intensità del campo magnetico deflettente è $B = 0,75\, T$. Sullo schermo rilevatore si riescono a distinguere quattro differenti punti di arrivo degli atomi suddivisi in due coppie si punti vicini. Come mai vediamo quattro punti e non due? Per ognuna delle due coppie, qual'è la distanza tra i due punti? L'unità di massa atomica è $u = 1,66054 \cdot 10^{-27}\, kg$.

Spiegazione Per questo esercizio serve sapere solo la forza di Lorentz e la struttura dello spettrometro di massa. In tale strumento il percorso degli ioni e semicircolare. Gli atomi sono neutri in natura; per poter interagire con lo spettrometro devono essere prima ionizzati.

Svolgimento Il moto degli atomi è circolare uniforme a causa della forza magnetica. Il raggio del moto vale

$$m\frac{\mathcal{V}^2}{r} = q\mathcal{V}B$$

$$r = \frac{m\mathcal{V}}{qB}$$

Considerando che il punto di partenza del moto è lo stesso, dopo mezza circonferenza le due traiettorie distano tra loro

$$d = 2\,|r_1 - r_2|$$

La massa dell'atomo può assumere due valori: $m_1 = 235\, u$ o $m_2 = 238\, u$ La carica q può assumere due valori a seconda che l'atomo sia stato ionizzato una o due volte: $q_1 = e$ e $q_2 = 2e$. Ecco il motivo per cui abbiamo quattro differenti punti di impatto.

Nel caso di prima ionizzazione avremo

$$d = 2\left(\frac{238\, u\mathcal{V}}{eB} - \frac{235\, u\mathcal{V}}{eB}\right) = 6\frac{u\mathcal{V}}{eB}$$

Nel caso di doppia ionizzazione avremo

$$d = 3\frac{u\mathcal{V}}{eB}$$

Problema di: Elettrostatica - $EM0035$

Testo *[EM0035]* [3 3 5a]
Una lampadina ad incandescenza assorbe una potenza elettrica $P = 100\,W$. La potenza luminosa emessa dal filo di tungsteno surriscaldato è il 2% della potenza elettrica assorbita. Trascurando l'effetto dell'aria, ed ipotizzando che la lampadina sia puntiforme, determina l'intensità luminosa incidente a $d = 5\,m$ di distanza ed i valori efficaci del campo elettrico e magnetico dell'onda elettromagnetica. *[Dalla simulazione della maturità di fisica del 25 gennaio 2016]*

Spiegazione Trovata l'intensità dell'onda è necessario ricordare la relazione tra tale intensità luminosa ed i campi elettrici e magnetici medi (*efficaci*) sulla superficie irradiata.

Svolgimento L'intensità luminosa irradiata su di una certa superficie è data dal rapporto tra la potenza che incide su tale superficie e la superficie stessa.

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Al tempo stesso sappiamo che tale intensità è legata al valore efficace del campo elettrico e magnetico dell'onda elettromagnetica.

$$I = c\epsilon E_{eff}^2$$

oppure in modo analogo

$$I = \frac{c}{\mu} B_{eff}^2$$

da cui

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{P}{4\pi c\epsilon d^2}}$$

$$B_{eff} = \sqrt{\frac{P\mu}{4\pi c d^2}}$$

Problema di: Elettromagnetismo - $EM0036$

Testo *[EM0036]* [2 3 5a]
Una lampadina ad incandescenza emette onde elettromagnetiche i cui valori efficaci del campo elettrico alla distanza $d = 10\,m$ sono $E_{eff} = 5\,\frac{N}{C}$. Trascurando l'effetto dell'aria, quanto vale la potenza irradiata dalla lampadina?

Spiegazione L'intensità di un'onda elettromagnetica è legata alla potenza irradiata su di una certa superficie, e come conseguenza ai valori efficaci del campo elettrico (o del campo magnetico) ed alla velocità della luce.

Svolgimento Per questo esercizio sappiamo che

$$I = c\epsilon_0 E_{eff}^2$$

$$I = 299792458\,\frac{m}{s} \cdot 8,85418782 \cdot 10^{-12}\,\frac{s^4 A^2}{m^3 kg} \cdot 50\,\frac{N}{C} = 0,13\,\frac{W}{m^2}$$

Conoscendo la distanza della sorgente risaliamo alla potenza emessa

$$P = 4\pi d^2 I = 41\,W$$

Problema di: Elettromagnetismo - $EM0036a$

Testo *[EM0036a]* [2 3 5a]
Una lampadina ad incandescenza emette onde elettromagnetiche i cui valori efficaci del campo magnetico alla distanza $d = 10\,m$ sono $B_{eff} = 1\,mT$. Trascurando l'effetto dell'aria, quanto vale la potenza irradiata dalla lampadina?

Spiegazione L'intensità di un'onda elettromagnetica è legata alla potenza irradiata su di una certa superficie, e come conseguenza ai valori efficaci del campo elettrico (o del campo magnetico) ed alla velocità della luce.

Svolgimento Per questo esercizio sappiamo che

$$I = \frac{c}{\mu_0} B_{eff}^2$$

$$I = 299792458\,\frac{m}{s} \cdot 1,25663706 \cdot 10^{-6}\,\frac{m\,kg}{s\,A} \cdot 5\,mT = 377\,\frac{W}{m^2}$$

Conoscendo la distanza della sorgente risaliamo alla potenza emessa

$$P = 4\pi d^2 I = 118\,W$$

Problema di: Magnetismo - $EM0039$

Testo *[EM0039]* [1½ 3 5a]
Tre fili rettilinei percorsi da correnti $i_1 = 3\,A$, $i_2 = 11\,A$ entranti nel foglio e $i_3 = 3\,A$ uscente dal foglio, lo attraversano. Indica un percorso γ sul tuo foglio tale per cui la circuitazione del campo magnetico risulta pari a $\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right) = 32\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{N}{A}$

Spiegazione Sappiamo che la circuitazione del campo magnetico è legata all'intensità delle correnti concatenate. Il problema chiede di trovare un percorso chiuso che concateni una corrente totale tale che la circuitazione venga a valere un certo valore. Il primo passo sarà capire quanto deve essere la corrente totale circuitata.

Svolgimento LA circuitazione del campo magnetico è $\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right) = \mu_0 i_{tot}$
quindi

$$i_{tot} = \frac{\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right)}{\mu_0} = 8\,A$$

L'unico modo di ottenere il valore indicato è calcola<re la circuitazione nel verso entrante nel foglio (e quindi orario guardando il foglio) le correnti i_2 e i_3 che sottraendosi danno $8\,A$

Problema di: Magnetismo - $EM0039a$

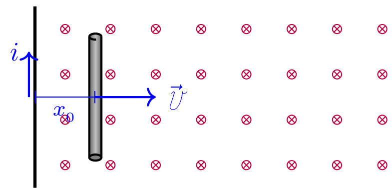
Testo *[EM0039a]* [1½ 3 5a]
Tre fili rettilinei percorsi da correnti $i_1 = 7\,A$, $i_2 = 13\,A$ entranti nel foglio e $i_3 = 3\,A$ uscente dal foglio, lo attraversano. Indica un percorso γ sul tuo foglio tale per cui la circuitazione del campo magnetico risulta pari a $\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right) = 40\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{N}{A}$

Spiegazione Sappiamo che la circuitazione del campo magnetico è legata all'intensità delle correnti concatenate. Il problema chiede di trovare un percorso chiuso che concateni una corrente totale tale che la circuitazione venga a valere un certo valore. Il primo passo sarà capire quanto deve essere la corrente totale circuitata.

Svolgimento LA circuitazione del campo magnetico è $\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right) = \mu_0 i_{tot}$
quindi
$i_{tot} = \frac{\Gamma_\gamma\left(\vec{B}\right)}{\mu_0} = 10\,A$
L'unico modo di ottenere il valore indicato è calcolare la circuitazione nel verso entrante nel foglio (e quindi orario guardando il foglio) le correnti i_2 e i_3 che sottraendosi danno $10\,A$

Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0043$

Testo *[EM0043]* [4 4 5a]



Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i ed una barretta conduttrice di resistenza R e lunghezza L che viene mantenuta a velocità costante U. Inizialmente la barretta si trova ad una distanza x_0 dal filo. Determina la differenza di potenziale agli estremi della barretta in funzione del tempo.

Spiegazione Un esercizio sull'induzione elettromagnetica. La barretta, muovendosi descrive una superficie rettangolare sulla quale calcolare il flusso del campo magnetico e la differenza di potenziale indotta.

Svolgimento Il campo magnetico generato dal filo è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Dove r è la distanza della barretta dal filo. Con il cavo sulla sinistra e la barretta a destra, e la corrente verso l'alto, il campo magnetico sulla superficie rettangolare descritta dalla barretta è entrante nel foglio. Scegliamo per comodità un percorso ideale in senso orario lungo il bordo della superficie rettangolare descritta dalla barretta.

La distanza della barretta dal filo al generico istante t è

$$r = x_0 + Ut$$

quindi nel generico istante t la barretta si trova immersa in un campo magnetico dato da

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{x_0 + Ut}$$

Nel generico istante di tempo t, immaginando un intervallo infinitesimo di tempo dt, la barretta genera una variazione di flusso del campo magnetico

$$d\Phi(B) = B(t) \cdot U dt$$

Tale variazione aumenta il flusso del campo magnetico e quindi deve avere segno positivo.

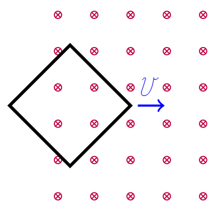
La differenza di potenziale indotta è

$$\Delta V_{ind} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \mathcal{U} \cdot B(t) = -\frac{\mu_0 i \mathcal{U}}{2\pi} \frac{1}{x_0 + \mathcal{U}t}$$

Tale differenza di potenziale è negativa, quindi in verso opposto al verso del circuito, quindi tale da generare un'ipotetica corrente in senso antiorario. Questo significa che la parte superiore della barretta ha un potenziale più basso. Visto che non abbiamo un circuito fisico lungo il quale far scorrere della corrente, le cariche elettriche si accumuleranno ai bordi della barretta.

Problema di: Magnetismo - $EM0048$

Testo *[EM0048]* [4 3 5a]
Una spira conduttrice quadrata di lato L e resistenza R, entra con velocità costante $\mathcal{U}$, in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme ad essa perpendicolare. La spira si muove lungo l'asse x mantenendo la diagonale parallela a quell'asse. Calcola la corrente che attraversa la spira in funzione del tempo.



Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. Calcolate il flusso del campo magnetico; fatene la derivata rispetto al tempo ed avete la differenza di potenziale lungo il percorso chiuso della spira.

Fig. 5.3: *Guarda il video youtu.be/X1sqJBcS_KM*

Svolgimento Indichiamo con $t_0 = 0$ l'istante di tempo in cui il vertice della spira entra in contatto con il campo magnetico. La lunghezza della diagonale della spira è

$$d = L \cdot \sqrt{2}$$

La prima metà della spira entra nel campo magnetico in un tempo

$$\Delta t = \frac{L\sqrt{2}}{2\mathcal{U}}$$

e ne esce in un intervallo di tempo uguale.

Mentre la prima metà della spira entra nel campo magnetico, cioè per

$$0 < t < \frac{L\sqrt{2}}{2\mathcal{U}}$$

all'istante di tempo t la parte della spira che è attraversata dal campo magnetico ha la forma di un triangolo rettangolo di altezza $h = \mathcal{U} \cdot t$ e base $b = 2\mathcal{U}t$ L'area è quindi $A = \mathcal{U}^2 t^2$ La forza elettromotrice lungo la spira sarà quindi

$$|\Delta V| = \left| \frac{d}{dt}\Phi(B) \right| = 2B\mathcal{U}^2 t$$

La corrente sarà quindi

$$i = \frac{2B\mathcal{U}^2 t}{R}$$

In questo calcolo abbiamo solo considerato il valore assoluto della corrente, lasciando l'indicazione del versoi al ragionamento scritto.

Se la spira è complanare con il vostro foglio e si muove verso destra, ed il campo magnetico è entrante nel foglio, il verso della corrente sarà antiorario in accordo con la legge di Lenz.

Quando la spira è immersa per più della metà della sua area, cioè per intervalli di tempo

$$\frac{L\sqrt{2}}{2\mathcal{U}} < t < \frac{L\sqrt{2}}{\mathcal{U}}$$

allora l'area della spira coperta dal campo magnetico sarà

$$A = L^2 - \left[\frac{L\sqrt{2}}{2} - \mathcal{U}\left(t - \frac{L\sqrt{2}}{2\mathcal{U}} \right) \right]^2$$

$$A = L^2 - \left[\frac{L\sqrt{2}}{2} - \mathcal{U}t + \frac{L\sqrt{2}}{2} \right]^2$$

$$A = L^2 - \left(L\sqrt{2} - \mathcal{U}t \right)^2$$

Quindi

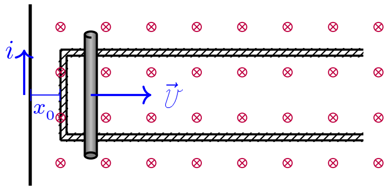
$$|\Delta V| = \left| \frac{d}{dt}\Phi(B) \right| = 2B\mathcal{U}\left(L\sqrt{2} - \mathcal{U}t \right)$$

$$i = \frac{2\sqrt{2}B\mathcal{U}L}{R} - \frac{2B\mathcal{U}^2}{R}t$$

Problema di: Magnetismo - $EM0049$

Testo *[EM0049]* [2 3 5a]

Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i ed una rotaia conduttrice ad U di lunghezza infinita posizionata come rappresentato in figura ad una distanza x_0. Sulla rotaia è presente una barretta conduttrice di resistenza R e lunghezza L che viene mantenuta a velocità costante U. Indica il verso della corrente indotta e disegna un grafico approssimativo del suo andamento nel tempo.



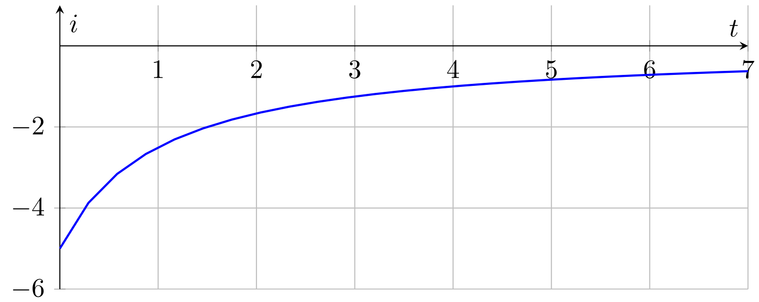
Spiegazione Il campo magnetico in cui è immersa la barretta è prodotto da un filo rettilineo infinito, quindi diminuisce all'aumentare della distanza da esso. La barretta è parte di un circuito rettangolare la cui area aumenta nel tempo. Per induzione elettromagnetica su tale circuito circola una corrente.

Svolgimento Identificato il percorso chiuso rappresentante il circuito conduttore su cui passerà la corrente indotta, identifichiamo come "dietro" della superficie la faccia della superficie rivolta verso di voi. Questa scelta è stata fatta in modo arbitrario (semplifica il ragionamento la scelta che rende il flusso positivo).

Il bordo della superficie considerata è il circuito conduttore di questo esercizio.

1. Al muoversi della barretta, aumenta l'area della superficie del circuito.
2. Il flusso del campo magnetico, di valore positivo, aumenta.
3. Per induzione elettromagnetica deve succedere qualcosa che contrasta l'aumento del flusso (qualcosa che introduce un flusso aggiuntivo negativo).
4. Quel qualcosa è un campo magnetico indotto rivolto verso l'alto (in questo caso opposto al campo magnetico del filo)
5. Un tale campo magnetico indotto è generato da una corrente indotta in senso antiorario nel circuito.

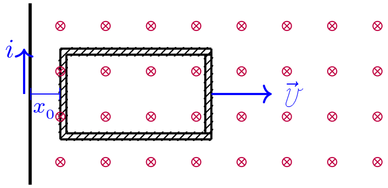
Al muoversi della barretta verso destra, per ogni intervallo di tempo Δt l'aumento dell'area del circuito avviene a causa di una superficie aggiunta sempre più lontana dal filo, dove il campo magnetico è sempre meno intenso. L'aumento del flusso, sempre presente, diminuisce man mano di intensità generando una corrente indotta sempre minore. avremo quindi un grafico che da un valore iniziale decresce asintoticamente verso lo zero.



Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0050$

Testo *[EM0050]* [2 3 5a]

Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i ed una spira conduttrice rettangolare posizionata come rappresentato in figura ad una distanza x_0. La spira ha resistenza R e viene mantenuta a velocità costante U. Indica il verso della corrente indotta e disegna un grafico approssimativo del suo andamento nel tempo.



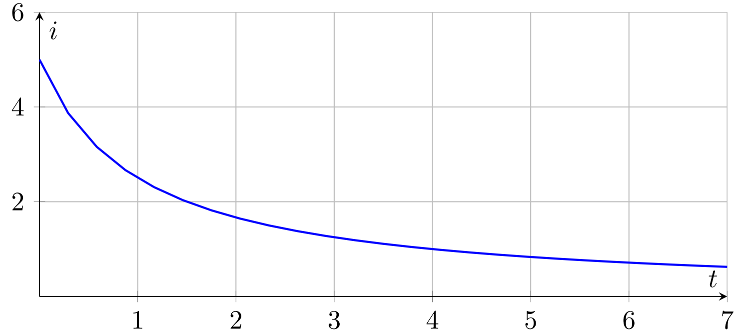
Spiegazione Il campo magnetico in cui è immersa la barretta è prodotto da un filo rettilineo infinito, quindi diminuisce all'aumentare della distanza da esso. Il circuito rettangolare, allontanandosi dal filo, si trova immerso in un campo magnetico di intensità variabile e di conseguenza in esso circola una corrente indotta.

Svolgimento Identificato il percorso chiuso rappresentante il circuito conduttore su cui passerà la corrente indotta, identifichiamo come "dietro" della superficie la faccia della superficie rivolta verso di voi. Questa scelta è stata fatta in modo arbitrario (semplifica il ragionamento la scelta che rende il flusso positivo).

Il bordo della superficie considerata è il circuito conduttore di questo esercizio.

1. Al muoversi della barretta, il campo magnetico medio sulla superficie diminuisce
2. Il flusso del campo magnetico, di valore positivo, diminuisce.
3. Per induzione elettromagnetica deve succedere qualcosa che contrasta la diminuzione del flusso (qualcosa che introduce un flusso aggiuntivo positivo).
4. Quel qualcosa è un campo magnetico indotto rivolto verso il basso (in questo caso concorde con il campo magnetico del filo)
5. Un tale campo magnetico indotto è generato da una corrente indotta in senso orario nel circuito.

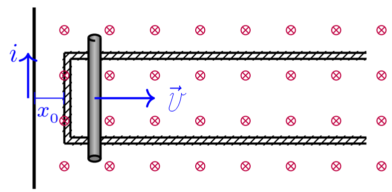
L'andamento della corrente rispecchia la rapidità con cui il flusso cambia nel tempo, il che a sua volta rispecchia la rapidità con cui il campo magnetico varia al variare della distanza dal filo. Tale rapidità diminuisce con la distanza dal filo e quindi così fa la corrente.



•

Problema di: Magnetismo - $EM0051$

Testo *[EM0051]* [4 3 5a]



Su di un piano sono presenti un cavo conduttore infinito percorso da una corrente i ed una rotaia conduttrice ad U di lunghezza infinita posizionata come rappresentato in figura ad una distanza x_0. Sulla rotaia è presente una barretta conduttrice di resistenza R e lunghezza L che viene mantenuta a velocità costante U. Indica il verso della corrente indotta e calcolane il valore in funzione del tempo.

Spiegazione Il campo magnetico in cui è immersa la barretta è prodotto da un filo rettilineo infinito, quindi diminuisce all'aumentare della distanza da esso. La barretta è parte di un circuito rettangolare la cui area aumenta nel tempo. Per induzione elettromagnetica su tale circuito circola una corrente.

Svolgimento Identificato il percorso chiuso rappresentante il circuito conduttore su cui passerà la corrente indotta, identifichiamo come "dietro" della superficie la faccia della superficie rivolta verso di voi. Questa scelta è stata fatta in modo arbitrario (semplifica il ragionamento la scelta che rende il flusso positivo).

Il bordo della superficie considerata è il circuito conduttore di questo esercizio.

La variazione di flusso dovuta al moto della barretta in un intervallo di tempo infinitesimo dt è data da

$$d\Phi(B) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} L U dt$$

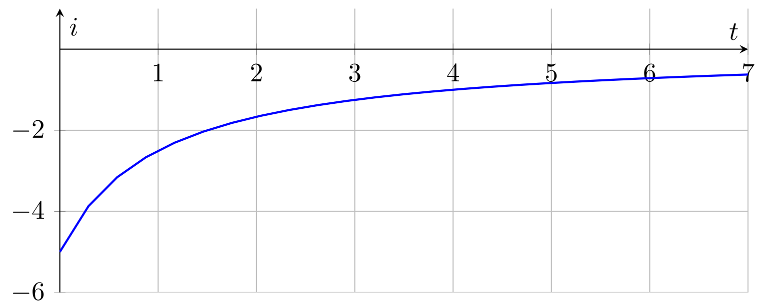
$$d\Phi(B) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(x_0 + Ut} L U dt$$

$$\Delta V = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x_0 + Ut)} L U$$

Per calcolare la differenza di potenziale svolgiamo la derivata della funzione Φ rispetto al tempo e otteniamo

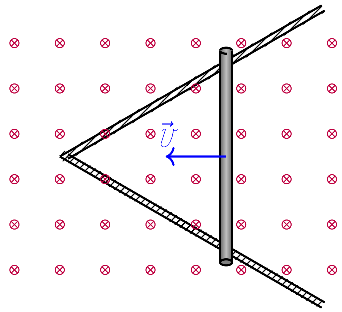
$$\Delta V = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(x_0 + Ut)} L U$$

Il fatto che la differenza di potenziale sia negativa implica che la corrente sia negativa e quindi opposta al verso della circuitazione, cioè in senso antiorario.



Problema di: Induzione elettromagnetica - $EM0052$

Testo *[EM0052]* [4 3 5a]



Su di un piano incide perpendicolarmente un campo magnetico costante $B = 1\,mT$. Il campo ha verso entrante nel piano. Sul piano è presente una rotaia conduttrice di resistenza trascurabile disposta a V con un angolo al vertice $\theta = 60°$. Sulla rotaia, perpendicolare alla bisettrice tra le rotaie, una barretta di rame lunga $L = 1\,m$ e di sezione $S = 2\,cm^2$. Facendo muovere la barretta con velocità $U = 0,1\,\frac{m}{s}$ verso il vertice delle due rotaie, calcola la differenza di potenziale indotta indicandone anche il verso. All'istante iniziale gli estremi della barretta toccano la rotaia.

Spiegazione Un esercizio sull'induzione elettromagnetica. Calcolate il flusso e derivatelo!

Svolgimento Per calcolare la differenza di potenziale indotta sul circuito triangolare che si forma tra la rotaia e la barretta, dobbiamo prima calcolare il flusso sulla superficie triangolare che ha il circuito come bordo.

Fissiamo il verso di percorrenza del circuito in senso orario, in modo che il vettore superficie sia entrante nel foglio e quindi concorde con il campo magnetico esterno.

All'istante iniziale $t_0 = 0$, il triangolo isoscele considerato ha come base L e come altezza

$$h_0 = \frac{1}{2} L \cot\frac{\theta}{2}$$

All'istante generico t (limitato dal raggiungimento del vertice da parte della barretta, e quindi per $t < \frac{h_0}{U}$) la barretta dista dal vertice

$$h(t) = h_0 - U \cdot t$$

La base del triangolo è quindi lunga

$$b(t) = 2h(t)\tan\frac{\theta}{2}$$

L'area del triangolo è quindi

$$A(t) = \frac{1}{2} b(t)h(t) = h^2(t)\tan\frac{\theta}{2}$$

Il flusso del campo magnetico risulta quindi

$$\Phi_\gamma(\vec{B}) = B \cdot A(t)$$

La differenza di potenziale indotta è quindi

$$\Delta V_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_\gamma(\vec{B}) = +2UB\tan\frac{\theta}{2}(h_0 - U \cdot t)$$

Tale f.e.m. indotta è positiva e quindi genererà una corrente elettrica oraria. Una tale corrente indotta, infatti, genera un campo magnetico indotto concorde con il campo magnetico esterno contrastando la diminuzione del flusso dovuta alla diminuzione della superficie racchiusa dal circuito.

Possiamo anche ottenere lo stesso risultato andando a calcolare direttamente il differenziale del flusso al generico istante t. In un intervallo di tempo infinitesimo dt la barretta ha coperto un'area che possiamo ipotizzare rettangolare pari a

$$dA = -b(t)Udt$$

Dal momento che quest'area verrà poi sottratta all'area della superficie triangolare le diamo un segno negativo in modo da avere poi il calcolo del flusso fatto con il segno corretto.

Sappiamo che la base è legata all'altezza in questo triangolo dalla relazione

$$b(t) = 2h(t)\tan\frac{\theta}{2}$$

da cui

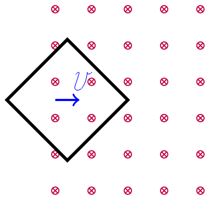
$$dA = -2U(h_0 - U \cdot t)\tan\frac{\theta}{2}dt$$

e quindi, tenendo conto del fatto che il campo magnetico è costante, avremo

$$\Delta V_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_\gamma(\vec{B}) = -B\frac{dA}{dt} = +2UB\tan\frac{\theta}{2}(h_0 - U \cdot t)$$

Problema di: Magnetismo - $EM0053$

Testo *[EM0053]* [2 2 5a]
Una spira quadrata di lato L entra, con velocità costante $\vec{U}$, in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme perpendicolare alla spira. La spira si muove lungo l'asse x mantenendo la diagonale parallela a quell'asse. La spira ha resistenza R. Indica il verso della corrente indotta e traccia un grafico approssimativo del suo valore.



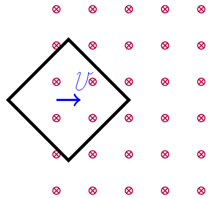
Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Fig. 5.4: *Guarda il video youtu.be/X1sqJBcS_KM*

Svolgimento

Problema di: Magnetismo - $EM0053$

Testo *[EM0053]* [2 2 5a]
Una spira quadrata di lato L entra, con velocità costante $\vec{U}$, in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme perpendicolare alla spira. La spira si muove lungo l'asse x mantenendo la diagonale parallela a quell'asse. La spira ha resistenza R. Indica il verso della corrente indotta e traccia un grafico approssimativo del suo valore.



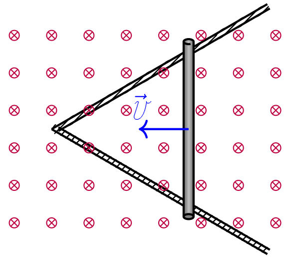
Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Svolgimento [...]

Problema di: Magnetismo - $EM0054$

Testo *[EM0054]* [2 ⭐ 2 ⏳ 5a 📖]

Un campo magnetico costante è perpendicolare ed entrante in un piano. Sul piano è posta una rotaia conduttrice di resistenza trascurabile disposta a V. Sulla rotaia, perpendicolare alla bisettrice tra le rotaie, una barretta di rame di resistenza R. La barretta con velocità costante U verso il vertice delle due rotaie, indica il verso della corrente indotta e disegna un grafico approssimativo del valore della differenza di potenziale lungo il circuito.

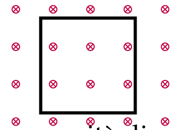


Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Svolgimento [...]

Problema di: Magnetismo - $EM0055$

Testo *[EM0055]* [2 ⭐ 2 ⏳ 5a 📖]



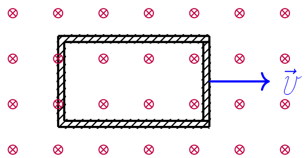
Una spira quadrata di lato $L = 2\,m$ è immersa in un campo magnetico ad essa perpendicolare che varia nel tempo t misurato in secondi, seguendo l'equazione $B = at^2 + b$, con $a = 10^{-3}$ e $b = 12,546 \cdot 10^{-3}$ nelle opportune unità di misura, e B misurato in Tesla. Indica tali unità di misura di a e b, e calcola il valore della differenza di potenziale sul circuito nel generico istante t. Indica inoltre il verso della corrente indotta sul circuito.

Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Svolgimento [...]

Problema di: Magnetismo - $EM0056$

Testo *[EM0056]* [3 3 5a]



Su di una regione di un piano è presente un campo magnetico variabile nel tempo $B(t)$ perpendicolare al piano stesso. Il campo magnetico, misurato in Tesla, ha equazione $B = at^2 + b$, nelle opportune unità di misura. Indica tali unità di misura. Una spira conduttrice rettangolare si muove in tale regione come mostrato in figura. La spira ha resistenza R e viene mantenuta a velocità costante U. Calcola la corrente elettrica indotta indicandone il verso. Quale effetto ha la velocità della spira sulla corrente indotta?

Spiegazione Questo è un esercizio sull'induzione elettromagnetica. E' sufficiente applicare la relativa equazione di Maxwell per ottenere la risposta corretta.

Svolgimento [...]

Domanda su elettromagnetismo e teoria della relatività - $EMR0007$

Testo *[EM0007]* [3 4 5a]
Illustra le quattro equazioni di Maxwell dando risalto al loro ruolo nello sviluppo della fisica nei primi anni del novecento.

Spiegazione Domanda di teoria: organizza gli argomenti in una sequenza logica ordinata e scrivili.

Concetti da sviluppare

- Nella prima parte della domanda è necessario scrivere le equazioni di Maxwell illustrandole brevemente. Possiamo semplicemente *leggerle* in modo da dimostrare di aver compreso il senso di quei simboli, e possiamo indicare che campi elettrici e magnetici sono tra loro interconnessi.
- Una soluzione delle equazioni sono le onde elettromagnetiche la cui velocità risulta un numero fisso invariante per cambi di sistema di riferimento in contraddizione con le trasformazioni di Galileo. Inoltre le stesse equazioni di Maxwell non sono invarianti sotto l'azione delle trasformazioni di Galileo e quindi non rispettano il principio di relatività della meccanica classica.

Svolgimento [...]

Elettrotecnica: soluzioni — Scheda 6

Problema di: Elettrotecnica - $V0001$

Testo *[V0001]* [2½ 4 4a]
Il faro abbagliante di un'auto consuma una potenza $P = 60\,W$ alimentato da una batteria con differenza di potenziale $\Delta V = 24\,V$. Il coefficiente di temperatura del materiale del filamento è $\alpha = 0,0042\,\frac{1}{°C}$. Calcola la resistenza a caldo R_a alla temperatura $T_a = 2700\,°C$ e la resistenza a freddo R_b alla temperatura $T_b = 20\,°C$

Spiegazione Un conduttore percorso da corrente si scalda ed aumenta il valore della sua resistenza secondo un'opportuna legge.

Svolgimento Cominciamo con il calcolare la resistenza a caldo conoscendo la potenza dissipata e la tensione applicata.

$$R_a = \frac{\Delta V^2}{P} = 9,6\,\omega$$

Sapendo che in generale la resistenza di un conduttore dipende dalla temperatura secondo la legge

$$R = R_0\,(1 + \alpha\Delta T)$$

i cui valori caratteristici dei materiali sono stati misurati alla temperatura di riferimento $T_0 = 0\,°C$

Per cui

$$\begin{cases} R_a = R_0\,(1 + \alpha\Delta T_a) \\ R_b = R_0\,(1 + \alpha\Delta T_b) \end{cases}$$

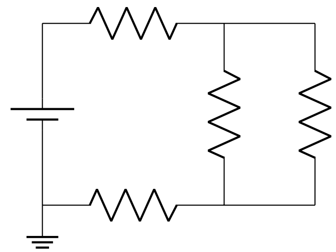
da cui

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{1 + \alpha\Delta T_b}{1 + \alpha\Delta T_a}$$

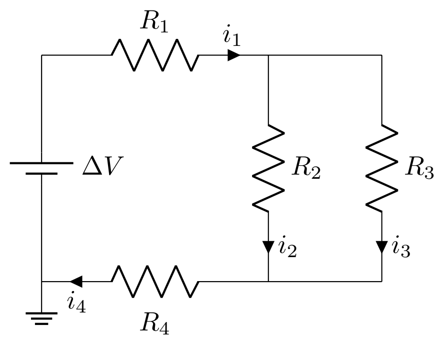
$$R_b = R_a\frac{1 + \alpha\Delta T_b}{1 + \alpha\Delta T_a} = 109,3\,\Omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0002$

Testo *[V0002]* [2 7 4a]
Un circuito elettrico è formato da due resistenze $R_2 = 6\,\Omega$ ed $R_3 = 12\,\Omega$ in parallelo, messe in serie con altre due resistenze $R_1 = 6\,\Omega$ ed $R_4 = 2\,\Omega$. il circuito è alimentato da un generatore $\Delta V = 24\,Volt$. Calcola le differenze di potenziale agli estremi di ogni resistenza e la corrente elettrica che le attraversa



Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.



Svolgimento Applicando le leggi di Ohm

1. Le resistenza R_2 ed R_3 sono in parallelo, per cui

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega} = \frac{1}{4\,\Omega}$$

2. La resistenza totale del circuito vale quindi

$$R_{tot} = R_1 + R_{23} + R_4 = 12\,\Omega$$

3. La corrente che esce dal generatore sarà quindi

$$i = i_1 = i_4 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 2\,A$$

4. La caduta di potenziale agli estremi della resistenza R_1 sarà

$$\Delta V_1 = R_1 \cdot i_1 = 12\,Volt$$

5. La caduta di potenziale agli estremi della resistenza R_4 sarà

$$\Delta V_4 = R_4 \cdot i_4 = 4\,Volt$$

6. La caduta di potenziale agli estremi delle resistenze R_2 ed R_3 sarà

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V - \Delta V_1 - \Delta V_4 = 8\,Volt$$

7. La corrente che parra per le resistenze R_2 ed R_3 sarà quindi rispettivamente

$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{4}{3}\,A \simeq 1,333\,A$$

e

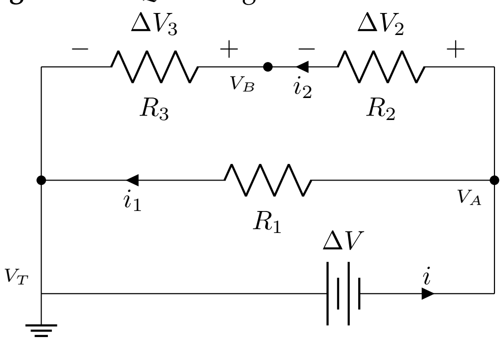
$$i_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3} = \frac{2}{3}\,A \simeq 0,667\,A$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0004$

Testo *[V0004]* [2 5 4a]
Un circuito elettrico, alimentato da un generatore $\Delta V = 24\,Volt$, è formato dalle resistenze $R_1 = 6\,\Omega$ in parallelo con la serie tra $R_2 = 8\,\Omega$ ed $R_3 = 4\,\Omega$. Calcola la corrente elettrica che attraversa ogni resistenza ed il potenziale nel punto tra le resistenze in serie.

Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm. Essendoci un solo generatore, cominciamo con il calcolarci la resistenza complessiva del circuito e la corrente che attraversa il generatore.

Svolgimento Qui di seguito il circuito di cui si parla nel testo del problema



Applicando le leggi di Ohm

1. Le resistenza R_2 ed R_3 sono in serie, per cui $R_{23} = R_2 + R_3 = 12\,\Omega$

2. La resistenza totale del circuito è data dal parallelo di R_1 con R_{23} e vale quindi

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{4\,\Omega}$$
$$R_{tot} = 4\,\Omega$$

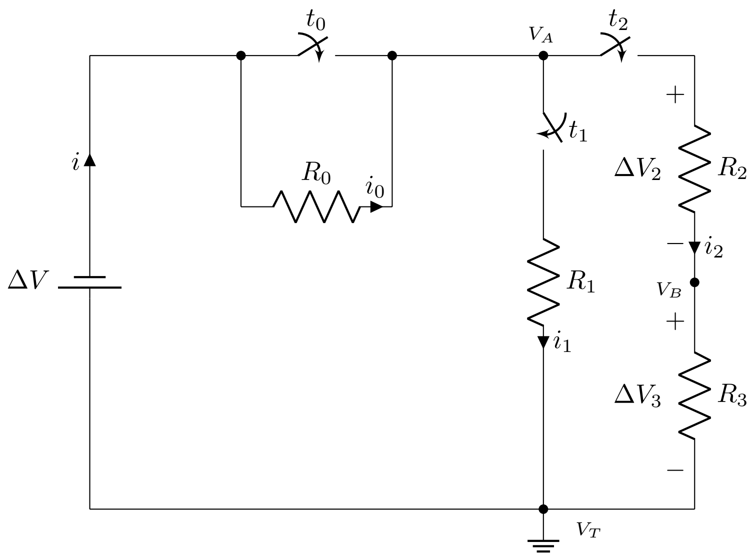
3. La corrente che esce dal generatore sarà quindi

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 6\,Ampere$$

4. Essendo T la terra del circuito: $V_T = 0\,Volt$
5. Il Potenziale nel punto A sarà: $V_A = V_T + \Delta V = 24\,Volt$
6. La differenza di potenziale tra i punti A e T sarà $\Delta V_1 = V_A - V_T = 24\,Volt$
7. La corrente che attraversa la resistenza R_1 varrà
$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{24\,V}{6\,\Omega} = 4\,Ampere$$
8. Nel punto A la somma delle correnti in ingresso deve essere uguale alla somma delle correnti in uscita, da cui
$$i_2 = i - i_1 = 6\,A - 4\,A = 2\,A$$
9. Agli estremi di R_2 la caduta di potenziale sarà $\Delta V_2 = R_2 i_2 = 16\,Volt$
10. Il potenziale nel punto B sarà $V_B = V_A - \Delta V_2 = 8\,Volt$
11. Agli estremi di R_3 la caduta di potenziale sarà $\Delta V_3 = R_3 i_2 = 8\,Volt$

Problema di: Elettrotecnica - $V0006$

Testo *[V0006]* [2 15 4a]
Dato il circuito elettrico in figura, determinarne il funzionamento per ogni configurazione degli interruttori. Le resistenze hanno valore $R_0 = 36\,\Omega$, $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 18\,\Omega$; $\Delta V = 240\,V$. *[A seconda di come sono messi gli interruttori dovete calcolare le correnti elettriche in tutti i rami, ed i valori del potenziale nei punti A e B.]*



Spiegazione A seconda di come sono posizionati gli interruttori, alcuni rami del circuito esisteranno oppure no. Bisogna quindi considerare tutte le possibili posizioni degli interruttori, disegnare il corrispondente circuito, ed infine analizzarlo.

Svolgimento

1. -[t_0 aperto; t_1 aperto; t_2 aperto]- in questo caso non c'è alcun percorso chiuso nel quale possa circolare la corrente
2. -[t_0 chiuso; t_1 aperto; t_2 aperto]- in questo caso non c'è alcun percorso chiuso nel quale possa circolare la corrente

3. -[t_0 aperto; t_1 chiuso; t_2 aperto]- in questo caso il circuito risulta essere:

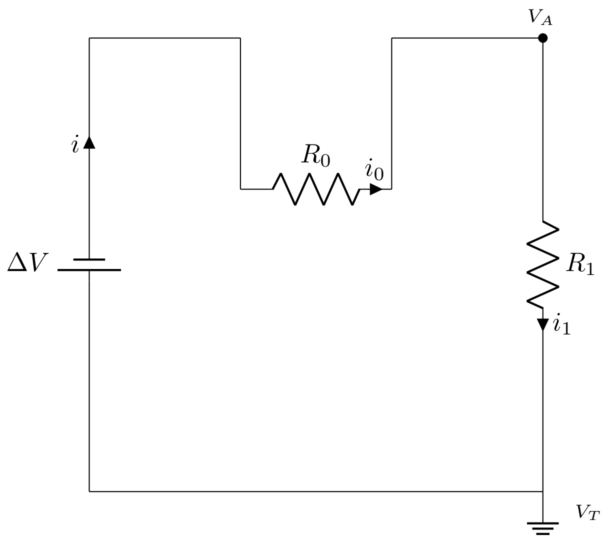


Fig. 6.1: *[t_0 aperto; t_1 chiuso; t_2 aperto]*

Per cui avremo che la resistenza totale del circuito vale

$$R_{tot} = R_0 + R_1 = 48\,\Omega$$

Essendoci di fatto solo una maglia, tutte le correnti devono necessariamente essere uguali

$$i = i_0 = i_1 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 5\,Ampere$$

Per trovare il potenziale nel punto A possiamo partire dalla terra e seguire sia il percorso che passa dal generatore, sia il percorso opposto

$$V_A = V_T + \Delta V - R_0 i_0 = 0\,Volt + 240\,Volt - 180\,Volt = 60\,Volt$$

4. -[t_0 chiuso; t_1 chiuso; t_2 aperto]- in questo caso il circuito risulta essere:

In questo caso

$$i = i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{20}{3}\,\Omega$$

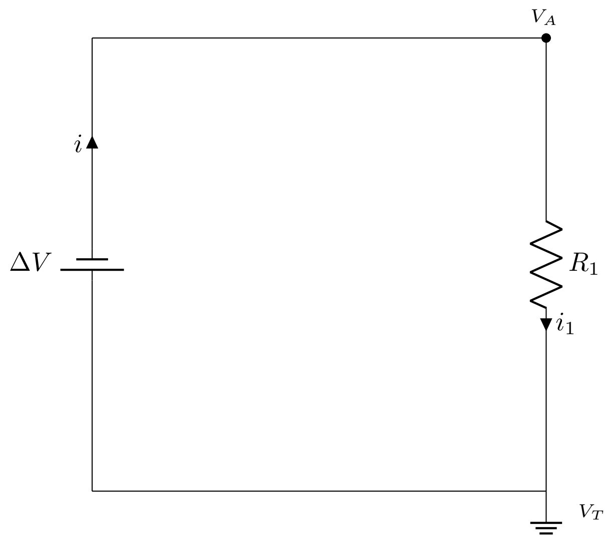


Fig. 6.2: *[t_0 chiuso; t_1 chiuso; t_2 aperto]*

$$V_A = V_T + \Delta V = 240\,V$$

5. -[t_0 aperto; t_1 aperto; t_2 chiuso]- in questo caso il circuito risulta essere:

Anche in questo caso c'è soltanto una maglia e quindi avremo

$$R_{tot} = R_0 + R_2 + R_3 = 60\,\Omega$$

$$i = i_0 = i_2 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 4\,Ampere$$

Il potenziale nel punto A vale

$$V_A = V_T + \Delta V - R_0 i_0 = 96\,V$$

Il potenziale nel punto B vale

$$V_B = V_A - R_2 i_2 = 72\,V$$

6. -[t_0 chiuso; t_1 aperto; t_2 chiuso]- in questo caso il circuito risulta essere:

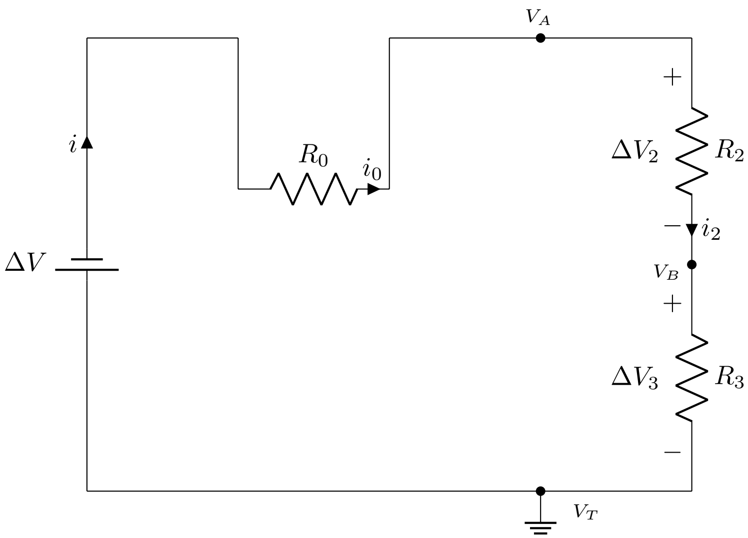


Fig. 6.3: *[t_0 aperto; t_1 aperto; t_2 chiuso]*

In questo circuito c'è una sola maglia, per cui

$$R_{tot} = R_2 + R_3 = 24\,\Omega$$

$$i = i_2 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 10\,Ampere$$

$$V_A = V_T + \Delta V = 240\,V$$

$$V_B = V_T + \Delta V - R_2 i_2 = 180\,V$$

7. -[t_0 aperto; t_1 chiuso; t_2 chiuso]- in questo caso il circuito risulta essere:

   In questo circuito abbiamo due rami del circuito in parallelo tra di loro, mentre le resistenze R_2 ed R_3 sono in serie tra di loro. La resistenza R_0 è in serie con il resto del circuito

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 24\,\Omega$$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}$$

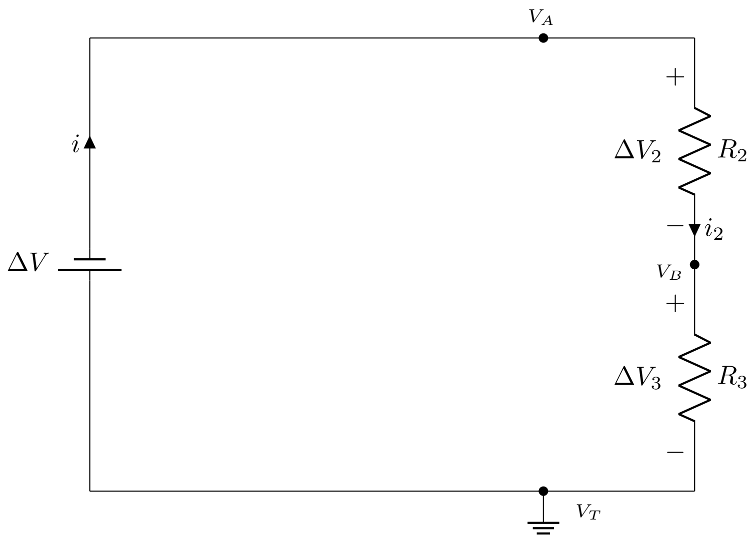


Fig. 6.4: *[t_0 chiuso; t_1 aperto; t_2 chiuso]*

$$R_{123} = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 8\,\Omega$$

$$R_{tot} = R_0 + R_{123} = 44\,\Omega$$

$$i = i_0 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = \frac{60}{11}\,Ampere$$

$$V_A = V_T + \Delta V - R_0 i_0 = \frac{480}{11}\,V \sim 43,64\,V$$

$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{V_A - V_T}{R_1} \sim 3,64\,A$$

$$i_2 = \frac{\Delta V_{23}}{R_{23}} = \frac{V_A - V_T}{R_{23}} \sim 4,36\,A$$

$$V_B = V_A - R_2 i_2 = 21,83\,V$$

8. -[t_0 chiuso; t_1 chiuso; t_2 chiuso]- in questo caso il circuito risulta essere:

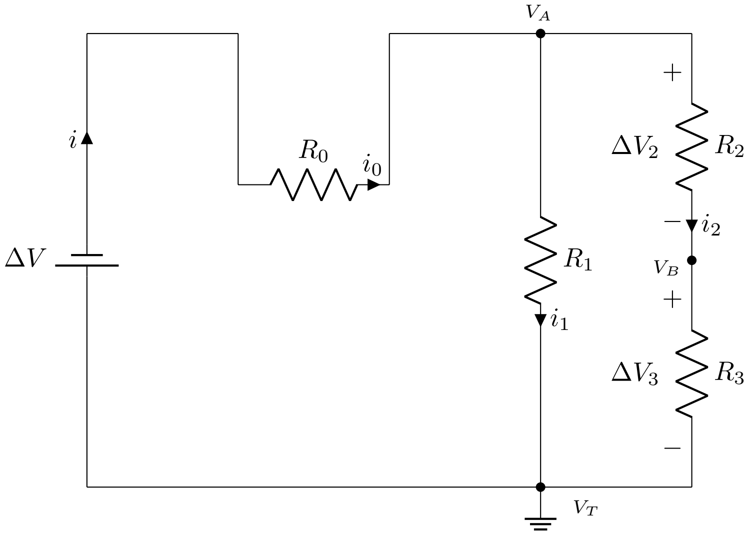


Fig. 6.5: *[t_0 aperto; t_1 chiuso; t_2 chiuso]*

In questo circuito abbiamo due rami del circuito in parallelo tra di loro, mentre le resistenze R_2 ed R_3 sono in serie tra di loro

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 24\,\Omega$$
$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}$$
$$R_{tot} = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 8\,\Omega$$
$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 30\,Ampere$$
$$V_A = V_T + \Delta V = 240\,V$$
$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{V_A - V_T}{R_1} = 20\,Ampere$$
$$i_2 = \frac{\Delta V_{23}}{R_{23}} = \frac{V_A - V_T}{R_2 + R_3} = 10\,Ampere$$
$$V_B = V_A - R_2 i_2 = 180\,V$$

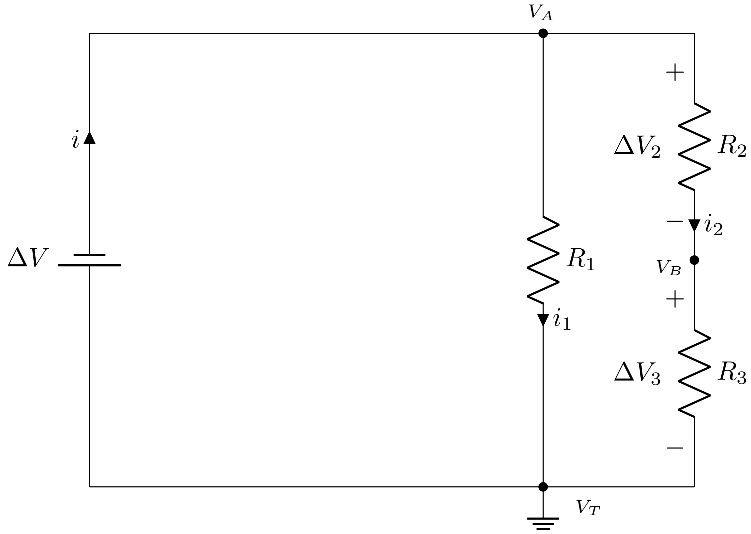


Fig. 6.6: *[t_0 chiuso; t_1 chiuso; t_2 chiuso]*

É evidente che il funzionamento del circuito varia notevolmente a seconda di quali interruttori sono stati effettivamente chiusi. In particolare nel caso l'interruttore t_0 sia aperto, il potenziale V_A dipende dalla configurazione degli interruttori.

Problema di: Elettrotecnica - $V0010$

Testo *[V0010]* [1 2 4a]
Un impianto elettrico è alimentato da una tensione $\Delta V = 220\,V$. Per rispettare il contratto di fornitura, l'alimentazione viene staccata quando nel circuito entra una corrente maggiore di $I_{max} = 15\,A$. Se nella casa sono accesi una lavatrice di potenza $P_{lav} = 1,5\,kW$, due stufe elettriche di potenza $P_s = 700\,W$ ed un televisore di potenza $P_t = 200\,W$, quante lampadine da $P_l = 30\,W$ possono ancora accendere?

Spiegazione In questo circuito elettrico abbiamo un generatore da $\Delta V = 220\,V$ che al massimo può erogare una corrente $I_{max} = 15\,A$. C'è quindi un limite alla massima potenza erogabile. Se la somma di tutte le potenze degli utilizzatori (lavatrice, stufette, televisore e lampadine) è superiore alla potenza massima erogabile, il circuito si stacca.

Svolgimento La potenza massima erogabile è

$$P_{max} = \Delta V \cdot I_{max} = 3300\,W$$

La potenza dei vari utilizzatori, escluse le lampadine, è

$$P = P_{lav} + P_t + 2 * P_s = 1500\,W + 200\,W + 1400\,W = 3100\,W$$

La potenza disponibile per le lampadine, ed il numero di lampadine che posso accendere sono quindi

$$P_{disp} = P_{max} - P = 200\,W$$

$$n = \frac{P_{disp}}{P_l} = 6,67$$

Questo significa che posso accendere $n = 6$ lampadine e non sette.

Problema di: Elettrotecnica - $V0013$

Testo *[V0013]* [2 4 4a]
Una lampadina di resistenza $R_1 = 48\,\Omega$ è montata in serie con una seconda resistenza R_2. Il circuito è alimentato con una batteria $\Delta V = 12\,Volt$. Quanto deve valere R_2 affinché la potenza dissipata dalla lampadina sia $P_1 = 2\,W$?

Spiegazione Il circuito elettrico è formato da due resistenze in serie alimentate da una batteria. Per risolvere il problema semplicemente si utilizzano in sequenza le equazioni che descrivono i circuiti.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la corrente elettrica che vogliamo far passare attraverso la lampadina visto che conosciamo la potenza che vogliamo sia assorbita da tale lampadina possiamo utilizzare la formula per l'effetto Joule.

$$P = Ri^2 \Leftarrow i = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{2\,W}{48\,\Omega}} = 0,204\,A$$

La differenza di potenziale agli estremi della lampadina è quindi

$$\Delta V_1 = R_1 \cdot i = 48\,\Omega \cdot 0,2037\,A = 9,7803\,V$$

La differenza di potenziale agli estremi della resistenza R_2 sarà quindi

$$\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = 2,2197\,V$$

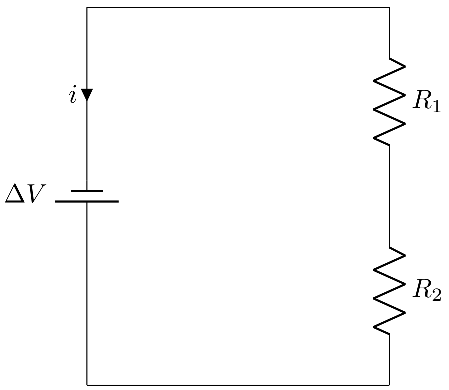
Possiamo adesso calcolare la resistenza R_2

$$R_2 = \frac{\Delta V_2}{i} = \frac{2,2197\,V}{0,2037\,A} = 10,90\,\Omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0014$

Testo *[V0014]* [2 ⭐ 4 ⌛ 4a 📖]
Una lampadina (dati tecnici: $24\,V$; $6\,W$) è collegata ad una batteria con dei cavi elettrici di rame di resistività $\rho = 0,17 \cdot 10^{-7}\,\Omega m$ e di sezione $S = 0,1\,mm^2$. Il circuito è alimentato con una batteria $\Delta V = 24\,Volt$. Quanto deve essere lungo il filo affinché la potenza dissipata dalla lampadina sia $P = 5\,W$?

Spiegazione Il circuito elettrico è formato da due resistenze in serie alimentate da una batteria. Per risolvere il problema semplicemente si utilizzano in sequenza le equazioni che descrivono i circuiti. Indichiamo con R_1 la lampadina e con R_2 la resistenza del filo.



Svolgimento Cominciamo con il determinare la resistenza della lampadina a partire dai dati tecnici del costruttore. Attenzione che questi valori non sono quelli effettivamente presenti nel circuito.

$$R_1 = \frac{\Delta V_1^2}{P_1} = \frac{(24\,V)^2}{6\,W} = 96\,\Omega$$

Determiniamo ora la corrente elettrica che vogliamo far passare attraverso la lampadina, visto che conosciamo la potenza che vogliamo sia assorbita da tale lampadina.

$$i = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{5\,W}{96\,\Omega}} = 0,228\,A$$

La differenza di potenziale agli estremi della lampadina è quindi

$$\Delta V_1 = R_1 \cdot i = 96\,\Omega \cdot 0,228\,A = 21,9\,V$$

La differenza di potenziale agli estremi della resistenza R_2 sarà quindi

$$\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = 2,1\,V$$

Possiamo adesso calcolare la resistenza R_2

$$R_2 = \frac{\Delta V_2}{i} = \frac{2,1\,V}{0,23\,A} = 9,1\,\Omega$$

Utilizzando la seconda legge di Ohm troviamo infine la lunghezza del filo

$$l = \frac{R_2 \cdot S}{\rho} = \frac{9,1\,\Omega \cdot 10^{-7}\,m^2}{0,17 \cdot 10^{-7}\,\Omega m} = 53,7\,m$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0015$

Testo *[V0015]* [1 3 4a]
Due lampadine identiche $R = 120\,\Omega$ sono alimentate da un generatore di tensione $\Delta V = 12\,V$. Calcola la corrente che le attraversa nel caso siano montate in serie e nel caso siano montate in parallelo. In quale caso le lampadine risulteranno più luminose?

Spiegazione In questo esercizio dobbiamo semplicemente calcolare la corrente che passa in due differenti circuiti e vedere in quale dei due le lampadine sono attraversate da una maggiore corrente. Per risolvere l'esercizio servirà unicamente la prima legge di Ohm e le regole per le resistenze in serie ed in parallelo.

Svolgimento

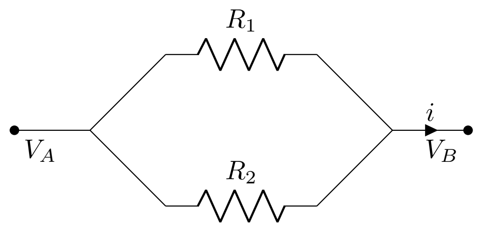
Resistenze in serie La corrente che esce dal generatore attraversa tutta la prima resistenza e successivamente la seconda resistenza. Chiamando i_1 la corrente per la prima resistenza e i_2 la corrente per la seconda resistenza avremo:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 = 2R = 240\,\Omega$$

$$i_{tot} = i_1 = i_2 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 0,05\,A = 50\,mA$$

Resistenze in parallelo La corrente che esce dal generatore si divide metà sulla prima resistenza e metà sulla seconda resistenza. Ogni resistenza ha ai suoi estremi la stessa differenza di potenziale ΔV. Chiamando i_1 la corrente per la prima resistenza e i_2 la corrente per la seconda resistenza avremo:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R} = 0,1\,A = 100\,mA$$

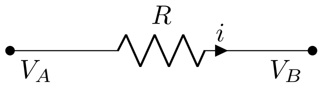


Conclusioni Montando le due lampadine in parallelo esse sono attraversate da una maggiore corrente e quindi si illuminano di più.

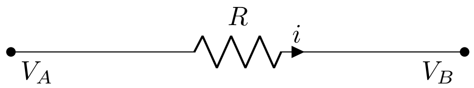
Problema di: Elettrotecnica - $V0016$

Testo *[V0016]* [1 3 4a]

Nel ramo di circuito in figura, viene montata una lampadina di resistenza $R = 6\,\Omega$; le tensioni sui due morsetti sono $V_A = 28\,V$ e $V_B = 4\,V$. Il costo dell'energia è $C = 0,18\,\frac{€}{kWh}$. Quanto spendo per tenere la lampadina accesa un tempo $\Delta t = 4\,h$? Quanta carica elettrica ha attraversato la resistenza in questo intervallo di tempo?



Spiegazione In questo ramo di circuito dobbiamo calcolarci la corrente che attraversa la resistenza, quindi la potenza dissipata dalla resistenza, quindi l'energia dissipata nel tempo indicato, quindi il costo di tale energia. Avendo il valore della corrente e del tempo possiamo sapere quanta carica ha attraversato la resistenza.



Svolgimento La corrente e la carica che attraversano la resistenza sono

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{24\,V}{6\,\Omega} = 4\,A$$

$$\Delta Q = i \cdot \Delta t = 4\,A \cdot 4\,h = 16\,Ah = 57600\,As = 57600\,C$$

La potenza dissipata, l'energia consumata ed il suo costo D sono

$$P = R \cdot i^2 = 6\,\Omega \cdot 16\,A^2 = 96\,W$$

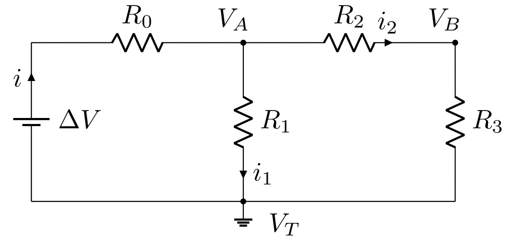
$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 96\,W \cdot 4\,h = 384\,Wh = 0,384\,kWh$$

$$D = \Delta E \cdot C = 0,384\,kWh \cdot 0,18\,\frac{€}{kWh} = 0,06912\,€$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0017$

Testo *[V0017]* [2 6 4a]

Nel circuito in figura $R_0 = 4\,k\Omega$, $R_1 = 3\,k\Omega$, $R_2 = 4\,k\Omega$, $R_3 = 2\,k\Omega$, $\Delta V = 12\,V$, $V_T = 0\,V$. Calcola la resistenza totale R_{tot}, la corrente i in uscita dal generatore, il valore di tensione V_A nel punto A. Verificato che $V_A = 4\,V$, calcola poi le correnti i_1 e i_2 nei due rami senza il generatore, e il valore di tensione V_B nel punto B.



Spiegazione In questo circuito abbiamo solo un generatore di tensione continua ed una serie di resistenze. Le uniche formule di cui abbiamo quindi bisogno sono la prima legge di Ohm e le formule per sommare le resistenze in serie ed in parallelo. In questi circuiti si parte sempre con il determinare la resistenza totale del circuito e la corrente in uscita dal generatore. Successivamente si deve ragionare per trovare i valori di potenziale in ogni punto e le correnti in tutti i vari rami.

Svolgimento La resistenza nel secondo ramo è $R_{23} = R_2 + R_3 = 6\,k\Omega$

R_{23} è in parallelo con R_1 e quindi la resistenza equivalente sarà:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{2\,k\Omega}$$

$$R_{123} = 2\,k\Omega$$

I due rami tra loro in parallelo, sono in serie con la resistenza R_0

$$R_{tot} = R_0 + R_{123} = 6\,k\Omega$$

La corrente in uscita dalla batteria sarà quindi

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 2\,mA$$

Il valore del potenziale nel punto A sarà

$$V_A = V_T + \Delta V - R_0 i = 0\,V + 12\,V - 4\,k\Omega \cdot 2\,mA = 4\,V$$

La corrente che passa nel primo ramo sarà

$$i_1 = \frac{\Delta V_{AT}}{R_1} = \frac{4}{3}\,A$$

La corrente che passa nel secondo ramo sarà

$$i_2 = \frac{\Delta V_{AT}}{R_{23}} = \frac{2}{3}\,A$$

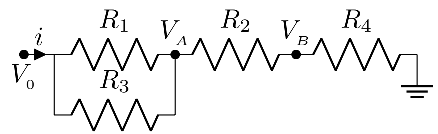
Il potenziale nel punto B sarà

$$V_B = V_A - R_2 \cdot i_2 = 4\,V - 4\,k\Omega \cdot \frac{2}{3}\,A = \frac{4}{3}\,V$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0025$

Testo *[V0025]* [2 6 4a]

Un ramo di un circuito è formato come in figura; in esso sono presenti le resistenze $R_1 = R_3 = 6\,k\Omega$, $R_2 = 3\,k\Omega$ e $R_4 = 4\,k\Omega$. Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 24\,V$ e l'altra connessa alla terra. Trovare il valore delle tensioni V_A e V_B e la potenza dissipata dal circuito.

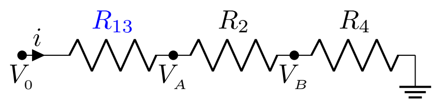


Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

Svolgimento Applicando le leggi di Ohm possiamo calcolare la resistenza equivalente delle due resistenze tra loro in parallelo.

$$\frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \qquad \Rightarrow \qquad R_{13} = 3\,k\Omega$$

Il circuito equivalente è mostrato in figura. La resistenza totale sarà la serie delle resistenze del circuito equivalente.



$$R_{tot} = R_{13} + R_2 + R_4 = 10\,k\Omega$$

Teniamo presente che la terra ha per definizione $V_T = 0$, quindi

$$i = \frac{V_0 - V_T}{R_{tot}} = \frac{24\,V}{10\,k\Omega} = 2,4\,mA$$

$$V_A = V_0 - R_{13} \cdot i = 16,8\,Volt$$

$$V_B = V_A - R_2 i = 9,6\,Volt$$

La potenza dissipata dal circuito nel suo complesso sarà

$$P = R_{tot} i^2$$

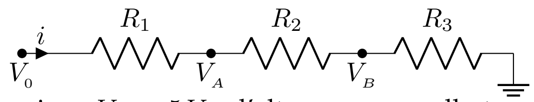
che sarà necessariamente uguale alla potenza erogata dal generatore

$$P = \Delta V \cdot i = (24\,V - 0\,V) \cdot 2,4\,mA = 57,6\,mW$$

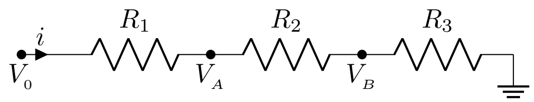
Problema di: Elettrotecnica - $V0026$

Testo *[V0026]* [2 7 4a]

Un partitore di tensione è formato da un ramo di tre resistenze $R_1 = 10\,k\Omega$, R_2 ed R_3. Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 5\,V$ e l'altra connessa alla terra. Trovare il valore delle resistenze incognite in modo che $V_A = 3\,V$ e $V_B = 1\,V$.



Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.



Svolgimento Cominciamo con il calcolare la corrente nel ramo utilizzando la prima resistenza

$$i = \frac{V_0 - V_A}{R_1} = 0,1\,mA$$

quindi

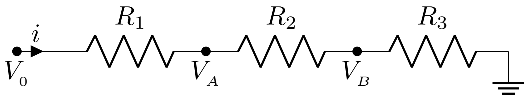
$$R_2 = \frac{V_A - V_B}{i} = 10\,k\omega$$

$$R_3 = \frac{V_B - V_T}{i} = 5\,k\omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0027$

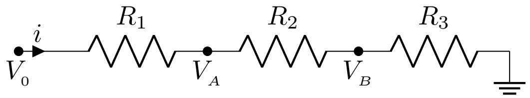
Testo *[V0027]* [2 4 4a]

Un partitore di tensione è formato da un ramo di tre resistenze $R_1 = R_3 = 10\,k\Omega$, ed $R_2 = 5\,k\Omega$.



Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 5\,V$ e l'altra connessa alla terra. Trovare il valore delle tensioni V_A e V_B.

Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.



Svolgimento Applicando le leggi di Ohm possiamo scrivere

$$i = \frac{V_0 - V_T}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{5}\,mA$$

Teniamo presente che la terra ha per definizione $V_T = 0$

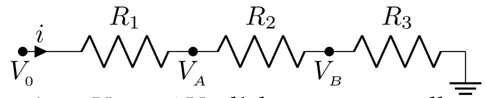
$$V_A = V_0 - R_1 \cdot i = 3\,Volt$$

$$V_B = V_0 - (R_1 + R_2)\,i = 2\,Volt$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0028$

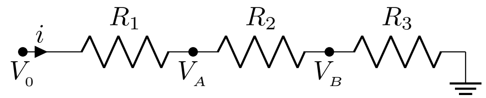
Testo *[V0028]* [3 6 4a]

Un partitore di tensione è formato da un ramo di tre resistenze $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$ ed R_3. Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 24\,V$ e l'altra connessa alla terra. Trovare il valore della resistenza R_3 in modo tale che la potenza da essa dissipata sia $P_3 = 12\,W$.



Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

Svolgimento Applicando le leggi di Ohm, tenendo presente che la terra ha per definizione $V_T = 0$, possiamo scrivere



$$i = \frac{V_0 - V_T}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$i = \frac{V_0}{R_1 + R_2 + R_3}$$

La potenza dissipata dalla resistenza R_3 è

$$P_3 = R_3 \cdot i^2 = \frac{V_0^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$$

$$P_3\,(R_1 + R_2 + R_3)^2 = V_0^2 R_3$$

Sapendo che $R_1 + R_2 = 12\,k\Omega$, inserendo i valori del testo, e trascurando le unità di misura essendoci messi nelle misure standard del sistema internazionale, avremo

$$12\,(12 + R_3)^2 = 576 R_3$$

$$(12 + R_3)^2 = 48R_3$$

$$R_3^2 - 24\,R_3 + 144 = 0$$

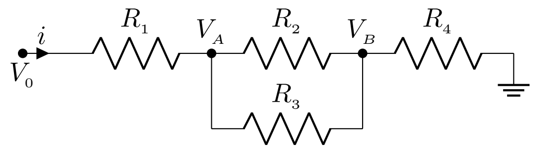
$$(R_3 - 12)^2 = 0$$

$$R_3 = 12\,\Omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0029$

Testo *[V0029]* [2 4 4a]

Il ramo di circuito mostrato in figura è formato da quattro resistenze: $R_1 = 6\,k\Omega$, $R_2 = 3\,k\Omega$, $R_3 = 6\,k\Omega$ e $R_4 = 4\,k\Omega$. Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 24\,V$ e l'altra connessa alla terra. Trovare il valore delle tensioni V_A e V_B.



Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

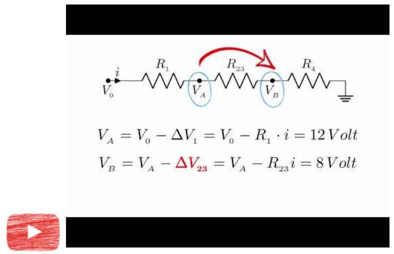
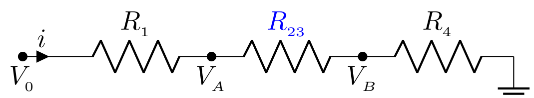


Fig. 6.7: *Guarda il video youtu.be/N3O3LE1VgKE*

Svolgimento Applicando le leggi di Ohm possiamo calcolare la resistenza equivalente delle due resistenze tra loro in parallelo.

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3\,k\Omega} + \frac{1}{6\,k\Omega} = \frac{1}{2\,k\Omega} \qquad \Rightarrow \qquad R_{23} = 2\,k\Omega$$

In figura è rappresentato il circuito equivalente. La resistenza totale sarà la serie delle resistenze del circuito equivalente



$$R_{tot} = R_1 + R_{23} + R_4 = 12\,k\Omega$$

Teniamo presente che la terra ha per definizione $V_T = 0$, quindi

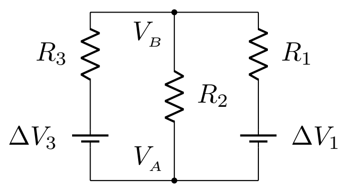
$$i = \frac{V_0 - V_T}{R_{tot}} = \frac{24\,V}{12\,k\Omega} = 2\,mA$$

$$V_A = V_0 - \Delta V_1 = V_0 - R_1 \cdot i = 12\,Volt$$

$$V_B = V_A - \Delta V_{23} = V_A - R_{23} i = 8\,Volt$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0030$

Testo *[V0030]* [2 6 4a]



Nel circuito in figura, le resistenze indicate hanno valore $R_1 = 6\,k\Omega$, $R_2 = 3\,k\Omega$ ed $R_3 = 6\,k\Omega$. Il circuito è alimentato da due generatori $\Delta V_1 = 24\,V$ e $\Delta V_3 = 12\,V$. Trovare il valore delle correnti i_1, i_2 e i_3 nei tre rami.

Spiegazione In questo circuito sono presenti due generatori, quindi è necessario utilizzare le leggi di Kirchhoff.

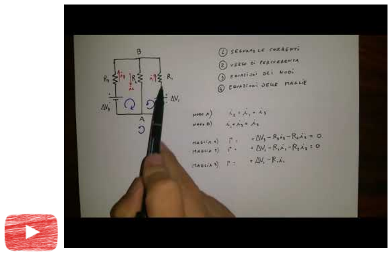
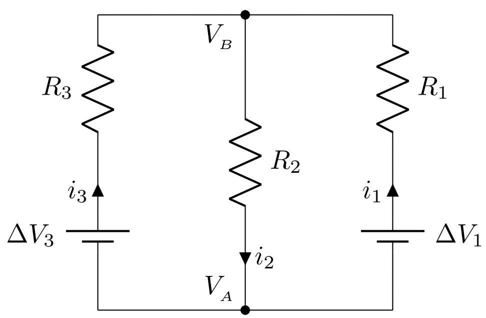


Fig. 6.8: *Guarda il video youtu.be/iEVRLR-SEmg*

Svolgimento Cominciamo con l'indicare sul circuito i versi delle correnti. Tali versi possono essere indicati a caso; qualora venissero indicati in modo errato, i valori calcolati risulteranno negativi.



A questo punto, se consideriamo il nodo A avremo l'equazione del nodo

$$i_2 = i_1 + i_3$$

Consideriamo adesso due maglie presenti nel circuito, per esempio quella costituite dai rami 1 e 2 percorsa in senso antiorario, e dai rami 2 e 3, percorsa in senso orario. Avremo le due equazioni:

$$\Delta V_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0$$

$$\Delta V_3 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$

Avremo quindi un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} i_2 = i_1 + i_3 \\ \Delta V_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \\ \Delta V_3 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 \end{cases}$$

Con le resistenze espresse in $k\Omega$ e le correnti di conseguenza espresse in mA il sistema per il nostro esercizio diventa

$$\begin{cases} i_2 = i_1 + i_3 \\ 24 - 6i_1 - 3i_2 = 0 \\ 12 - 3i_2 - 6i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_3 = i_2 \\ 24 - 6i_1 - 3i_1 - 3i_3 = 0 \\ 12 - 3i_1 - 3i_3 - 6i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_3 = i_2 \\ 8 - 3i_1 - i_3 = 0 \\ 4 - i_1 - 3i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_3 = i_2 \\ 8 - 3i_1 = i_3 \\ 4 - i_1 - 24 + 9i_1 = 0 \end{cases}$$

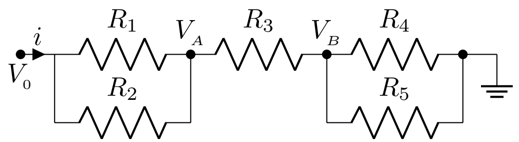
$$\begin{cases} i_2 = 3 \\ i_3 = 0,5 \\ i_1 = 2,5 \end{cases}$$

Quindi $i_1 = 2,5\,mA$, $i_2 = 3\,mA$, $i_3 = 0,5\,mA$. La positività della corrente indica che in realtà essa scorre nel circuito nello stesso verso di quanto da noi arbitrariamente indicato nel disegno del circuito.

Problema di: Elettrotecnica - $V0031$

Testo [V0031] [2 4 4a]

Un ramo di un circuito è formato come in figura, con tutte le resistenze pari a $R_x = 6\,k\Omega$. Un'estremità del ramo è alimentata da una tensione $V_0 = 12\,V$ e l'altra connessa a terra. Trovare il valore delle tensioni V_A e V_B.



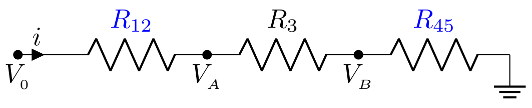
Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

Svolgimento Applicando le leggi di Ohm possiamo calcolare la resistenza equivalente delle due coppie di resistenze tra loro in parallelo.

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad R_{12} = 3\,k\Omega$$

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \qquad \Rightarrow \qquad R_{45} = 3\,k\Omega$$

In figura è rappresentato il circuito equivalente. La resistenza totale sarà la serie delle resistenze del circuito equivalente



$$R_{tot} = R_{12} + R_3 + R_{45} = 12\,k\Omega$$

Teniamo presente che la terra ha per definizione $V_T = 0$, quindi

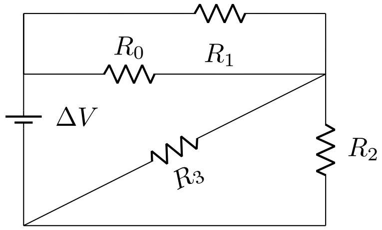
$$i = \frac{V_0 - V_T}{R_{tot}} = \frac{12\,V}{12\,k\Omega} = 1\,mA$$

$$V_A = V_0 - R_{12} \cdot i = 9\,Volt$$
$$V_B = V_A - R_3 i = 3\,Volt$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0032$

Testo [V0032] [2 4 4a]

Nel circuito rappresentato in figura, le resistenze indicate hanno valore $R_1 = 4\,k\Omega$, $R_2 = 2\,k\Omega$ ed $R_3 = 0,4\,k\Omega$. Il circuito è alimentato da un generatore di tensione costante $\Delta V = 320\,V$. Quanto deve valere R_0 affinché la resistenza R_3 dissipi una potenza $P = 16\,W$?



Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

Svolgimento La differenza di potenziale agli estremi di R_2 e la corrente i_2 valgono

$$\Delta V_3 = \sqrt{P \cdot R_3} = \sqrt{16\,W \cdot 400\,\Omega} = 80\,V$$
$$i_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3} = 200\,mA$$

Possiamo quindi calcolare la corrente i_2 che vale

$$i_2 = \frac{\Delta V_3}{R_2} = 40\,mA$$

La differenza di potenziale agli estremi della resistenza R_1, che chiameremo ΔV_1 è quindi data, applicando la legge delle maglie, da

$$-\Delta V_3 + \Delta V - \Delta V_1 = 0$$
$$\Delta V_1 = 240\,V$$

La corrente i_1 è quindi

$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = 60\,mA$$

Per la legge dei nodi avremo

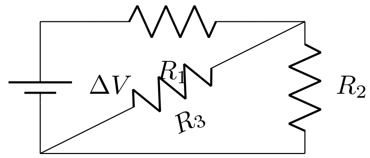
$$i_0 = i_2 - i_1 + i_3 = 40\,mA - 60\,mA + 200\,mA = 180\,mA$$

Per cui R_0 vale

$$R_0 = \frac{\Delta V_0}{i_0} = \frac{4}{3}\,k\Omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0033$

Testo [V0033] [3 4 4a]



Nel circuito rappresentato in figura, le resistenze indicate hanno valore $R_1 = 2\,k\Omega$, $R_2 = 4\,k\Omega$. Il circuito è alimentato da un generatore di tensione costante $\Delta V = 240\,V$. Quanto deve valere R_3 affinché la resistenza R_2 dissipi una potenza $P = 1,6\,W$?

Spiegazione Un circuito elettrico in cui sono presenti solo resistenze ed un generatore. Si risolve utilizzando le leggi di Ohm.

Svolgimento La differenza di potenziale agli estremi di R_2 e la corrente i_2 valgono

$$\Delta V_2 = \sqrt{P \cdot R_2} = \sqrt{1,6\,W \cdot 4000\,\Omega} = 80\,V$$

$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = 20\,mA$$

Applicando la legge delle maglie, calcoliamo la differenza di potenziale agli estremi della resistenza R_1 e quindi la corrente i_1

$$-\Delta V_2 + \Delta V - \Delta V_1 = 0$$
$$\Delta V_1 = 160\,V$$

$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = 80\,mA$$

Per la legge dei nodi avremo

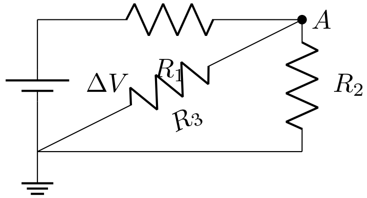
$$i_3 = i_1 - i_2 = 80\,mA - 20\,mA = 60\,mA$$

Per cui, considerato che R_3 e R_2 sono in parallelo, avremo

$$R_3 = \frac{\Delta V_2}{i_3} = \frac{4}{3}\,k\Omega$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0034$

Testo *[V0034]* [2 4 4a]



Nel circuito rappresentato in figura, le resistenze indicate hanno valore $R_1 = 2\,k\Omega$, $R_2 = 6\,k\Omega$, $R_3 = 6\,k\Omega$. Il circuito è alimentato da un generatore di tensione costante $\Delta V = 24\,V$. Determinare la resistenza totale del circuito, la corrente erogata dalla batteria, ed il valore del potenziale nel punto A.

Spiegazione In questo esercizio è necessario saper individuare l'esatto collegamento tra le resistenze ed applicare la prima legge di Ohm.

Svolgimento Le resistenze R_2 ed R_3 sono tra loro in parallelo, e la loro resistenza equivalente R_{23} è in serie con R_1. Avremo quindi

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \Rightarrow \qquad R_{23} = 3\,k\Omega$$

$$R_{tot} = R_1 + R_{23} = 5\,k\Omega$$

La corrente erogata dalla batteria è quindi

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 4,8\,A$$

La caduta di potenziale agli estremi della resistenza R_1 è

$$\Delta V_1 = R_1 i = 9,6\,V$$

Quindi

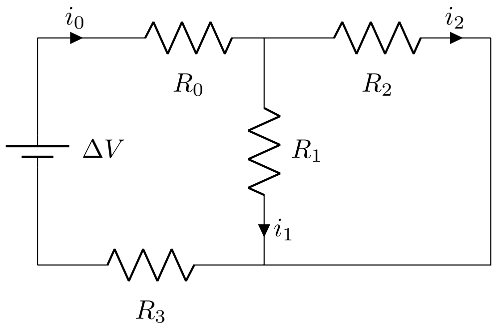
$$V_A = 0 + \Delta V - \Delta V_1 = 14,4\,V$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0035$

Testo *[V0035]* [2 4 4a]
Disegna un circuito con un generatore $\Delta V = 24\,V$ e quattro resistenze di valore $r = 24\,k\Omega$ poste in modo che la resistenza totale NON valga ne $6\,k\Omega$, ne $96\,k\Omega$. Calcola la resistenza totale, nonché la corrente e la potenza erogata dal generatore. Disegna poi un diverso circuito indicando, senza svolgere i calcoli, se ha resistenza complessiva maggiore o minore.

Spiegazione Quattro resistenze da $24\,k\Omega$ montate in serie danno una resistenza equivalente da $96\,k\Omega$, mentre se montate in parallelo danno una resistenza equivalente da $6\,k\Omega$. Le resistenze vanno quindi montate in modo differente.

Svolgimento In base alle indicazioni del testo dell'esercizio, possiamo montare le resistenze nel modo seguente.



In questo circuito le resistenza R_1 e R_2 sono in parallelo, dando una resistenza equivalente R_{12} che a sua volta è in serie con R_0 e R_3.

La resistenza complessiva del circuito vale

$$R_{tot} = R_0 + R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 60\,k\Omega$$

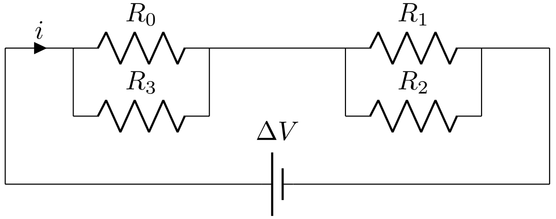
La corrente in uscita dal generatore è

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 0,4\,mA$$

La potenza erogata è

$$P = \Delta V \cdot i = 9,6\,mW$$

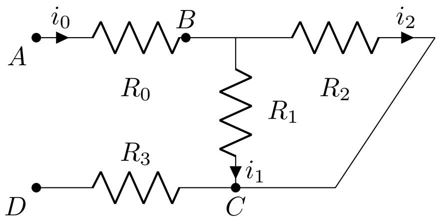
Per ridisegnare il circuito in modo da ottenere una resistenza complessiva minore è possibile montare le due resistenze R_1 e R_3 in parallelo tra loro e non in serie.



Problema di: Elettrotecnica - $V0036$

Testo *[V0036]* [2 6 4a]

Nel circuito mostrato in figura $R_0 = 4\,k\Omega$, $R_1 = 6\,k\Omega$, $R_2 = 3\,k\Omega$, $R_3 = 2\,k\Omega$, $V_A = 24\,V$, $V_C = 8\,V$. Calcola la resistenza totale R_{tot}, la corrente i_0 in uscita dal nodo A, il valore di tensione V_B nel punto B. Calcola poi le correnti i_1 e i_2.



Spiegazione In questo esercizio è necessario saper individuare l'esatto collegamento tra le resistenze ed applicare la prima legge di Ohm.

Svolgimento Nel circuito in figura le resistenze R_1 e R_2 sono in parallelo. La loro resistenza equivalente R_{12} è in serie con R_0 e con R_3. Quindi

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad R_{12} = 2\,k\Omega$$

$$R_{tot} = R_0 + R_{12} + R_3 = 8\,k\Omega$$

La corrente in uscita dal punto A è

$$i_0 = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = \frac{24\,V - 8\,V}{8\,k\Omega} = 2\,mA$$

La caduta di potenziale agli estremi della resistenza R_0 è

$$\Delta V_0 = R_0 i_0 = 8\,V$$

e quindi

$$V_B = V_A - \Delta V_0 = 16\,V$$

La caduta di potenziale agli estremi della resistenza R_3 è

$$\Delta V_3 = R_3 i_0 = 4\,V$$

e quindi il potenziale V_C vale

$$V_C = V_D + \Delta V_3 = 12\,V$$

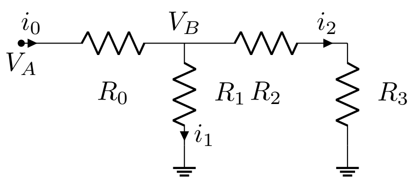
Le correnti i_1 e i_2 sono quindi

$$i_1 = \frac{V_B - V_C}{R_1} = \frac{4\,V}{6\,k\Omega} = \frac{2}{3}\,mA$$

$$i_2 = i_0 - i_1 = \frac{4}{3}\,mA$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0037$

Testo *[V0037]* [2 6 4a]
Nel circuito in figura sono presenti quattro resistenze di valore $R_0 = 4\,k\Omega$, $R_1 = 3\,k\Omega$, $R_2 = 4\,k\Omega$, $R_3 = 2\,k\Omega$, $V_A = 12\,V$. Calcola la resistenza totale R_{tot}, la corrente i_0 in uscita dal punto A, il valore di tensione V_B nel punto B. Calcola poi le correnti i_1, i_2.



Spiegazione In questo esercizio è necessario saper individuare l'esatto collegamento tra le resistenze ed applicare la prima legge di Ohm.

Svolgimento Le resistenze R_2 ed R_3 sono in serie. La resistenza equivalente R_{23} è in parallelo con R_1. La resistenza equivalente R_{123} è in serie con R_0. Quindi

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 6\,k\Omega$$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}} \qquad \Rightarrow \qquad R_{123} = 2\,k\Omega$$

$$R_{tot} = R_0 + R_{123} = 6\,k\Omega$$

La corrente in uscita dal punto A vale

$$i_0 = \frac{V_A - V_T}{R_{tot}} = 2\,mA$$

La caduta di potenziale ai capi della resistenza R_0 è

$$\Delta V_0 = R_0 i_0 = 8\,V$$

Quindi

$$V_B = V_A - \Delta V_0 = 4\,V$$

La corrente i_1 vale

$$i_1 = \frac{V_B - V_T}{R_1} = \frac{4}{3}\,mA$$

La corrente i_2 vale

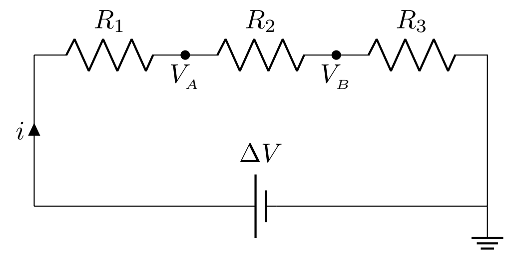
$$i_2 = \frac{V_B - V_T}{R_{23}} = \frac{2}{3}\,mA$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0038$

Testo *[V0038]* [2 4 4a]
Disegna un circuito con tre resistenze R_1, R_2, R_3 poste in serie ed un generatore ΔV. Assegna loro i valori che preferisci e determina il valore del potenziale nei due punti tra le resistenze.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Lo schema del circuito richiesto è mostrato in figura.



Scegliamo i valori $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_2 = 20\,k\Omega$; $R_3 = 30\,k\Omega$; $\Delta V = 240\,V$

Cominciamo con il calcolare la resistenza totale e la corrente nel circuito:

$$R_{tot} = 60\,k\Omega$$

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 4\,mA$$

Le cadute di potenziale agli estremi delle tre resistenze sono

$$\Delta V_1 = R_1 i = 40\,V$$

$$\Delta V_2 = R_2 i = 80\,V$$

$$\Delta V_3 = R_3 i = 120\,V$$

e di conseguenza i potenziali nei punti A e B valgono:

$$V_A = V_T + \Delta V - \Delta V_1 = 200\,V$$

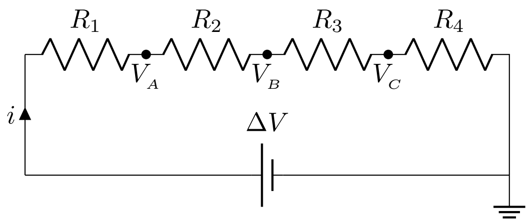
$$V_B = V_A - \Delta V_2 = 120\,V$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0039$

Testo *[V0039]* [2 4 4a]
Disegna un circuito con quattro resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 poste in sequenza in serie, ed un generatore ΔV. Assegna loro i valori che preferisci e determina il valore del potenziale nel punto tra le resistenze R_2 ed R_3.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Lo schema del circuito richiesto è mostrato in figura.



Scegliamo i valori $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_2 = 20\,k\Omega$; $R_3 = 30\,k\Omega$; $R_4 = 40\,k\Omega$; $\Delta V = 200\,V$

Cominciamo con il calcolare la resistenza totale e la corrente nel circuito:

$$R_{tot} = 100\,k\Omega \qquad\qquad i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 2\,mA$$

Le cadute di potenziale agli estremi delle tre resistenze sono

$$\Delta V_1 = R_1 i = 20\,V \qquad \Delta V_2 = R_2 i = 40\,V$$
$$\Delta V_3 = R_3 i = 60\,V \qquad \Delta V_4 = R_4 i = 80\,V$$

e di conseguenza i potenziali nei punti A, B e C valgono:

$$V_A = V_T + \Delta V - \Delta V_1 = 180\,V$$

$$V_B = V_A - \Delta V_2 = 140\,V$$

$$V_C = V_B - \Delta V_3 = 80\,V$$

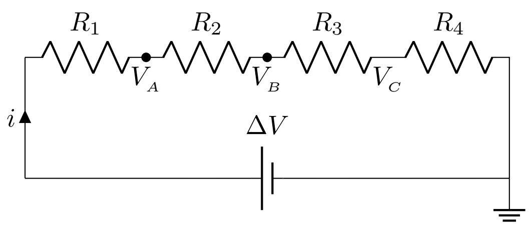
Il valore di V_B è la risposta alla domanda del problema.

Problema di: Elettrotecnica - $V0039a$

Testo *[V0039a]* [2 4 4a]
Disegna un circuito con quattro resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 poste in sequenza in serie, ed un generatore ΔV. Assegna loro i valori che preferisci e determina il valore del potenziale nel punto tra le resistenze R_3 ed R_4.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Lo schema del circuito richiesto è mostrato in figura.



Scegliamo i valori $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_2 = 20\,k\Omega$; $R_3 = 30\,k\Omega$; $R_4 = 40\,k\Omega$; $\Delta V = 200\,V$

Cominciamo con il calcolare la resistenza totale e la corrente nel circuito:

$$R_{tot} = 100\,k\Omega \qquad i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 2\,mA$$

Le cadute di potenziale agli estremi delle tre resistenze sono

$$\Delta V_1 = R_1 i = 20\,V \qquad \Delta V_2 = R_2 i = 40\,V$$
$$\Delta V_3 = R_3 i = 60\,V \qquad \Delta V_4 = R_4 i = 80\,V$$

e di conseguenza i potenziali nei punti A, B e C valgono:

$$V_A = V_T + \Delta V - \Delta V_1 = 180\,V$$
$$V_B = V_A - \Delta V_2 = 140\,V$$
$$V_C = V_B - \Delta V_3 = 80\,V$$

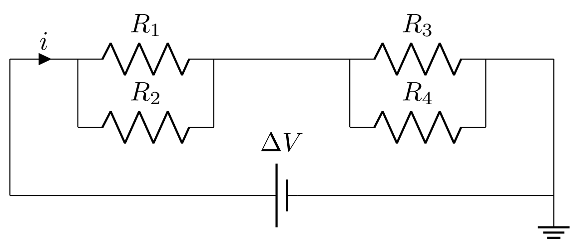
Il valore di V_C è la risposta alla domanda del problema.

Problema di: Elettrotecnica - $V0039b$

Testo *[V0039b]* [2 5 4a]
Disegna un circuito con un generatore ΔV e due gruppi di resistenze R_{12} e R_{34} in serie, formati rispettivamente dal parallelo tra R_1 ed R_2, e dal parallelo tra R_3 ed R_4. Assegna loro i valori che preferisci e determina il valore del potenziale nel punto tra i gruppi di resistenze R_{12} ed R_{34}.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Il circuito del problema è



Scegliamo i valori $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_2 = 20\,k\Omega$; $R_3 = 30\,k\Omega$; $R_4 = 40\,k\Omega$; $\Delta V = 200\,V$
Cominciamo con il calcolare la resistenza totale e la corrente nel circuito:

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{20}{3}\,k\Omega$$

$$R_{34} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{120}{7}\,k\Omega$$

$$R_{tot} = R_{12} + R_{34} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{500}{21}\,k\Omega$$

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = 8,4\,mA$$

La differenza di potenziale agli estremi di R_{12} è

$$\Delta V_{12} = R_{12} i = 56\,V$$

Quindi il potenziale nel punto tra i due gruppi di resistenze è

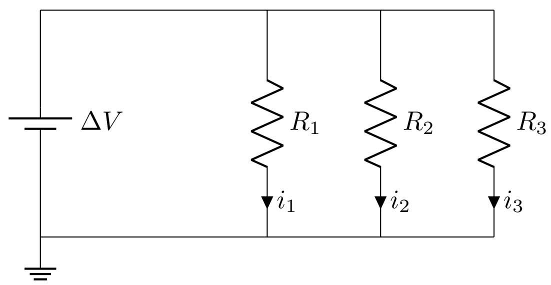
$$V_x = V_{terra} + \Delta V - \Delta V_{12} = 144\,V$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0040$

Testo *[V0040]* [2 2 4a]
Disegna un circuito con un generatore e tre resistenze poste in parallelo. Assegna dei valori alle resistenze ed al generatore e calcola la potenza erogata dal generatore.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in parallelo e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Il circuito richiesto è il seguente:



I valori dei vari componenti possono essere: $\Delta V = 12\,V$, $R_1 = R_2 = R_3 = 360\,\Omega$
La resistenza complessiva è

$$R_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 120\,\Omega$$

La potenza erogata, uguale a quella dissipata è

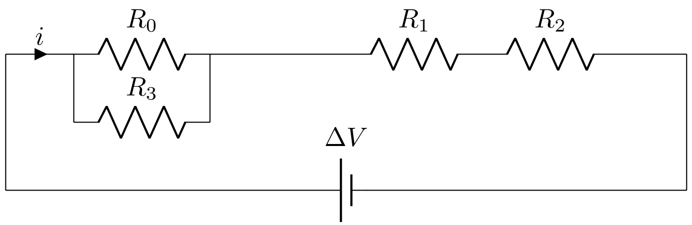
$$P = \frac{\Delta V^2}{R_{tot}} = 1,2\,W$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0041$

Testo *[V0041]* [2 3 4a]
Disegna un circuito con un generatore e quattro resistenze in modo che ci siano sia resistenze in serie che in parallelo. Assegna dei valori alle resistenze ed al generatore. Calcola la corrente e la potenza erogati dal generatore.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Il circuito richiesto può essere



I valori assegnati agli elementi del circuito possono essere: $\Delta V = 24\,V$, $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 6\,k\Omega$

La resistenza complessiva è

$$R_{tot} = R_{03} + R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3}} + R_1 + R_2 = 18\,k\Omega$$

La corrente emessa dal generatore è

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = \frac{4}{3}\,mA$$

La potenza erogata, uguale a quella dissipata, è data da

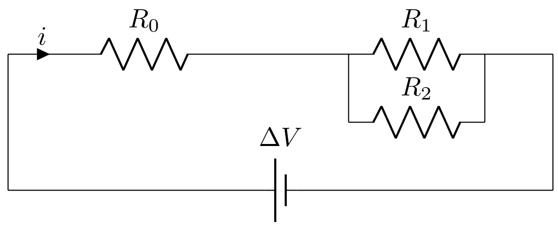
$$P = \frac{\Delta V^2}{R_{tot}} = \frac{576}{18}\,mW = 32\,mW$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0041a$

Testo *[V0041a]* [2 3 4a]
Disegna un circuito con un generatore e tre resistenze in modo che ci siano sia resistenze in serie che in parallelo. Assegna dei valori alle resistenze ed al generatore. Calcola la corrente e la potenza erogati dal generatore.

Spiegazione Per svolgere questo esercizio è necessario conoscere il concetto di resistenze in serie e saper applicare le leggi di Ohm.

Svolgimento Il circuito richiesto può essere



I valori assegnati agli elementi del circuito possono essere: $\Delta V = 24\,V$, $R_0 = R_1 = R_2 = 6\,k\Omega$

La resistenza complessiva è

$$R_{tot} = R_0 + R_{12} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 9\,k\Omega$$

La corrente emessa dal generatore è

$$i = \frac{\Delta V}{R_{tot}} = \frac{8}{3}\,mA$$

La potenza erogata, uguale a quella dissipata, è data da

$$P = \frac{\Delta V^2}{R_{tot}} = \frac{576}{9}\,mW = 64\,mW$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0042$

Testo *[V0042]* [2 2 5a]
Ipotizzando che attraverso la sezione di un conduttore fluisca una carica $q(t)$ in funzione del tempo, data dall'equazione

$$q(t) = ate^{-bt}$$

con a e b costanti positive. Quali sono le unità di misura delle due costanti? Scrivi l'andamento nel tempo della corrente che attraversa il conduttore e la quantità complessiva di carica che lo attraversa in un intervallo di tempo da $t_i = 0\,s$ a $t_f = 5\,s$.

Spiegazione In questo esercizio è sufficiente conoscere la definizione di corrente elettrica.

Svolgimento b è necessariamente l'inverso di un tempo in quanto ad esponende bisogna avere un numero puro.

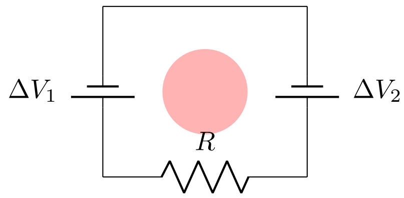
a è quindi $\frac{C}{t}$ affinché l'analisi dimensionale mostri da entrambe le parti dell'uguale la stessa grandezza fisica.

la corrente è per definizione la derivata della carica nel tempo, quindi

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = ae^{-bt} + abt^2e^{-bt} = a\left(1 + bt^2\right)e^{-bt}$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0043$

Testo *[V0043]* [2 2 5a]



Il circuito in figura è realizzato con una resistenza $R = 5 \cdot 10^3\,\Omega$ e, posti in serie ad essa, due generatori reali con resistenza interna $r_1 = r_2 = 10^4\,\Omega$. Internamente al circuito è presente un campo magnetico variabile nel tempo. In un certo determinato istante, $\Delta V_1 = 0,1\,V$. Quanto valgono, nello stesso istante, la forza elettromotrice ΔV_2, la corrente nel circuito e la forza elettromotrice indotta?

Spiegazione In questo circuito sono presenti due generatori ed un campo magnetico variabile interno che produce una forza elettromotrice indotta

Svolgimento Conoscendo la resistenza interna dei generatori è possibile calcolare la corrente che li attraversa. La forza elettromotrice indicata è misurata infatti ai capi del generatore e quindi include la resistenza interna.

Quindi

$$i = \frac{\Delta V_1}{r_1} = \frac{0,1}{10^4}\,A = 10^{-5}\,A$$

La stessa corrente attraversa anche l'altro generatore e quindi anche l'altro generatore misura la stessa forza elettromotrice ma con segno opposto.

$$\Delta V_2 = -0,1\,V$$

Considerato che il primo generatore misura una differenza di potenziale positiva, allora la corrente circola in verso concorde con il primo generatore.

Applicando la circuitazione del campo elettrico possiamo scrivere

$$-\Delta V_1 + \Delta V_2 + Ri = E$$

$$i \cdot (r_1 + r_2 + R) = E$$

da cui

$$E = 2.5 \cdot 10^4\,\Omega \cdot 10^{-5}\,A = 0,25\,V$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0044$

Testo *[V0044]* [3 4 5a]
Un condensatore è costituito da due armature piane e parallele di forma quadrata separate da aria, di lato $l = 5,0\,cm$, distanti $1\,mm$ all'istante $t = 0$, che si stanno allontanando tra loro di un decimo di millimetro al secondo. La differenza di potenziale tra le armature è $1,0 \cdot 10^3\,V$. Calcolare la corrente di spostamento che attraversa il condensatore nell'istante t=0, illustrando il procedimento seguito. *[Simulazione di maturità scientifica: fisica - quesito n°2 - 25 gennaio 2016]*

Spiegazione All'allontanarsi delle piastre cambia la capacità del condensatore e quindi cambia la quantità di carica su di esso presente. Questo implica un passaggio di corrente nel ramo di circuito del condensatore. Essa è pari alla corrente di spostamento all'interno del condensatore. Il problema può ovviamente essere anche svolto utilizzando la definizione di corrente di spostamento.

Svolgimento La carica elettrica presente sul condensatore è

$$Q = C\Delta V$$

e, trattandosi di un condensatore piano, avremo

$$Q = \epsilon\frac{l^2}{d}\Delta V$$

La distanza tra le piastre cambia nel tempo, quindi, tenendo conto che l'istante iniziale è $t_i = 0$, avremo

$$Q = \epsilon\frac{l^2}{d_i + U \cdot t}\Delta V$$

Derivando la carica elettrica rispetto al tempo otteniamo il modulo della corrente

$$i = \left|\frac{dQ}{dt}\right| = \frac{\epsilon l^2 \Delta V}{(d_i + U \cdot t)^2}U$$

che all'istante $t = 0$ vale

$$i = 2 \cdot 10^{-9}\,A$$

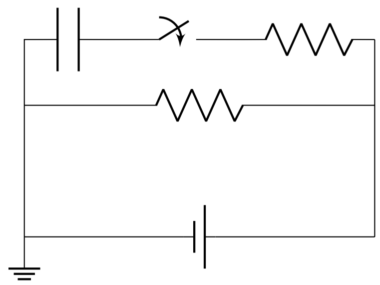
Volendo invece utilizzare la definizione della corrente di spostamento, avremo che il modulo della corrente vale

$$i = \left|\epsilon \frac{d\Phi(E(t))}{dt}\right| = \left|\epsilon l^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta V}{d_i + U \cdot t}\right)\right|$$

$$i = \epsilon l^2 \Delta V \frac{U}{(d_i + U \cdot t)^2} = 2 \cdot 10^{-9}\, A$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0045$

Testo *[V0045]* [3 3 4a]



Il circuito mostrato in figura è formato da un generatore con $\Delta V = 24\,V$, due resistenze $R = 1\,k\Omega$, un condensatore $C = 2\,mF$ ed un interruttore. Calcola la corrente emessa dal generatore con l'interruttore aperto. Descrivi qualitativamente cosa capita chiudendo l'interruttore, e calcola in questa seconda configurazione la carica elettrica nel condensatore.

Spiegazione Circuiti RC. In questo problema è sufficiente sapere come si comporta un condensatore senza necessariamente saperne descrivere matematicamente il comportamento.

Svolgimento Con l'interruttore aperto nel circuito circola una corrente

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

Con la chiusura dell'interruttore, all'istante $t = 0$, alla corrente iniziale si aggiunge la corrente che circola nel ramo del condensatore, la quale ca a caricare il condensatore. Inizialmente la corrente in quel ramo è

$$i_2(t = 0) = \frac{\Delta V}{R}$$

e quindi la corrente che eroga il generatore raddoppia nell'istante della chiusura

$$i_{tot}(t = 0) = 2i$$

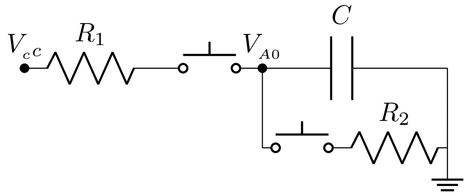
Dopo un tempo sufficientemente lungo il condensatore, oramai carico, mette nel ramo una differenza di potenziale pari ed opposta a quella del generatore, rendendo nulla la corrente

$$i_2(t \to \infty) = 0$$

Problema di: Elettrotecnica - $V0046$

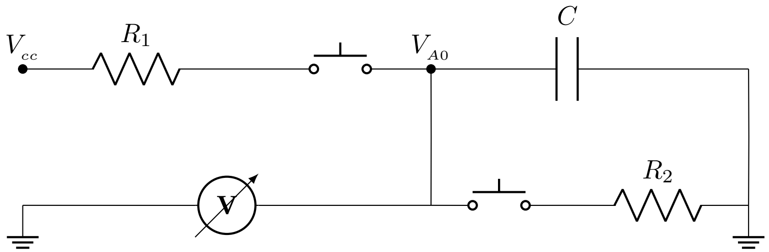
Testo *[V0046]* [3 2 5a]

Il circuito mostrato in figura permette la carica e la scarica del condensatore in funzione di quale pulsante viene premuto. Il potenziale che alimenta il circuito è $V_{CC} = 5\,V$; la prima resistenza vale $R_1 = 1\,k\Omega$; la seconda resistenza vale $R_2 = 2\,k\Omega$; il condensatore inizialmente scarico ha capacità $C = 2\,mF$. Calcola le costanti di tempo caratteristiche dei circuiti di carica e di scarica. Quale tensione si trova ai capi del condensatore se il circuito di carica è attivato per $\Delta t_1 = 2\,s$ e successivamente quello di scarica è attivato per un tempo $\Delta t_2 = 8\,s$?



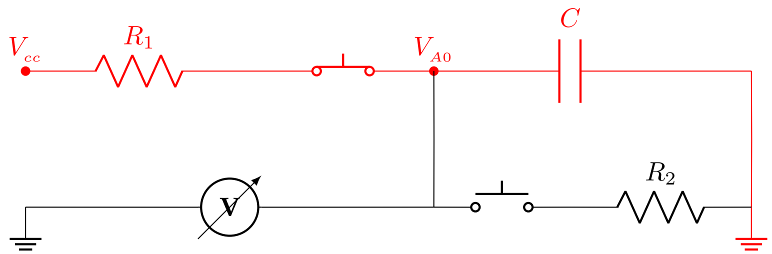
Spiegazione Circuiti RC. In questo problema è sufficiente sapere come si comporta un condensatore conoscendone la costante di tempo di carica e scarica e l'equazione temporale dei due fenomeni.

Svolgimento Qui di seguito è mostrato il circuito del problema con l'aggiunta dello schema elettrico relativo al misuratore di tensione per il punto $A0$

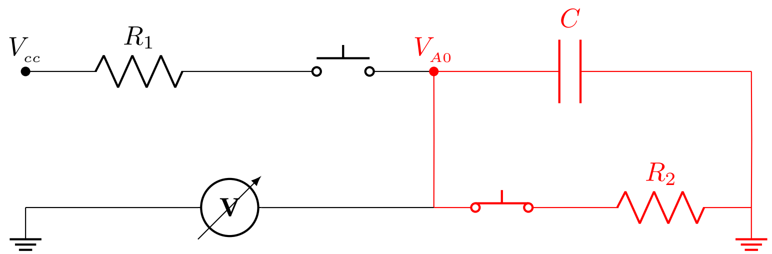


Come potete vedere uno degli estremi del condensatore è collegato alla terra, e quindi la differenza di potenziale agli estremi del condensatore coincide in questo caso con il valore del potenziale nel punto $A0$.

Nel processo di carica abbiamo il seguente circuito



Nel processo di scarica abbiamo il seguente circuito



La curva di carica, che in questo caso indica il potenziale nel punto $A0$ in funzione del tempo, è data da

$$V_{f1} = V_{cc}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_c}}\right)$$

In questo caso il termine $\tau_c = R_1 C = 2\,s$ è il tempo caratteristico del circuito di carica.

La curva di scarica, che anche in questo caso indica il potenziale nel punto $A0$ in funzione del tempo, è data da

$$V_{A0} = V_{i2} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_s}}$$

In questo caso il termine $\tau_s = R_2 C = 4\,s$ è il tempo caratteristico del circuito di scarica.

Il termine V_{i2} rappresenta la tensione iniziale con cui è caricato il condensatore all'inizio del processo di scarica.

Nel problema indicato il condensatore viene prima caricato e poi scaricato. La tensione alla fine della carica sarà

$$V_{f1} = V_{cc}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t_1}{R_1 C}}\right)$$

$$V_{f1} = V_{cc}\left(1 - e^{-1}\right)$$

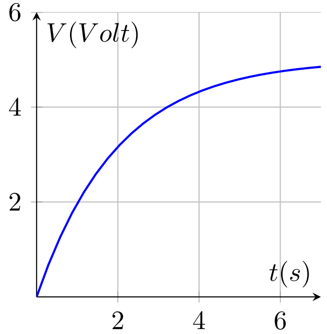
Per come si è svolto il processo di carica e scarica abbiamo che

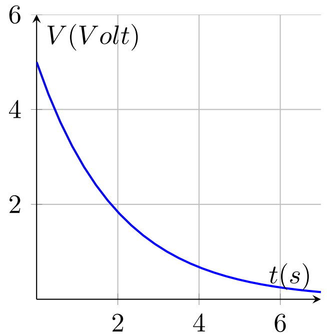
$$V_{f1} = V_{i2}$$

e quindi

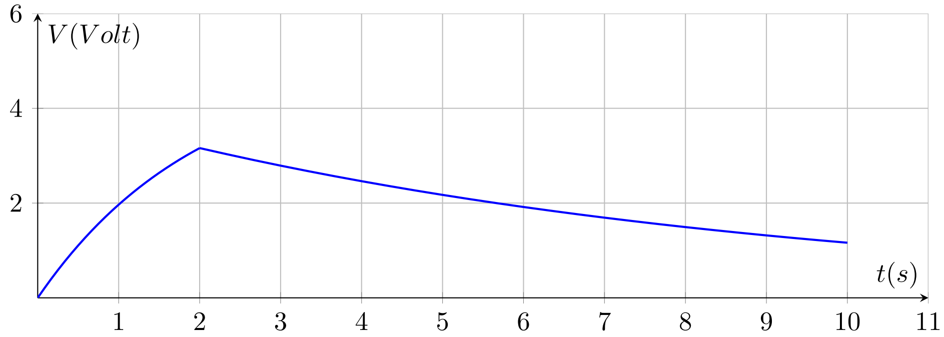
$$V_{f2} = V_{cc}\left(1 - e^{-1}\right)e^{-2} = 5\,V \cdot 0,08555 = 0,428\,V$$

In generale le curve di carica e scarica del condensatore, partendo da una situazione di scarica completa o di carica completa sono quelle rappresentate nei seguenti grafici, dove rappresento prima la curva di carica e poi quella di scarica, considerando costanti di tempo di $1\,s$.





In questo problema l'andamento del potenziale in $A0$ è come mostrato nel seguente grafico



Problema di: Elettrotecnica - Calorimetria - $VQ0001$

Testo *[VQ0001]* [2 ⭐ 2 ⌛ 4a 📖]
Un riscaldatore elettrico è fatto da resistenza $R = 10\,\Omega$ alimentata da una differenza di potenziale costante $\Delta V = 24\,Volt$. Se immersa in una massa $m = 2\,kg$ di acqua, in quanto tempo la scalda di $\Delta T = 20\,K$? *[Comincia con il calcolare quanta energia deve essere data all'acqua e a disegnare il circuito del riscaldatore.]*

Spiegazione La resistenza, per effetto joule, dissipa calore che, assorbito dall'acqua, la riscalda.

Svolgimento La quantità di calore necessaria a scaldare l'acqua è data da

$$\Delta Q = c_s \cdot m \cdot \Delta T$$

Considerato che tale calore proviene dalla resistenza a causa dell'effetto joule, allora

$$\Delta Q = P \cdot \Delta t \qquad\qquad P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

e quindi

$$P \cdot \Delta t = c_s \cdot m \cdot \Delta T$$
$$\frac{\Delta V^2}{R} \cdot \Delta t = c_s \cdot m \cdot \Delta T$$

Possiamo adesso ricavare la soluzione del problema

$$\Delta t = c_s \cdot m \cdot \Delta T \cdot \frac{R}{\Delta V^2}$$

$$\Delta t = 4186\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 2\,kg \cdot 20\,K \cdot \frac{10\,\Omega}{576\,Volt^2} = 2907\,s$$

Problema di: Elettrostatica - $OV0001$

Testo *[OV0001]* [2 ⭐ 3 ⌛ 4a 📖]
Una lampadina ad incandescenza è alimentata con una tensione $\Delta V = 220\,V$ ed è attraversata da una corrente $i = 500\,mA$. La potenza luminosa emessa dal filo di tungsteno surriscaldato è il 2% della potenza elettrica assorbita. Trascurando l'effetto dell'aria, ed ipotizzando che la lampadina sia puntiforme, determina l'intensità luminosa incidente a $d = 5\,m$ di distanza.

Spiegazione Qui semplicemente applichiamo in modo diretto formule di elettrotecnica e di grandezze fisiche ondulatorie

Svolgimento La potenza con la quale la lampadina viene alimentata è

$$P_0 = \Delta V \cdot i = 110\,W$$

Il testo dice che la potenza luminosa emessa è

$$P = 2\% \cdot P_0 = 2,2\,W$$

La lampadina emette onde luminose sferiche, quindi l'intensità dell'onda alla distanza indicata dal testo è

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = 0,007\,\frac{W}{m^2}$$

Domande di teoria: Relatività Ristretta - $R0001$

Testo *[R0001]* [2 10 5a]

1. Quali sono i due principi su cui si fonda la teoria della relatività ristretta e in che modo essi determinano tale teoria?
2. Sappiamo che con le trasformate di Lorentz la luce ha sempre la stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento. Mostra a partire dalle trasformate di Lorentz tale affermazione.
3. Oltre alla velocità della luce, quale grandezza fisica è invariante sotto l'azione delle trasformate di Lorentz? Approfondisci l'argomento illustrando struttura e significato di tale grandezza.
4. Ridefinendo la quantità di moto, si è arrivati a comprendere la vera natura della massa. Approfondisci tale natura mostrando in quale modo si arriva a tali conclusioni.
5. Cosa si intende per dilatazione dei tempi e contrazione delle distanze?

Spiegazione Utilizzate queste domande come traccia per il vostro studio. Per ogni domanda fornirò una risposta estremamente concisa ma esauriente nei concetti. Dal momento che in un'interrogazione, magari all'esame di maturità, le domande sono spunti per poter parlare in modo approfondito di un argomento, nelle mie risposte vi fornirò anche le indicazioni per gli approfondimenti.

Svolgimento

1. la teoria della relatività si basa sul principio di costanza della velocità della luce e sul principio di relatività ristretta. *[Enunciate i due principi.]* Per rispettare il principio di costanza della velocità della luce è necessario utilizzare le trasformate di Lorentz per passare da un sistema di riferimento ad un altro. *[Scrivete le trasformate.] [Potete raccontare come esse fossero già state scritte precedentemente ad Einstein ma che solo lui ebbe la capacità di comprenderne il reale significato.]* Accettate tali trasformate, le precedenti leggi fisiche non risultano più in accordo con il principio di relatività, in quanto non risultano invarianti sotto le trasformate di Lorentz. per renderle tali è necessario ridefinire la massa. *[Indicate il modo in cui la massa viene ridefinita.]* Detto questo, all'interno della teoria, la velocità della luce assume un significato molto profondo legato alla struttura dello spazio-tempo; essa è infatti la velocità della causalità, la massima velocità alla quale una informazione può viaggiare attraverso lo spazio. le trasformate di Lorentz di fatto preservano l'ordine degli eventi causalmente connessi.

2. Dalle trasformate di Lorentz è possibile ricavare la legge di composizione delle velocità. *[Scrivete le trasformate di Lorentz e ricavate la legge di composizione delle velocità; per semplicità fatelo solo nel caso unidimensionale.]* Utilizzando tale legge nel caso di due osservatori inerziali che osservano lo stesso raggio di luce, otteniamo sempre la stessa velocità. *[Disegnate i due osservatori ed il raggio di luce; fate i conti.]*

3. La distanza spaziotemporale tra due eventi

$$s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

è invariante sotto l'azione delle trasformate di Lorentz. Essa stabilisce se due eventi dello spaziotempo possano o meno essere connessi da un rapporto di causa ed effetto. *[Scrivete le trasformate di Lorentz e dimostrare che s^2 è invariante.] [Eseguite l'esperimento concettuale del treno colpito dai due fulmini.]*

4. La ridefinizione della massa ha comportato la ridefinizione di molte grandezze e leggi fisiche, prime tra tutte la quantità di moto ed i principi della dinamica. *[Indicate in che modo tali concetti siano stati ridefiniti.]* A questo punto, calcolandosi il lavoro di una forza su di una particella si ottiene la formulazione dell'energia cinetica della particella come

$$E_{cin} = E_{tot} - E_{riposo}$$

dove l'energia totale della particella in funzione della sua velocità è di fatto equivalente alla sua massa
$$m = \frac{E}{c^2}$$
La massa è quindi il modo in cui si manifesta l'energia confinata in una certa regione di spazio (in questo caso la particella). Questo concetto è comunque ancora più generale, in quanto il discorso non si limita alla sola energia cinetica, ma a tutte le forme di energia presenti in tale regione di spazio.

5. I fenomeni di dilatazione dei tempi e contrazione delle distanze sono una diretta conseguenza dell'utilizzo delle trasformate di Lorentz nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. In un certo sistema di riferimento un osservatore fermo misurerà la durata di un fenomeno con il suo orologio ottenendo un certo risultato. Egli è fermo rispetto al fenomeno, cioè vedrà accadere l'inizio e la fine di tale fenomeno nello stesso luogo. Un secondo osservatore, in moto rispetto al primo osservatore, vedrà il fenomeno iniziare e finire in luoghi differenti, e misurerà per la durata dello stesso fenomeno un tempo maggiore di un fattore γ. *[Dimostrate quanto detto con un esperimento teorico.]*

   In modo analogo la distanza tra due punti dello spazio viene misurata in modi differenti da osservatori differenti. Un osservatore fermo rispetto ai due punti dello spazio misurerà una certa distanza tra i punti; un secondo osservatore, in moto rispetto al primo, e che si muove da un punto del segmento all'altro, misurerà una distanza inferiore. *[Eseguite ora i due esperimenti concettuali che mostrano questi fenomeni.]*

Problema di: Relatività ristretta - $R0003$

Testo *[R0003]* [4 ★ 4 ⌛ 5a 📖]
Un elettrone si muove spinto da un campo elettrico $E = 1000\,\frac{kV}{m}$. In quale istante la sua energia cinetica sarà uguale a quella a riposo?

Spiegazione Una carica elettrica spinta da un campo elettrico riceve da esso energia cinetica pari al lavoro della forza elettrostatica.

Svolgimento L'energia a riposo dell'elettrone è
$$E_0 = m_e c^2$$
L'energia totale di un elettrone è
$$E = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} = \gamma m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
ed essa è esprimibile come l'energia a riposo della particella più la sua energia cinetica
$$m_e c^2 + E_{cin} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
La forza che agisce sull'elettrone è
$$F = e \cdot E$$
La sua accelerazione è
$$a = \frac{q}{m_e} \cdot E$$
Il lavoro fatto sull'elettrone dalla forza elettrostatica corrisponde all'energia cinetica fornita alla particella durante il suo spostamento x.
$$L = F \cdot x = E_{cin}$$

per cui

$$e \cdot E \cdot x = E_{cin}$$

Fate attenzione che lo spostamento dell'elettrone partito da fermo NON è

$$x = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

perché questa è una formula classica che prevede che la velocità di una particella possa crescere all'infinito. Sappiamo infatti che una forza costante genera una accelerazione costante, ma l'aumento di velocità rimane asintotico fino al valore della velocità della luce.

Vediamo di sviluppare adesso la formula dell'energia totale relativistica in modo da trovare la corretta corrispondenza tra tempo ed energia cinetica.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_{cin}}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_e^2 c^4}{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_e^2 c^4}{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2 - m_e^2 c^4}{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2 - m_e^2 c^4}}{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)}$$

$$\frac{c \cdot dt}{dx} = \frac{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)}{\sqrt{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2 - m_e^2 c^4}}$$

$$\int c \cdot dt = \int \frac{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)}{\sqrt{\left(m_e c^2 + E_{cin}\right)^2 - m_e^2 c^4}} dx$$

$$\int c \cdot dt = \frac{1}{eE} \int \frac{2\left(m_e c^2 + eEx\right) \cdot eE}{2\sqrt{\left(m_e c^2 + eEx\right)^2 - m_e^2 c^4}} dx$$

$$ct = \frac{1}{eE} \sqrt{\left(m_e c^2 + eEx\right)^2 - m_e^2 c^4} + cost$$

Considerato che all'istante iniziale $t = 0$ la particella si trovava nella posizione $x = 0$, allora la costante di integrazione è $cost = 0$

$$t = \frac{1}{ecE} \sqrt{\left(m_e c^2 + eEx\right)^2 - m_e^2 c^4}$$

Questa equazione mette in relazione l'istante t con la posizione x della particella in funzione della forza $F = eE$ che la spinge

Il problema chiede in quale istante l'energia cinetica è pari alla sua energia a riposo. Quindi

$$t = \frac{1}{ecE} \sqrt{\left(m_e c^2 + m_e c^2\right)^2 - m_e^2 c^4}$$

$$t = \frac{1}{ecE} \sqrt{4 m_e^2 c^4 - m_e^2 c^4}$$

$$t = \frac{\sqrt{3} m_e c^2}{ecE}$$

Un altro modo di affrontare tutto il problema è quello puramente sperimentale. Se l'energia cinetica deve essere pari all'energia a riposo, possiamo scrivere:

$$E_{cin} = e \cdot E \cdot x = m_e c^2$$

$$x = \frac{m_e c^2}{eE}$$

Con i valori a nostra disposizione

$$x = \frac{9,11 \cdot 10^{-31\,kg} \cdot \left(299792458 \, \frac{m}{s}\right)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 10^6 \, \frac{V}{m}} = 0,512\, m$$

Questo significa che l'elettrone, spinto dal campo elettrico in questione, avrà la voluta energia cinetica dopo aver percorso $51,2\, cm$. Se dall'istante della partenza leggiamo il valore di un cronometro quanto la particella ha percorso la distanza voluta, allora abbiamo determinato in modo sperimentale il tempo richiesto.

Problema di: Relatività - $R0004$

Testo *[R0004]* [2 4 5a]
Una navicella spaziale vuole raggiungere la stella *Proxima Centauri* alla distanza di circa $4,23\,a.l.$ misurata dagli osservatori sulla Terra, in un tempo che per gli astronauti nella navicella sia $\Delta t_{nav} = 10\,anni$. A quale velocità deve viaggiare?

Spiegazione L'intervallo di tempo trascorso per la navicella è minore dell'intervallo di tempo misurato sulla Terra. Calcolando il tempo impiegato dalla navicella misurato dall'osservatore sulla Terra, possiamo risalire alla velocità della navicella

Fig. 7.1: *Guarda il video youtu.be/olDrZ2_d35o*

Svolgimento Indicando con la lettera T l'osservatore sulla Terra.

Nel sistema del laboratorio la distanza della stella dalla Terra è

$$\Delta S_T = 4,23 a.l.$$

per cui indicando con $\tau = 4,23\,anni$ il tempo che impiegherebbe la luce ad arrivare alla stella dalla Terra, possiamo scrivere che

$$\Delta S_T = c\tau$$

Indicando con

$$\Delta t_T$$

il tempo che impiega la navicella ad arrivare alla stella per l'osservatore sulla Terra, possiamo calcolare il tempo di viaggio per l'astronauta sulla navicella dall'equazione della dilatazione dei tempi.

$$\Delta t_T = \gamma \Delta t_{nav}$$

Sappiamo infatti che l'orologio dell'astronauta avanza lentamente rispetto all'orologio sulla Terra.

$$\mathcal{V}_T = \frac{\Delta S_T}{\Delta t_T} = \frac{\Delta S_T}{\gamma \Delta t_{nav}}$$

$$\mathcal{V}_T^2 \gamma^2 = \frac{\Delta S_T^2}{\Delta t_{nav}^2}$$

Indichiamo con $\phi^2 = \frac{\Delta S_T^2}{\Delta t_{nav}^2}$ e quindi

$$\mathcal{V}_T^2 \gamma^2 = \phi^2$$

$$\frac{\mathcal{V}_T^2 c^2}{c^2 - \mathcal{V}_T^2} = \phi^2$$

$$\mathcal{V}_T^2 c^2 = \phi^2 c^2 - \phi^2 \mathcal{V}_T^2$$

$$\mathcal{V}_T^2 c^2 + \phi^2 \mathcal{V}_T^2 = \phi^2 c^2$$

$$\mathcal{V}_T^2 = \frac{\phi^2 c^2}{(c^2 + \phi^2)}$$

Sappiamo che $\frac{\phi^2}{c^2} = (0,423)^2$, quindi

$$\mathcal{V}_T^2 = \frac{(0,423)^2 c^2}{\left[1 + (0,423)^2\right]} = 0,15c^2$$

$$\mathcal{V}_T = 0,39c$$

Problema di: Relatività - $R0004a$

Testo *[R0004a]* [2 4 5a]
Un muone ha una vita media, nel suo sistema di riferimento, di $\tau = 2\,\mu s$. Essa nasce in un punto A e decade in un punto B distante, nel sistema del laboratorio, $L = 6\,km$. A quale velocità viaggia la particella?

Spiegazione L'intervallo di tempo trascorso per la particella è minore dell'intervallo di tempo misurato nel laboratorio. Calcolando il tempo impiegato dalla particella misurato dall'osservatore nel laboratorio, possiamo risalire alla velocità della navicella.

Svolgimento Nel sistema di riferimento della particella, il tempo misurato tra i due eventi è il tempo proprio. Quindi nel sistema di riferimento del laboratorio il tempo trascorso è

$$\Delta t = \gamma\tau$$

Quindi la velocità della particella è

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\gamma\tau}$$

$$\gamma V = \frac{\Delta S}{\tau} = 3 \cdot 10^9 \frac{m}{s}$$

Per semplificarci la scrittura dei calcoli, chiamiamo $a = \frac{\Delta S}{c\tau}$
ed avremo

$$\frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\Delta S^2}{c^2\tau^2}$$

$$\frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = a^2$$

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = a^2$$

$$\beta^2 = a^2 - a^2\beta^2$$

$$\beta^2 = \frac{a^2}{1 + a^2} = \frac{100,14}{101,14}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}} = \sqrt{\frac{100}{101}} = 0,995$$

e quindi

$$V = 0,995c$$

Problema di: Relatività - $R0004b$

Testo *[R0004b]* [2 4 5a]
La stella polare dista dalla Terra circa $\Delta L = 325\, a.l.$. Vogliamo che una sonda la raggiunga in un tempo che per l'orologio sulla sonda è di $\Delta T = 1000\, anni$. Dopo quanti anni dalla partenza gli esseri umani sapranno che la sonda è arrivata? Dopo quanti anni le immagini della sonda saranno disponibili per gli scienziati sulla Terra?

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Relatività Ristretta - $R0005$

Testo *[R0005]* [3 3 5a]
Un mesone K^0 a riposo, decade in una coppia di pioni carichi π^+ e π^-. Sapendo che le masse di queste particelle sono $m_{_K} = 497,65\, \frac{MeV}{c^2}$ e $m_{\pi^\pm} = 139,6\, \frac{MeV}{c^2}$, indicare le velocità dei due pioni.

Spiegazione Per questo esercizio dobbiamo applicare la legge di conservazione dell'energia.

Svolgimento Per la legge di conservazione dell'impulso avremo che le quantità di moto dei due pioni sono uguali ed opposte, quindi sono uguali le loro velocità e di conseguenza le loro energie.

Per la legge di conservazione dell'energia avremo

$$m_{_K} c^2 = 2\gamma m_{_\pi} c^2$$

$$\gamma^2 = \frac{m_{_K}^2}{4m_{_\pi}^2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_{_K}^2}{4m_{_\pi}^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{4m_{_\pi}^2}{m_{_K}^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{4m_{_\pi}^2}{m_{_K}^2}$$

$$v^2 = c^2\left(1-\frac{4m_{_\pi}^2}{m_{_K}^2}\right)$$

$$v = c\sqrt{1-\frac{4m_{_\pi}^2}{m_{_K}^2}}$$

L'equazione ha soluzione in quanto la massa del Kaone è più del doppio della massa del pione.

Problema di: Relatività Ristretta - $R0006$

Testo *[R0006]* [1 3 5a]

Tre astronavi viaggiano lungo l'asse x di un sistema di riferimento solidale con la Terra, con velocità $U_1 = 0,2\,c$, $U_2 = 0,4\,c$, e $U_3 = 0,6\,c$ nel verso positivo delle x. Con quale velocità le prime due astronavi vedono la terza muoversi?

Spiegazione Un esercizio sulla legge di composizione delle velocità.

Svolgimento Se dal sistema di riferimento della Terra passiamo nel sistema di riferimento della prima astronave otteniamo

$$U'_3 = \frac{U_3 - U_1}{1 - \frac{U_3 U_1}{c^2}} = \frac{0,4\,c}{1 - 0,6 \cdot 0,2} = \frac{5}{11}\,c$$

In modo analogo posso passare nel sistema della seconda astronave

$$U''_3 = \frac{U_3 - U_2}{1 - \frac{U_3 U_2}{c^2}} = \frac{0,2\,c}{1 - 0,6 \cdot 0,4} = 0,263\,c$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0008$

Testo *[R0008]* [4 5 5a]

Maturità scientifica - seconda prova - sessione ordinaria 2019 - quesito 7

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine, ed in un intervallo di tempo di $2,0\,ns$ percorre una distanza di $25\,cm$. Una navicella passa con una velocità $U_{nav} = 0,80\,c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Spiegazione Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi, nonché legge di composizione delle velocità. Semplice applicazione di formule... ma attenti a non confondervi.

Fig. 7.2: *Guarda il video youtu.be/KRwdTTS54ow*

Svolgimento I dati del problema ci dicono che la distanza percorsa dalla particella ed il tempo trascorso, misurati nel sistema di riferimento del laboratorio, valgono

$$\begin{cases} \Delta L = 25\,cm \\ \Delta t = 2\,ns \end{cases}$$

Il fattore γ tra i due sistemi di riferimento, della navicella e del laboratorio, per questo esercizio è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{nav}^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$

infatti

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0{,}8^2\, c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

Nel laboratorio la particella si muove ad una velocità media

$$V_p = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0,25\, m}{2\, ns} = 1,25 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} = 0,417\, c$$

$$V_p = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0,25\, m}{2\, ns} = 0,417\, c$$
$$V_{nav} = 0,8\, c$$

Applicando la legge di composizione delle velocità, la navicella vede la stessa particella muoversi a velocità

$$V'_p = \frac{V_p - V_{nav}}{1 - \frac{V_p V_{nav}}{c^2}} = \frac{-0,383\, c}{1 - 0,8 \cdot 0,417} = -0,575\, c$$

Se la particella fosse davanti alla navicella, allora la vedrebbe procedere verso di lei a poco più della metà della velocità della luce. In generale vale l'affermazione che la particella si muove in verso opposto all'asse di riferimento della navicella.

Per rispondere alla domanda riguardo a quanto tempo è durato il viaggio della particella ed a quanta distanza ha percorso la particella possiamo fare riferimento alle trasformazioni di Lorentz.

La domanda è schematizzabile nel seguente modo

$$\begin{cases} \Delta L' = ? \\ \Delta t' = ? \end{cases}$$

Per semplicità di calcolo, senza che questo influenzi i risultati, immaginiamo che all'istante iniziale, la particella, il laboratorio e la navicella sono tutti nello stesso punto.

Identifichiamo adesso i due eventi di inizio e fine del moto della particella. L'evento iniziale corrisponde alla presenza della particella e della navicella nell'origine dei due sistemi di riferimento. L'evento finale corrisponde alla presenza della particella in un punto a $x_f = 25\, cm$ e a $t_f = 2\, ns$ nel sistema del laboratorio.

$$\begin{cases} t_i = 0 \\ x_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_f = 2\, ns \\ x_f = 25\, cm \end{cases}$$

Nessuno dei due eventi avviene nello stesso punto o nello stesso istante, quindi le distanze $\Delta x = 25\, cm$ e $\Delta t = 2\, ns$ non rappresentano ne la lunghezza propria ne il tempo proprio.

Applichiamo le trasformazioni di Lorentz per passare dal sistema del laboratorio a quello della navicella, e otteniamo le coordinate dei due eventi nel sistema della navicella

$$\begin{cases} t'_i = 0 \\ x'_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t'_f = \gamma \left(t_f - \frac{V_{nav}}{c^2} x_f \right) = 2,22\, ns \\ x'_f = \gamma \left(x_f - V_{nav} t_f \right) = -38,3\, cm \end{cases}$$

La distanza percorsa dalla particella nel sistema di riferimento della navicella è quindi

$$\Delta L' = \left| x'_f - x'_i \right| = 38,3\, cm$$

L'intervallo di tempo trascorso nel sistema di riferimento della navicella è quindi

$$\Delta t' = \left| t'_f - t'_i \right| = 2,22\, ns$$

Anche in questo caso la distanza misurata ed l'intervallo di tempo trascorsi non sono la distanza propria ed il tempo proprio.

Possiamo arrivare al medesimo risultato applicando il fenomeno della dilatazione dei tempi e della contrazione delle distanze ma facendo attenzione a capire in quale sistema di riferimento misuriamo il tempo proprio. Il tempo proprio è quello nel quale i due eventi accadono nello spesso punto del sistema di riferimento.

Il tempo proprio tra i due eventi viene misurato unicamente dalla particella per la quale i due eventi accadono nella stessa posizione $x''_i = x''_f = 0$. La particella vede infatti se stessa ferma.

Il fattore γ per passare dal sistema di riferimento del laboratorio al sistema di riferimento della particella è

$$\gamma_{lab-p} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_p}{c}}} = 1,1$$

Il tempo proprio tra i due eventi è quindi

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma_{lab-p}} = \frac{2\,ns}{1,1} = 1,82\,ns$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma_{lab-p}} = 1,82\,ns$$

Il tempo risulta quindi dilatato per la particella, il cui orologio procede più lentamente. L'intervallo di tempo proprio è infatti il minore tra tutti gli intervalli di tempo misurati tra i due eventi dai differenti sistemi di riferimento.

Nel sistema di riferimento della particella avremo:

$$\begin{cases} \Delta L'' = 0 \\ \Delta t'' = \Delta\tau = 1,82\,ns \end{cases}$$

Ottenuto il tempo proprio possiamo adesso passare nel sistema di riferimento della navicella e trovare quanto tempo è passato per la navicella tra i due eventi. Prima di farlo dobbiamo calcolarci il fattore γ tra il sistema della particella ed il sistema della navicella.

$$\gamma_{nav-p} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V'_p}{c}}} = 1,222$$

$$\Delta t' = \Delta\tau \cdot \gamma_{nav-p} = 1,82\,ns \cdot 1,222 = 2,22\,ns$$

$$\Delta t' = \Delta\tau \cdot \gamma_{nav-p} = 2,22\,ns$$

La navicella vede quindi una particella che viaggia a velocità $V'_p = -0,575\,c$ per un tempo $\Delta t' = 2,22\,ns$ La distanza percorsa dalla particella, misurata dalla navicella, è quindi

$$\Delta L' = \left| V'_p \cdot \Delta t' \right| = 0,575\,c \cdot 2,22\,ns = 38,3\,cm$$

$$\Delta L' = \left| V'_p \cdot \Delta t' \right| = 38,3\,cm$$

Quindi

$$\begin{cases} \Delta L' = 38,3\,cm \\ \Delta t' = 2,22\,ns \end{cases}$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0009$

Testo *[R0009]* [2 3 5a]
Su di un'astronave è montato un finestrino che gli astronauti al suo interno vedono essere di forma quadrata. Una seconda astronave si avvicina alla prima e, guardando lo stesso finestrino, lo vede avere la forma di un rombo le cui diagonali misurano $a' = 98\,cm$ e $b' = 100\,cm$. A che velocità viaggia la seconda astronave rispetto alla prima?

Spiegazione Il finestrino cambia forma in quanto le lunghezze lungo la direzione del moto si contraggono di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}}}$$

.

Fig. 7.3: *Guarda il video youtu.be/S91svPZSOoc*

Svolgimento Le diagonali del finestrino sono uguali per gli astronauti nella prima astronave, in quanto il finestrino è un quadrato. Una delle due diagonali si contrae di un fattore relativistico

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\gamma}$$

da cui

$$1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2} = \frac{a'^2}{a^2}$$

$$1 - \frac{a'^2}{a^2} = \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}$$

$$\mathcal{V} = c\sqrt{1 - \frac{a'^2}{a^2}}$$

$$\mathcal{V} = 0,2 \cdot c$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0009a$

Testo *[R0009a]* [2 3 5a]
Su di un'astronave è montato un finestrino che gli astronauti al suo interno vedono essere di forma circolare. Una seconda astronave si avvicina alla prima e, guardando lo stesso finestrino, lo vede avere la forma ellittica i cui semiassi misurano $a' = 96\,cm$ e $b' = 100\,cm$. A che velocità viaggia la seconda astronave rispetto alla prima?

Spiegazione Il finestrino cambia forma in quanto le lunghezze lungo la direzione del moto si contraggono di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}$$

.

Svolgimento I semiassi del finestrino sono uguali per gli astronauti nella prima astronave, in quanto il finestrino è una circonferenza. Uno dei due semiassi si contrae di un fattore relativistico

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\gamma}$$

da cui

$$1-\frac{U^2}{c^2} = \frac{a'^2}{a^2}$$

$$1-\frac{a'^2}{a^2} = \frac{U^2}{c^2}$$

$$U = c\sqrt{1-\frac{a'^2}{a^2}}$$

$$U = 0,28 \cdot c$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0010$

Testo *[R0010]* [3 4 5a]
Marco vede due lampadine, una rossa e una blu, accendersi contemporaneamente ad una distanza $L = 10\,m$ tra loro. Giorgio di trova nella stessa posizione della lampadina rossa quando la vede accendersi, e si sta muovendo verso la posizione della lampadina blu alla velocità $U = 0,1\,c$. In quale istante Giorgio vede accendersi la seconda lampadina? Quanto dista dalla seconda lampadina?

Spiegazione La simultaneità degli eventi è relativa, così come la loro distanza. Giorgio vedrà una distanza contratta tra le due lampadine, e vedrà la lampadina blu accendersi prima.

Svolgimento In questo problema i fattori β e γ tra i due sistemi di riferimento valgono

$$\begin{cases} \beta = \frac{U}{c} = 0,1 \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = 1,005 \end{cases}$$

Cominciamo con la contrazione delle lunghezze. La distanza tra le due lampadine misurata da Giorgio sarà

$$L' = \frac{L}{\gamma} = 9,95\,m$$

Sincronizziamo gli orologi dei due osservatori ponendo $t = t' = 0$ nell'istante in cui Giorgio si trova nella posizione della lampadina rossa. Le coordinate spaziotemporali dell'evento E = *"accensione della lampadina blu"* per Marco sono

$$E(x = 10\,m; t = 0\,s)$$

Applicando le trasformate di Lorentz otteniamo che lo stesso evento è visto da Giorgio come

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - Ut) = 1,005 \cdot (10\,m - 0) = 10,05\,m \\ t' = \gamma\left(t - \frac{U}{c^2}x\right) = 1,005 \cdot \left(0 - \frac{0,1 \cdot 10\,m}{c}\right) = -1,005 \cdot \frac{1\,m}{c} = -3,35 \cdot 10^{-9}\,s \end{cases}$$

Quando Giorgio si trova nella posizione della lampadina rossa, lui ha già visto accendersi quella blu da poco più di 3 nanosecondi. Lui quindi quando vede la lampadina blu accendersi, vede la lampadina rossa davanti a lui ancora spenta. Ricordate che la vedrà accendersi nell'istante $t' = 0$.

Quando la lampadina blu si accende, la lampadina rossa per Giorgio si trova nella posizione

$$x' = \gamma\,(x - Vt) = 1,005 \cdot \left(0 - 0,1c \cdot \left(\frac{-1,005}{c}\right)\right) = 0,101\,m$$

Giorgio misura quindi la distanza tra le due lampadine come

$$L' = x'_b - x'_r = 10,05\,m - 0,10\,m = 9,95\,m$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0011$

Testo *[R0011]* [2 3 5a]
Qual'è la velocità di un elettrone con energia cinetica $E_c = 500\,keV$? *[*$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\,kg$*;* $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$*] [Walter Lewin problem #14]*

Spiegazione Qui si usa semplicemente la relazione tra energia, massa a riposo e impulso.

Svolgimento Sappiamo che

$$mc^2 = 9,11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 299792458\,\frac{m}{s} = 8,19 \cdot 10^{-14}\,J = 511\,keV$$

E è l'energia totale della particella, data da

$$E = E_c + mc^2 = 1011\,keV$$

Sappiamo che

$$E = \gamma mc^2$$

da cui

$$\gamma = 1,98$$

da cui

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,863$$

$$V = 0,863\,c = 258747810\,\frac{m}{s}$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0012$

Testo *[R0012]* [2 ⭐ 3 ⌛ 5a 📖]
Quanta energia bisogna dare ad un elettrone che viaggia a $U = 0.3\,c$ per raddoppiare la sua velocità?

Spiegazione Qui si usa semplicemente la relazione tra energia, massa a riposo e impulso.

Svolgimento Sappiamo che per un elettrone

$$mc^2 = 9,1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 299792458\,\frac{m}{s} = 8,19 \cdot 10^{-14}\,J = 511\,keV$$

e che vista la sua velocità, il fattore γ_i vale

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = 1,0483$$

E_i è l'energia totale iniziale della particella, data da

$$E_i = \gamma_i mc^2 = 536\,keV$$

Se vogliamo raddoppiare la velocità, avremo

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1,25$$

e quindi

$$E_f = \gamma_f mc^2 = 639\,keV$$

Quindi è necessario fornire una quantità di energia pari a

$$\Delta E = E_f - E_i = 103\,keV$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0013$

Testo *[R0013]* [2 ⭐ 1 ⌛ 5a 📖]
Un'astronave emette un segnale luminoso, con frequenza $\nu' = 8 \cdot 10^{14}\,Hz$ verso la Terra. L'astronave si muove con velocità $U = 0,6\,c$, allontanandosi dalla Terra, formando un angolo $\theta = 15°$ rispetto alla congiungente tra la Terra e l'astronave. Con quale frequenza tale segnale viene osservato sulla terra?

Spiegazione L'effetto doppler relativistico è una combinazione di un fenomeno classico con un fenomeno relativistico. Per angoli θ generici è necessario utilizzare l'opportuna formula.

Svolgimento La frequenza percepita è

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)}$$

Il fattore relativistico è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,36}} = 1,25$$

e quindi

$$\nu = \frac{8 \cdot 10^{14}\,Hz}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)} = 4,05 \cdot 10^{14}\,Hz$$

Problema di: Relatività Ristretta - $R0013$

Testo *[R0013a]* [2 1 5a]
Un'astronave emette un segnale luminoso, con frequenza $\nu' = 8 \cdot 10^{14}\,Hz$ verso la Terra. L'astronave si muove con velocità $V = 0,6\,c$, avvicinandosi dalla Terra, formando un angolo $\theta = 15°$ rispetto alla congiungente tra la Terra e l'astronave. Con quale frequenza tale segnale viene osservato sulla terra?

Spiegazione L'effetto doppler relativistico è una combinazione di un fenomeno classico con un fenomeno relativistico. Per angoli θ generici è necessario utilizzare l'opportuna formula.

Svolgimento La frequenza percepita è

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)}$$

Il fattore relativistico è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,36}} = 1,25$$

e quindi

$$\nu = \frac{8 \cdot 10^{14}\,Hz}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)} = 15,22 \cdot 10^{14}\,Hz$$

Problema di: Relatività ristretta - $R0014$

Testo *[R0014]* [1½ 3 5a]
Un muone, una volta fermo, decade dopo un tempo $\Delta t_0 = 2,2\,\mu s$. Osservato da un laboratorio posto in montagna alla quota $H_f = 3\,km$, esso è creato a $H_i = 15\,km$ di altezza, e viaggia verso il suolo ad una velocità $V_{lab} = 0,9995\,c$. Quanti metri percorre nel tempo Δt_0? Quanto tempo impiega ad arrivare al suolo? Calcola la durata del viaggio del muone e la distanza percorsa nel suo sistema di riferimento.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo l'equazione della dilatazione dei tempi e della contrazione delle distanze.

Svolgimento Nel tempo indicato dal testo come *vita media del muone a riposo*, esso può percorrere nel sistema di riferimento del laboratorio appena

$$\Delta S_0 = V \cdot \Delta t_0 = 659,2\,m$$

Nel sistema del laboratorio il muone percorre invece

$$\Delta S_{lab} = H_i - H_f = 12\,km$$

in un tempo

$$\Delta t_{lab} = \frac{\Delta S_{lab}}{V_{lab}} = 4 \cdot 10^{-5}\,s = 40\,\mu s$$

Il tempo impiegato per arrivare al laboratorio è quindi molto maggiore della sua vita media a riposo.

Nel sistema di laboratorio possiamo anche calcolare il tempo trascorso nel sistema di riferimento del muone sapendo che il suo orologio noi lo vediamo rallentato di un fattore γ

Il fattore γ per poter passare dal sistema di riferimento del laboratorio al suolo, al sistema di riferimento del muone è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9995)^2}} \simeq 31,63$$

e quindi

$$\Delta t_{\mu} = \frac{\Delta t_{lab}}{\gamma} = 1,265\,\mu s$$

Quindi noi sappiamo che per il muone è trascorso un tempo inferiore alla sua vita media e quindi non ci stupiamo che non sia decaduto.

Prima di proseguire è importante osservare che in questo problema stiamo gestendo due eventi:

1. Il muone nasce in un punto differente dalla posizione del laboratorio, e tale punto rappresenta per il muone l'origine del suo sistema di riferimento.

2. Il muone ed il laboratorio si trovano nello stesso punto, cioè nell'origine del sistema di riferimento del muone.

Il muone misura quindi il tempo proprio, cioè il minor intervallo tempo tra tutti quelli misurati da tutti i possibili sistemi di riferimento.

Il muone, nel suo sistema di riferimento è fermo e vede il laboratorio venirgli incontro alla velocità

$$\vec{U}_{\mu} = -\vec{U}_{lab}$$

cioè ad una velocità uguale e opposta a quella del muone vista nel sistema di riferimento del laboratorio.

Per effetto della contrazione delle distanze, il laboratorio è distante

$$\Delta S_{\mu} = U_{\mu} \cdot \Delta t_{\mu} = 379\,m$$

ed è quindi sufficientemente vicino per raggiungerlo in un tempo inferiore al tempo medio di decadimento.

Questo risultato poteva essere ottenuto anche utilizzando il fenomeno della contrazione delle distanze. Identifichiamo innanzi tutto in quale dei due sistemi di riferimento si misura la distanza propria. Questa è misurata nel sistema del laboratorio in quanto i due eventi avvengono in punti fissi dello spazio e nello stesso istante. Quindi

$$\Delta S_{\mu} = \frac{\Delta S_{lab}}{\gamma} = 379\,m$$

Problema di: Relatività ristretta - $R0015$

Testo *[R0015]* [2 3 5a]
In un sistema di riferimento in quiete, due bombe esplodono nello stesso istante $t_A = t_B = 0$ in due punti di coordinate $x_A = -10\,km$ e $x_B = 10\,km$. Un osservatore in un secondo sistema di riferimento si muove, rispetto al primo, nel verso positivo dell'asse delle x alla velocità $U_0 = 0,6\,c$. I due sistemi di riferimento coincidono per $t' = t = 0$. Determina nel sistema di riferimento in moto, le posizioni x'_A e x'_B delle esplosioni e gli istanti di tempo t'_A e t'_B in cui esse avvengono.

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo le trasformazioni di Lorentz per ottenere le coordinate spaziotemporali dei due eventi nel sistema di riferimento O' conoscendo le coordinate nel sistema di riferimento O. In questo esercizio si può ragionare molto bene sul significato di simultaneità

Fig. 7.4: *Guarda il video youtu.be/UcxOktj9oNE*

Svolgimento I due eventi descritti nel testo del problema sono, nel sistema di riferimento in quiete, simultanei. Accadono cioè nello stesso istante. Il sistema di riferimento in quiete misura la posizione delle due bombe nello stesso istante, e quindi la distanza tra di esse è una distanza propria e vale

$$\Delta L = 20\,km$$

Cominciamo con lo scrivere le trasformate di Lorentz che dovremo poi utilizzare per fare il cambio di sistema di riferimento.

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \dfrac{x \cdot U_0}{c^2} \right) \\ x' = \gamma \left(x - U_0\, t \right) \end{cases}$$

Grazie ai dati del testo, sapendo che la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento è $U_0 = 0,6\,c$, possiamo determinare il valore del fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}$$

Inseriamo adesso i dati nelle trasformazioni di Lorentz Per l'evento A avremo

$$\begin{cases} t'_A = \gamma \left(t_A - \dfrac{x_A \cdot U_0}{c^2} \right) \\ x'_A = \gamma \left(x_A - U_0 t_A \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'_A = \dfrac{5}{4} \left(0 - \dfrac{-10\,km \cdot \frac{3}{5}}{c} \right) = \dfrac{7,5\,km}{c} = 25\,\mu s \\ x'_A = \dfrac{5}{4} \left(-10\,km - 0 \right) = -12,5\,km \end{cases}$$

L'esplosione quindi rispetto all'istante che abbiamo preso in considerazione $t' = 0$ deve ancora avvenire, ed avverrà in un punto più lontano rispetto a quanto affermato nell'altro sistema di riferimento.

Vediamo adesso l'altra esplosione

$$\begin{cases} t'_B = \gamma \left(t_B - \dfrac{x_B \cdot U_0}{c^2} \right) \\ x'_B = \gamma \left(x_B - U_0 t_B \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'_B = \dfrac{5}{4} \left(0 - \dfrac{10\,km \cdot \frac{3}{5}}{c} \right) = -\dfrac{7,5\,km}{c} = -25\,\mu s \\ x'_B = \dfrac{5}{4} \left(10\,km - 0 \right) = 12,5\,km \end{cases}$$

In questo caso, rispetto all'istante $t' = 0$ l'esplosione è già avvenuta in un punto più distante rispetto a quanto riferito dall'altro sistema di riferimento.

Ricapitoliamo quindi i valori ottenuti e facciamo alcune considerazioni.

$$\begin{cases} t_A = 0\,\mu s \\ x_A = -10\,km \end{cases} \qquad \begin{cases} t_B = 0\,\mu s \\ x_B = 10\,km \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'_A = 25\,\mu s \\ x'_A = -12,5\,km \end{cases} \qquad \begin{cases} t'_B = -25\,\mu s \\ x'_B = 12,5\,km \end{cases}$$

La prima considerazione riguarda la simultaneità degli eventi. Ciò che è simultaneo in un sistema di riferimento non è simultaneo in un differente sistema di riferimento. IN questo caso, inoltre, se il sistema di riferimento in moto si muovesse in verso opposto, l'ordine degli eventi sarebbe invertito e sarebbe quindi B ad accadere prima di A. Questo accade perché la distanza spaziotemporale tra i due eventi è di tipo spazio e quindi i due eventi non possono essere causalmente connessi.

La seconda considerazione riguarda la distanza tra le due bombe misurata nel sistema di riferimento in movimento. Le posizioni delle due esplosioni NON possono essere sottratte e sarebbe SBAGLIATO dire che le due bombe distavano tra loro $\Delta x' = 25\,km$ perché le due posizioni, nel sistema di riferimento in moto, non sono state misurate nello stesso istante. La lunghezza propria è quella misurata nel sistema di riferimento in quiete che misura le posizioni delle esplosioni nello stesso istante. Nel sistema di riferimento in moto, la distanza tra le due bombe che esplodono in istanti differenti, è calcolabile con il fenomeno della contrazione delle distanze.

$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\gamma} = \frac{4}{5} \cdot 20\,km = 16\,km$$

Possiamo infine verificare che la distanza spaziotemporale tra i due eventi non sia variata.

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2$$

$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - \Delta t'^2$$

$$(20\,km) - 0 = (25\,km) - c^2 \left(\frac{15\,km}{c} \right)^2$$

$$400\,km^2 = 625\,km^2 - 225\,km^2$$

Il che è ovviamente corretto.

Problema di: Relatività Ristretta - $R0016$

Testo *[R0016]* [1 2 5a]
Le masse a riposo dei tre leptoni e, μ e τ sono rispettivamente $m_e = 0,511\,\frac{MeV}{c^2}$, $m_\mu = 0,1056\,\frac{GeV}{c^2}$, e $m_\tau = 1,777\,\frac{GeV}{c^2}$. Una di queste particelle, viaggiando alla velocità $\mathcal{V} = 0,8\,c$, ha un'energia cinetica $E_c = 70,4\,MeV$. Di quale particella si tratta?

Spiegazione Un esercizio per fissare in mente le formule dell'energia totale, dell'energia a riposo, e dell'energia cinetica di una particella relativistica.

Svolgimento L'energia cinetica di una particella è data dalla sua energia totale sottratta della sua energia a riposo.

Quindi

$$E_c = (\gamma - 1)\,mc^2$$

Il fattore γ per quella particella è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$

La massa di quella particella è quindi

$$m = \frac{E_c}{(\gamma - 1)\,c^2} = \frac{3}{2} \cdot 70,4\,\frac{MeV}{c^2} = 105,6\,\frac{MeV}{c^2}$$

La particella è quindi un muone.

Problema di: Relatività Ristretta - $R0017$

Testo *[R0017]* [3 3 5a]
Sappiamo che i muoni hanno massa $m_\mu = 0,1056\,\frac{GeV}{c^2}$, e vita media $\Delta t_\mu = 2,2\,\mu s$. Un fascio di muoni, creato in laboratorio, percorre mediamente $\Delta L_{lab} = 0,6595\,km$ prima di decadere. A che velocità viaggiano? Quanta energia cinetica hanno?

Spiegazione In questo esercizio, compreso in quali sistemi di riferimento valgono i dati indicati, ed quale sistema misura il tempo proprio, è sufficiente utilizzare la dilatazione dei tempi e la contrazione delle distanze. Questo esercizio serve anche per fissare in mente le formule dell'energia totale, dell'energia a riposo, e dell'energia cinetica di una particella relativistica.

Svolgimento La vita media della particella è definita nel sistema di riferimento in cui è in quiete, nel quale il tempo indicato è il tempo proprio.

Nel laboratorio il tempo trascorso è dato da

$$\Delta t_{lab} = \gamma \Delta t_\mu$$

Lo spazio percorso nel laboratorio è quindi

$$\Delta L_{lab} = \mathcal{V}\Delta t_{lab} = \mathcal{V}\gamma\Delta t_\mu$$

Utilizziamo il parametro β

$$\frac{\Delta L_{lab}}{c} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t_\mu$$

$$\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu} - \beta^2\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu} = \beta^2$$

$$\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu} = \beta^2\left(1+\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu}\right)$$

$$\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu} = \beta^2\left(1+\frac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu}\right)$$

$$\beta^2 = \frac{\dfrac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu}}{\left(1+\dfrac{\Delta L^2_{lab}}{c^2\Delta t^2_\mu}\right)}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}c$$

Trovato β^2 abbiamo

$$\gamma = \sqrt{2}$$

L'energia cinetica di una particella è data dalla sua energia totale sottratta della sua energia a riposo.

Quindi

$$E_c = (\gamma - 1)\,mc^2$$

$$E_c = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 0,1056\,GeV = 0,044\,GeV$$

Domanda di teoria: Relatività Ristretta - $R0018$

Testo *[R0018]* [3 4 5a]
Commenta la struttura delle trasformazioni di Lorentz ed elencane le conseguenze dirette.

Spiegazione Domanda di teoria: devi avere chiari i concetti teorici.

Svolgimento Qui di seguito sono scritte le trasformazioni di Lorentz, che si applicano per cambi di sistema di riferimento tra sistemi inerziali, cioè tra sistemi in moto relativo uniforme tra loro.

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{7.1}$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tali equazioni mostrano come spazio e tempo non siano concetti separati ma si uniscano in un'unica entità detta *spaziotempo*. Il fattore γ mostra come nulla possa muoversi attraverso lo spazio più velocemente della luce, in quanto questo lo renderebbe un valore immaginario. Cosa fondamentale è poi notare che nel limite di basse velocità tali trasformazioni coincidono con le trasformazioni di Galileo.

Conseguenze dirette sono varie. Le prime che cito sono fenomeni come la contrazione delle distanze e la dilatazioni dei tempi, per cui osservatori in moto relativo con velocità costante misurano differenti intervalli di tempo e distanze tra eventi. Tra tutti i sistemi di riferimento particolarmente significativi quelli che misurano il tempo proprio o la distanza propria tra due eventi. La legge di composizione delle velocità è diretta conseguenza delle trasformazioni

$$U' = \frac{U - U_0}{1 - \frac{U U_0}{c^2}}$$

e mostra come la luce venga necessariamente vista con la stessa velocità da tutti i sistemi di riferimento. Le trasformazioni di Lorentz preservano la distanza spaziotemporale tra due eventi

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

la quale mostra che solo per distanze di tipo tempo è preservato l'ordine temporale degli eventi in relazione causale.

Concetti da sviluppare

- Equazioni e Concetto di spazio-tempo; fattore gamma e massima velocità attraverso lo spazio; Galileo per $\gamma \to 1$
- Dilatazione dei tempi e contrazione delle distanze; legge di composizione delle velocità; quadrivettore spaziotemporale.

Domanda di: Relatività Ristretta - $R0019$

Testo *[R0019]* [2 4 5a]
Calcola velocità e quantità di moto di un elettrone con energia cinetica $E_c = 500\,keV$? *[*$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\,kg$*;* $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$*] [Walter Lewin problem* $\#14$*]*

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo le formule conosciute.

Svolgimento [...]

Domanda di Teoria: Relatività Ristretta - $R0020$

Testo *[R0020]* [3 4 5a]
Due fenomeni fisici hanno introdotto problemi che hanno portato a riscrivere le leggi della meccanica, abbandonando le trasformazioni di Galileo per l'introduzione delle trasformazioni di Lorentz. Illustrali, e spiega in che modo le trasformazioni di Lorentz risolvono tali problemi. Indica inoltre quale altro cambiamento deve essere fatto nella meccanica classica per ottenere la meccanica relativistica.

Spiegazione Domanda di teoria: rispondi in modo esauriente e conciso.

Svolgimento Agli inizi del '900 l'elettromagnetismo classiro era ben formulato dalle quattro equazioni di Maxwell. Tali equazioni mostravano però due problemi: il primo riguardava la costanza della velocità della luce ed il secondo la struttura stessa delle equazioni di Maxwell. L'esperimento di Michelson-Morley, dimostrò che le onde elettromagnetiche hanno la stessa velocità indipendentemente dallo stato di moto dell'osservatore, in contrasto con le trasformazioni di Galileo, pilastro della meccanica classica. Tale costanza è poi ribadita dalla teoria stessa in quanto la luce è una soluzione delle equazioni di Maxwell e la sua velocità è da esse determinata in funzione di due parametri costanti indipendenti dal sistema di riferimento

$$c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Il secondo riguardava il fatto che le leggi dell'elettromagnetismo non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, facendo cadere il principio di relatività secondo il quale tutte le leggi fisiche devono essere formulate nello stesso modo indipendentemente dal sistema di riferimento inerziale utilizzato. L'immediata soluzione è l'introduzione delle trasformazioni di Lorentz in sostituzione di quelle di Galileo. Una scelta questa alquanto naturale in quanto non solo tali trasformazioni preservano il valore della velocità della luce, come dimostrato dalla legge di composizione relativistica delle velocità, ma sono anche le trasformazioni che rendono invarianti le equazioni di Maxwell. La conseguenza di tale azione, però, è la necessità di modificare i principi della dinamica di Newton in quanto essi sono invarianti sotto l'azione delle trasformazioni di Galileo. Per farlo è stato necessario ridefinire la quantità di moto di un corpo come $\vec{P} = m\gamma\vec{U}$ con γ il fattore relativistico. La scrittura dei principi della dinamica nei termini della quantità di moto risulta invariante sotto l'azione delle trasformazioni di Lorentz.

Concetti da sviluppare

- Costanza della velocità della luce (esperimento di Michelson-Morley); non invarianza delle equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche con velocità costante c.
- Lorentz ha la costanza di c codificata nell'equazione (lo si vede dalla composizione delle velocità). Le equazioni di Maxwell sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz
- La ridefinizione della quantità di moto utilizzando il fattore γ

Domande di teoria: Relatività Ristretta - $R0021$

Testo *[R0021]* [3⭐ 4⏳ 5a📖]
Approfondisci il concetto di simultaneità in meccanica relativistica illustrandolo anche alla luce dell'invarianza di Δs^2

Spiegazione Una domanda di teoria. Siate sintetici ma esaustivi.

Concetti da sviluppare

- In contrasto con la fisica classica, eventi simultanei per un osservatore non lo sono per altri osservatori, e possono accadere in ordine inverso per osservatori differenti.
- Le trasformate di Lorentz preservano Δs^2 preservando l'ordine temporale dei soli eventi in relazione di causa-effetto.

Svolgimento per la fisica classica il tempo scorre nello stesso modo per tutti gli osservatori. ne consegue che eventi simultanei per un osservatore lo sono anche per tutti gli altri osservatori. Le trasformazioni di Lorentz introducono lo spaziotempo ed osservatori differenti misurano lo scorrere del tempo in modo differente. Eventi simultanei per un osservatore non lo sono per un differente osservatore. Inoltre, esisteranno sempre due osservatori che vedono tali due eventi in un ordine temporale differente. Per la fisica classica questo farebbe cadere il principio di causa-effetto, che però è alla base della nostra interpretazione della realtà. Nella teoria della relatività è però conservata la distanza spaziotemporale tra due eventi, concetto legato alla possibilità, per due eventi, di essere in relazione di causa-effetto. Nel caso di eventi simultanei, tale distanza è sempre di tipo spazio e questo significa che gli eventi in questione non sono in relazione di causa-effetto; per questo motivo non è un problema se l'ordine temporale degli eventi può apparire invertito. Eventi con una distanza spaziotemporale di tipo tempo, possono invece essere in relazione di causa-effetto e, per le trasfomazioni di Lorentz, tutti gli osservatori vedranno tali eventi accadere nello stesso ordine temporale.

Problema di: Relatività ristretta - $R0026$

Testo *[R0026]* [2½ 3 5a]
Due particelle, di massa $m_1 = 2 \cdot 10^{-18}\, kg$ e $m_2 = 6 \cdot 10^{-19}\, kg$, si muovono una verso l'altra con velocità $U_1 = 0,75\, c$ e $U_2 = 0,50\, c$ urtandosi in modo completamente anelastico, e dopo l'urto abbiamo una sola particella. Il sistema è isolato. Con quale velocità si muove la particella dopo l'urto?

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto. Solo bisogna stare attenti ad utilizzare la formula corretta della quantità di moto.

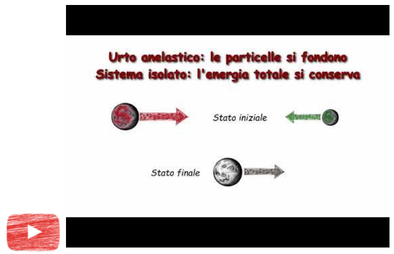


Fig. 7.5: *Guarda il video youtu.be/ONSszBH8ElA*

Svolgimento Le due particelle si muovono una verso l'altra, quindi sulla stessa retta e con verso opposto. Ipotizziamo che la prima particella si muova nel verso positivo dell'asse di riferimento.

La quantità di moto delle due particelle è quindi

$$P_{1i} = m_1 \gamma_1 U_1$$

$$P_{2i} = m_2 \gamma_2 U_2$$

Ovviamente la velocità U_2 dovrà essere inserita nelle formule, in fase di calcolo, con il valore negativo

Visto che l'urto è completamente anelastico, dopo di esso avremo una sola particella

$$P_f = m_f \gamma_f U_f$$

Dal momento che le due particelle si muovono lungo la stessa linea possiamo scrivere la legge di conservazione della quantità di moto come

$$P_f = P_{1i} - P_{2i}$$

$$P_f = m_1 \gamma_1 v_1 - m_2 \gamma_2 v_2$$

La massa complessiva del sistema non è un invariante, e la massa della particella finale non coincide necessariamente con la somma delle masse delle particelle iniziali.

La seconda equazione che ci serve è la conservazione dell'energia

$$E_f = E_1 + E_2$$

$$m_f \gamma_f c^2 = m_1 \gamma_1 c^2 + m_2 \gamma_2 c^2$$

$$m_f \gamma_f = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2$$

Non ci rimane adesso che ricavare la velocità finale della particella.

$$P_f = m_f \gamma_f v_f$$
$$P_f = (m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2)\, v_f$$

$$(m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2)\, v_f = m_1 \gamma_1 v_1 - m_2 \gamma_2 v_2$$

$$v_f = \frac{m_1 \gamma_1 v_1 - m_2 \gamma_2 v_2}{(m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2)}$$

Calcoliamo adesso i valori numerici delle grandezze che ci servono. E' importante cercare di approssimare i risultati il meno possibile.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$v_f = \frac{2 \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot 0,75\, c - 0,6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,5\, c}{2 \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} + 0,6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2,268 - 0,364}{3,024 + 0,693}\, c = 0,512\, c$$

Problema di: Relatività ristretta - $R0027$

Testo *[R0027]* [2 4 5a]

[*Simulazione maturità scientifica - 25 Ottobre 2016 - Quesito 2*]

Un elettrone e un positrone (antiparticella dell'elettrone con la stessa massa dell'elettrone, ma con carica opposta) si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità. L'energia posseduta da entrambe le particelle è di $1,51\,MeV$. Sapendo che la loro massa a riposo è di $0,511\,\frac{MeV}{c^2}$, qual è la velocità del positrone nel sistema di riferimento dell'elettrone?

Spiegazione In questo problema di relatività abbiamo due particelle, un elettrone e^- ed un positrone β^+ che si muovono nel sistema di riferimento del laboratorio. Conoscendo le loro velocità possiamo fare un cambio di sistema di riferimento e trovare la velocità di una rispetto all'altra.

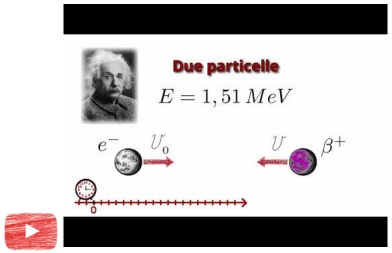


Fig. 7.6: *Guarda il video youtu.be/WzqPOczfZUI*

Svolgimento Se non riconosciamo a priori la natura relativistica del problema, direttamente ipotizzabile dall'alto valore dell'energia delle particelle, è opportuno fare i calcoli e confermare la scelta a posteriori.

Per prima cosa troviamo la velocità delle particelle conoscendo la loro energia $E = 1,51\,MeV$.

$$E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2$$

sapendo che

$$P = m_0 \gamma v = m_0 \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

abbiamo le due equazioni che formano il sistema la cui soluzione fornisce la velocità delle particelle.

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^4}{c^2 - v^2}$$

$$E^2 c^2 - E^2 v^2 = m_0^2 c^6 - m_0^2 c^4 v^2 + m_0^2 v^2 c^4$$

$$-E^2 v^2 = -E^2 c^2 + m_0^2 c^6$$

$$v^2 = c^2 - \frac{m_0^2 c^6}{E^2}$$

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}\right)$$

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{0,261121}{2,2801}\right) = 0,8855\,c^2$$

$$v = 0,941\,c$$

$$\beta = 0,941$$

$$\gamma = 0,3384$$

Trovata la velocità applichiamo la legge di composizione relativistica delle velocità ed arriviamo alla soluzione del problema.

$$v' = \frac{v - v_0}{1 - \frac{v v_0}{c^2}}$$

$$v' = \frac{-0,941\,c - 0,941\,c}{1 + 0,941^2} = -0,998\,c$$

Problema di: Relatività ristretta - $R0028$

Testo *[R0028]* [2 2 5a]
Un osservatore vede due eventi simultanei accadere in due punti distanti tra loro $\Delta x = 4\,a.l.$ mentre un secondo osservatore vede gli stessi due eventi accadere separati da un intervallo di tempo $\Delta t' = 3\,anni$. A quale distanza $\Delta x'$ accadono i due eventi nel sistema di riferimento del secondo osservatore?

Spiegazione Un esercizio sull'invarianza del quadrivettore spaziotemporale.

Svolgimento Sappiamo che il quadrivettore spaziotemporale è conservato. Quindi

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

$$\Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$\Delta x'^2 = \Delta x^2 + c^2 \Delta t'^2 = 25\,(a.l.)^2$$

$$\Delta x' = 5\,a.l.$$

Problema di: Relatività ristretta - $R0029$

Testo *[R0029]* [2 2 5a]
Un osservatore vede due eventi accadere in due punti distanti tra loro $\Delta x = 4\,a.l.$ separati da un intervallo di tempo $\Delta t = 7\,anni$. Spiega perché non è possibile che un secondo osservatore veda i due eventi accadere contemporaneamente.

Spiegazione Un esercizio sull'invarianza del quadrivettore spaziotemporale.

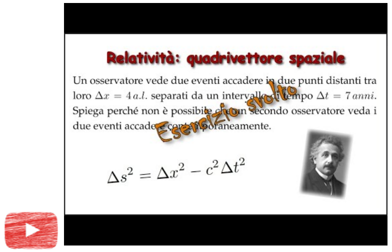


Fig. 7.7: *Guarda il video youtu.be/mADVS4ubeVQ*

Svolgimento Sappiamo che il quadrivettore spaziotemporale è conservato per cambi di sistema di riferimento.

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \Delta s'^2$$

Quindi, utilizzando i dati del problema, essendo

$$\Delta s^2 = 16\,(a.l.)^2 - 49\,(a.l.)^2 = -33\,(a.l.)^2 < 0$$

ne segue che il quadrivettore è negativo in qualunque sistema di riferimento. Se esistesse un osservatore per cui gli eventi sono simultanei, cioè

$$\Delta t' = 0$$

avremmo che

$$\Delta s'^2 = \Delta x'^2 \geq 0$$

il che contraddice i dati del problema.

Problema di: Relatività ristretta - $R0030$

Testo *[R0030]* [3 4 5a]

Un osservatore vede due eventi simultanei accadere in due punti dello spazio distanti tra loro $\Delta x = 12\,a.l.$. Un secondo osservatore vede gli stessi due eventi accadere separati da un intervallo di tempo $\Delta t' = 5\,anni$. A quale distanza $\Delta x'$ accadono i due eventi nel sistema di riferimento del secondo osservatore? Qual é la velocità relativa tra i due osservatori?

Spiegazione Un esercizio sull'invarianza del quadrivettore spaziotemporale, e sulle trasformazioni di Lorentz

Svolgimento Sappiamo che il quadrivettore spaziotemporale è conservato dalle trasformazioni di Lorentz, quindi

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

$$\Delta x'^2 = \Delta x^2 + c^2\Delta t'^2$$

$$\Delta x'^2 = 144\,(a.l.)^2 + 25\,(a.l.)^2$$

$$\Delta x'^2 = 169\,(a.l.)^2$$

$$\Delta x' = 13\,a.l.$$

Utilizzando adesso le trasformazioni di Lorentz. Immaginiamo che al tempo $t = t' = 0$ entrambi gli osservatori si trovino ognuno nell'origine dell'altro sistema di riferimento, quindi nello stesso punto. Chiamiamo Marco l'osservatore che vede i due eventi simultanei, e Andrea l'altro osservatore.

Immaginiamo inoltre che Marco si trovi nell'istante iniziale nel punto in cui accade uno dei due eventi. Uno dei due eventi ha quindi coordinate $A(0;0)$. Per Andrea, lo stesso evento ha quindi coordinate $A'(0;0)$. Marco vede il secondo evento accadere nelle coordinate $B(12\,a.l.;0)$. Andrea vede il secondo evento accadere nelle coordinate $B'(13\,a.l.;t'<0)$. Non possiamo ancora calcolarci la coordinata temporale dell'evento B' in quanto non conosciamo la velocità relativa tra i due osservatori. Guardando però la trasformazione di Lorentz possiamo dire che avviene in un istante precedente all'evento A'. Infatti

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{x_B\,\mathcal{V}}{c^2}\right)$$

Dalla quale, sostituendo le informazioni che abbiamo, otteniamo

$$t'_B = -\gamma\frac{x_B\,\mathcal{V}}{c^2} < 0$$

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, il Andrea vede l'evento B nella coordinata

$$x'_B = \gamma\left(x_B - \mathcal{V}t_B\right)$$

Da questa espressione ricaviamo γ per poi rispondere alla domanda del problema.

$$\gamma = \frac{x'_B}{x_B} = \frac{13}{12}$$

da cui

$$1 - \beta^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\beta = \frac{5}{13}$$

$$\mathcal{V} = \frac{5}{13}c$$

Domande di teoria: Relatività Ristretta - $R0031$

Testo *[R0031]* [3 20 5a]
Rispondi in modo conciso ma esauriente alle seguenti richieste.

1. Quali fenomeni fisici portano necessariamente all'abbandono della fisica classica per la fisica relativistica?
2. La teoria della relatività rivoluziona il comune concetto di distanza e intervallo di tempo tra due eventi, ma ci focalizza su ciò che è reale relativamente a dove e quando accadono due eventi. Approfondisci tale argomento.
3. Indica tre fenomeni fisici nei quali viene superata la velocità della luce, e perché questi non contraddicono la teoria della relatività.
4. Cosa si intende esattamente quando si dice che nulla può viaggiare più veloce della luce?
5. Parla delle trasformazioni di Lorentz e della distanza spaziotemporale tra due eventi.
6. $E = mc^2$ è la più famosa equazione nella storia della fisica: approfondisci il suo significato.
7. Illustra i passaggi logici che portano alla teoria della relatività ed a tutte le sue equazioni.
8. Alcuni scienziati ipotizzano di mandare una sonda su altri sistemi solari spingendola come se fosse una barca a vela. Sulla base di cosa questo può essere possibile?
9. Si sente spesso parlare di *paradossi* in riferimento alla teoria della relatività. Illustra il paradosso del treno in galleria.
10. Si sente spesso parlare di *paradossi* in riferimento alla teoria della relatività. Illustra il paradosso dei due gemelli.
11. Da dove scaturisce la necessità di superare la legge di gravitazione universale di Newton per abbracciare la teoria della relatività generale?
12. Un atomo di idrogeno ha meno massa della somma delle masse del protone e dell'elettrone. Come lo si spiega?
13. Perché la teoria della relatività è denominata *speciale* o *ristretta*?

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Domande di teoria: Meccanica quantistica - $H0001$

Testo *[H0001]* [2 19 5a]
Rispondi alle seguenti domande.

1. Cos'è un corpo nero?
2. Nomina alcuni fenomeni fisici che hanno condotto alla quantizzazione delle onde elettromagnetiche
3. Quale idea innovativa è stata introdotta da Max Plank per spiegare lo spettro di radiazione di corpo nero?
4. Cosa accomuna la descrizione della radiazione di corpo nero e dell'effetto fotoelettrico?
5. Nell'effetto fotoelettrico troviamo l'equazione $E = h\nu - \phi$. Indica il significato di ognuno dei quattro termini presenti.
6. Ipotizziamo di far incidere un'onda elettromagnetica di determinata intensità e frequenza, sulla superficie di un metallo, e di non vedere alcun elettrone in uscita dal metallo. Cosa devo fare, e perchè, al fine di riuscire ad estrarre un elettrone dal metallo?
7. Descrivi sinteticamente quali problematiche presenta il modello atomico di Rutherford.
8. Quale idea di base permette di spiegare gli spettri a righe di emissione e assorbimento degli atomi?
9. Come si giustifica il fatto che, ipotizzando orbite circolari, il raggio dell'orbita di un elettrone intorno al nucleo è proporzionale a n^2 con $n \in \mathbb{N}$?
10. Quale semplice equazione mostra un legame tra il comportamento corpuscolare ed ondulatorio di una particella?
11. Perchè nell'esperimento delle due fessure misurare da quale fessura passa l'elettrone fa sparire la figura di interferenza sullo schermo?
12. Nell'esperimento delle due fessure si vede che gli elettroni che attraversano la coppia di fessure formano sullo schermo di rivelazione una figura di interferenza. Esattamente quali sono le due *cose* che hanno interferito tra loro?
13. In quale modo la meccanica quantistica descrive un sistema fisico?
14. Considera un sistema fisico formato da una particella che si muove verso uno schermo dotato di quattro differenti fessure e lo attraversa. Cosa posso affermare sullo stato fisico della particella, riguardo alla fessura che ha attraversato?
15. Considera un sistema fisico formato da una particella che si muove verso uno schermo dotato di quattro differenti fessure e lo attraversa. Se misuro la posizione della particella per sapere da quale fessura effettivamente passa, cosa succede allo stato fisico della particella?
16. Considera una particella che attraversa una fessura di larghezza L. Il fatto che la particella abbia attraversato la fessura è una misura della sua posizione?
17. Considera una particella che attraversa una fessura di larghezza L, ed immaginate di stringere tale fessura. cosa succede alla componente dell'impulso lungo tale fessura?
18. In meccanica quantistica si parla di *sovrapposizione di stati*. E' corretto affermare che se uno stato fisico è rappresentato dalla sovrapposizione dello stato A e dello stato B, con funzione d'onda $\phi = \phi_A + \phi_B$ allora significa che noi non sappiamo in quale stato si trova il sistema, e solo dopo aver fatto una misura possiamo sapere in quale dei due stati si trovava effettivamente il sistema prima della misura?
19. Cosa afferma il principio di indeterminazione di Heisemberg?

Spiegazione Queste sono domande di teoria... l'unico modo per rispondere correttamente è aver studiato.

Svolgimento

1. Definisco *corpo nero* un qualunque sistema fisico in grado di assorbire ogni radiazione elettromagnetica incidente.

2. Lo spettro di emissione del corpo nero, l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton

3. L'idea di Plank consiste nell'ipotizzare che la radiazione elettromagnetica scambi energia solo in quantità discrete in funzione della frequenza della radiazione. L'energia dei singoli pacchetti energetici è data da $E = h\nu$

4. La descrizione della radiazione di corpo nero e dell'effetto fotoelettrico sono accomunate dal descrivere l'energia del fotone come $E = h\nu$

5. Nell'equazione
$$E = h\nu - \phi$$
E rappresenta l'energia cinetica dell'elettrone emesso, h è la costante di plank, ν è la frequenza della radiazione incidente, ϕ è l'energia di estrazione dell'elettrone dal metallo.

6. Se non vedo elettroni estratti dalla superficie del metallo significa che l'energia dei singoli fotoni legati alla radiazione elettromagnetica non è sufficientemente elevata. Aumentare l'intensità dell'onda non risolve il problema in quanto significherebbe aumentare il numero di fotoni. Ciò che bisogna fare è aumentare la frequenza della radiazione in modo che aumenti l'energia del singolo fotone $E = h\nu$

7. Nel modello atomico di Rutherford gli elettroni ruotano intorno ad un nucleo centrale e non ci sono vincoli sull'energia, e di conseguenza sul raggio dell'orbita, che tale elettrone può avere. Le problematiche di tale modello sono principalmente due:
   (a) L'elettrone intorno al nucleo si muove di moto accelerato e quindi deve emettere radiazione di sincrotrone; l'elettrone perderebbe in tal caso energia e diminuirebbe il raggio dell'orbita fino a collassare sul nucleo. Ovviamente questo non accade in quanto la materia, per come la conosciamo, esiste.
   (b) Potendo, nel modello di Rutherford, assumere valori di energia in modo continuo, l'elettrone può assorbire ed emettere radiazione elettromagnetica di qualunque energia. L'analisi degli spettri di emissione ed assorbimento mostrano invece che la radiazione viene assorbita ed emessa in valori discreti. Ogni elemento assorbe ed emette fotoni solo in determinate frequenze.

8. Gli spettri di emissione ed assorbimento a righe sono giustificati dal fatto che gli elettroni in un atomo si trovano su livelli energetici discreti e ben determinati. Gli elettroni emettono/assorbono energia passando da un'orbita ad un'altra e quindi da un'energia ben determinata ad un'altra. L'energia della radiazione emessa/assorbita è pari alla differenza di energia tra le orbite dell'elettrone prima e dopo l'assorbimento/emissione della radiazione.

9. Il raggio dell'orbita è quantizzato in quanto l'elettrone può trovarsi solo su orbite la cui circonferenza sia pari ad un numero intero di volte la lunghezza d'onda[1]
$$2\pi r_n = n\lambda$$
con $n \in \mathbb{N}$

10. Ad ogni particella è associabile una lunghezza d'onda λ, detta lunghezza d'onda di De Broglie, dipendente dall'impulso p della particella
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

11. Nell'esperimento delle due fessure, la figura di interferenza si forma grazie alla presenza contemporanea di due stati fisici, ognuno dei quali rappresentante l'elettrone che passa in una determinata fessura, che interferiscono tra loro. Nel misurare in quale fessura passa l'elettrone, noi lo facciamo transire in uno stato fisico in cui è presente solo uno dei due stati, quindi non è più possibile alcun fenomeno di interferenza.

[1] Qui la domanda va completata indicando tutti i passaggi matematici utilizzati.

12. Nell'esperimento delle due fessure gli elettroni coinvolti si trovano in uno stato fisico di sovrapposizione dello stato di elettrone che attraversa la prima fessura e dello stato di elettrone che attraversa la seconda fessura. I due stati sono contemporaneamente presenti e possono interferire tra loro.

13. In meccanica quantistica un sistema fisico è descritto da una funzione d'onda. Eseguendo una misura su tale stato fisico, con la funzione d'onda possiamo ricavare la probabilità di ottenere per tale misura un determinato risultato. L'evoluzione nel tempo di tale stato fisico è descritta dall'equazione di Schrodinger applicata alla funzione d'onda di tale stato fisico.

14. Non avendo eseguito alcuna misura di posizione, la particella si trova in uno stato fisico dato dalla sovrapposizione di quattro differenti stati fisici, ognuno che descrive la particella che passa da una determinata fessura. Indichiamo con a, b, c, d le quattro fessure. Assumendo che la probabilità di passare da ogni fessura sia equivalente, la funzione d'onda della particella sarà
$$\psi = \frac{1}{2}\psi_a + \frac{1}{2}\psi_b + \frac{1}{2}\psi_c + \frac{1}{2}\psi_d$$

15. Prima della misura lo stato fisico della particella è la sovrapposizione di quattro stati, ognuno che descrive la particella passante per una determinata fessura
$$\psi = \frac{1}{2}\psi_a + \frac{1}{2}\psi_b + \frac{1}{2}\psi_c + \frac{1}{2}\psi_d$$
Misurare la posizione della particella fa transire lo stato fisico in uno degli stati che descrivono la particella che passa da una determinata fessura. Ipotizzando che il risultato della misura sia che la particella è passata dalla fessura a, la funzione d'onda della particella sarà ora
$$\psi = \psi_a$$

16. Se affermo che in un certo istante una particella ha attraversato una determinata fessura, di fatto sto dicendo che sapevo dove si trovava, quindi di fatto ho effettuato una misura della sua posizione. Visto che la fessura ha una lunghezza L, allora la misura presenta un'incertezza sulla posizione pari a
$$\Delta x = \frac{L}{2}$$

17. Far passare una particella attraverso una fessura equivale a misurarne la posizione con una certa incertezza proporzionale alla larghezza della fessura. Stringendo la fessura, diminuisce l'incertezza sulla misura della posizione, e di conseguenza, per il principio di indeterminazione di Heisemberg, aumenta l'incertezza sulla misura contemporanea della componente dell'impulso lungo il piano della fessura.

18. No, quanto affermato nella domanda non è corretto. Per come è posta la domanda, infatti, sembra che la particella si trovi sempre o nello stato A o nello stato B, e sembra che il concetto di sovrapposizione sia legato alla nostra ignoranza (non-conoscenza) sull'effettivo stato della particella. In realtà se uno stato fisico è descritto dalla sovrapposizione di due stati, entrambi gli stati sono effettivamente contemporaneamente presenti in determinate proporzioni; è solo a seguito di una nostra misura che lo stato compie una transizione verso uno solo dei due stati che prima si sovrapponevano, con probabilità che dipende dalle proporzioni con cui sono presenti i due stati.

19. Il principio di indeterminazione di Heisemberg afferma che esistono coppie di grandezze fisiche tali per cui non è possibile misurarle contemporaneamente con arbitraria precisione. Se per esempio consideriamo la posizione e l'impulso di una particella, il prodotto delle loro incertezze di misura sarà sempre
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Domande di Teoria: Meccanica quantistica - $H0002$

Testo *[H0002]* [4 12 5a]
Rispondi alle seguenti domande.

1. Quali fenomeni fisici hanno portato alla comprensione della natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica, e cosa si intende esattamente per "natura corpuscolare" della radiazione elettromagnetica.
2. La natura ondulatoria delle particelle permette di superare le problematiche insite nel modello atomico di Rutherford e di arrivare al modello di Bohr. Spiega quali siano tali problematiche e descrivi come esse vengano superate.
3. Utilizzando come esempio l'esperimento delle due fessure di cui devi dare breve descrizione, indica come nella meccanica quantistica venga descritto lo stato di un certo sistema fisico e cosa significhi fare una misura su di esso.
4. Enuncia il principio di indeterminazione di Heisemberg

Spiegazione Queste sono domande di teoria... l'unico modo per rispondere correttamente è aver studiato.

Svolgimento

1. Due fenomeni fisici che hanno portato alla comprensione della natura corpuscolare della luce sono la radiazione di corpo nero e l'effetto fotoelettrico. Lo spettro di radiazione di corpo nero, misurato sperimentalmente, ha un andamento completamente differente da quanto previsto dalla teoria classica dell'elettromagnetismo. Solo assumendo che la luce possa scambiare energia con la materia in pacchetti di energia

$$E_\gamma = h\nu$$

le discrepanze tra dati sperimentali e previsioni teoriche si annullano. L'effetto fotoelettrico descrive il modo in cui la radiazione elettromagnetica è in grado di estrarre un elettrone da un metallo; l'energia dell'elettrone estratto dipende dalla frequenza della radiazione incidente e non dalla sua intensità secondo la formula

$$E_c = h\nu - \phi$$

Come per lo spettro di corpo nero, anche in questo caso l'energia della radiazione elettromagnetica è scambiata soltanto per pacchetti discreti.

2. Il modello atomico di Rutherford non funziona per due principali motivi. In primo luogo una carica elettrica accelerata emette radiazione di sincrotrone e quindi perde energia. La sua orbita dovrebbe quindi ridurre gradualmente il raggio fino a collassare sul nucleo, cosa che ovviamente non avviene. In secondo luogo, potendo l'elettrone ruotale a qualunque distanza dal nucleo, esso può scambiare energia in modo continuo; lo spettro di assorbimento risulterebbe uno spettro continuo e non uno spettro a righe come mostrato dai dati sperimentali. Uno spettro a righe è giustificabile solo ipotizzando orbite, e conseguenti livelli energetici, discreti. La presenza di livelli energetici discreti implicherebbe inoltre l'esistenza di un livello energetico di minima energia sotto il quale l'elettrone non può andare, impedendo che l'elettrone possa collassare sul nucleo. Per giustificare la presenza di livelli energetici discreti basta considerare che ad ogni elettrone è associabile una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$

Questo implica che la lunghezza dell'orbita dell'elettrone intorno al nucleo debba essere un multiplo intero della lunghezza d'onda dell'elettrone.

$$2\pi r = n\lambda$$

con $n \in \mathbb{N}$. I raggi delle orbite, e di conseguenza le loro energie, risultano quindi quantizzate.

3. Nell'esperimento delle due fessure un elettrone viene mandato attraverso due fessure e, sullo schermo di rivelazione posto oltre le fessure, si vede una figura di interferenza. Questo viene spiegato dal fatto che la funzione d'onda dell'elettrone è la sovrapposizione di due differenti stati, quello in cui l'elettrone

passa nella fessura di sinistra e quello in cui passa nella fessura di destra. I due stati, oltre le fessure, interferiscono tra loro per formare la figura di interferenza. Se misuriamo attraverso quale fessura l'elettrone effettivamente passa, facciamo transire la funzione d'onda da sovrapposizione di due stati differenti in uno solo dei due stati. L'elettrone quindi passa da una sola delle due fessure e dopo di essa non sono più presenti due stati che possono interferire tra loro, quindi non è più presente sullo schermo la figura di interferenza.

4. Il principio di indeterminazione afferma che esistono coppie di grandezze fisiche che non possono essere misurate contemporaneamente con arbitraria precisione, per cui
$$\Delta x \Delta p \leq \frac{h}{4\pi}$$

Problema di: Meccanica quantistica - $H0003$

Testo *[H0003]* [2 ⭐ 2 ⌛ 4a 📖]
Un fascio laser verde, di potenza $P = 0,4\,W$, generato da una sorgente ad argon, ha lunghezza d'onda $\lambda = 514,5\,nm$. Quanti fotoni emette ogni secondo?

Spiegazione Un fotone è un oggetto di energia $E = h\nu$ dipendente dalla sua frequenza. Conoscendo la potenza del laser e l'energia del singolo fotone, possiamo trovare quanti fotoni sono emessi dalla sorgente.

Svolgimento Il numero di fotoni per unità di tempo è dato dall'energia per unità di tempo diviso l'energia del singolo fotone. Quindi
$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{0,4\,W \cdot 514,5 \cdot 10^{-9}\,m}{6,62607015 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 299792458\,\frac{m}{s}} = 10^{18}$$

Problema di: Meccanica quantistica - $H0004$

Testo *[H0004]* [3 2 4a]
[*Simulazione maturità scientifica - 25 Ottobre 2016 - Quesito 3*]
Un atomo di idrogeno si trova in uno stato eccitato dopo aver assorbito un fotone ultravioletto di lunghezza d'onda $\lambda = 97,2\,nm$. Questo atomo può riportarsi allo stato fondamentale seguendo diverse transizioni a ognuna delle quali corrisponde l'emissione di luce di una particolare lunghezza d'onda. Quante sono le transizioni possibili che provocano l'emissione di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito? Quali tra queste transizioni provocano emissione nel visibile? [La costante di Rydberg vale $R_{_H} = 1,0974 \cdot 10^7 m^{-1}$]

Spiegazione Per calcolare tutte le possibili lunghezze d'onda della luce emessa dall'atomo eccitato di idrogeno ci serviamo dell'opportuna equazione che descrive le transizioni dell'elettrone.

Svolgimento L'equazione che descrive la lunghezza d'onda dei fotoni che cerchiamo è data da

$$\frac{1}{\lambda} = R_{_H}\left(\frac{1}{n_{_f}^2} - \frac{1}{n_{_i}^2}\right)$$

Cominciamo con il calcolare il numero quantico n_0 del livello energetico raggiunto dall'elettrone nel momento dell'assorbimento del fotone di lunghezza d'onda λ_0.

$$1 + \frac{1}{\lambda \cdot R_{_H}} = \frac{1}{n_{_0}^2}$$

$$-1 + \frac{1}{1,0974 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot 97,2 \cdot 10^{-9}\,m} = \frac{1}{n_{_0}^2}$$

$$\frac{1}{n_{_0}^2} = 0,06667$$

$$n_{_0} \simeq 4$$

Tutte le possibili transizioni che dallo stato eccitato portano nello stato fondamentale sono indicate nella seguente tabella con la lunghezza d'onda corrispondente ottenuta dalla formula

$$\lambda = \frac{1}{R_{_H}} \cdot \frac{n_{_i}^2 n_{_f}^2}{n_{_i}^2 - n_{_f}^2}$$

Le lunghezze d'onda della radiazione visibile sono

$$380\,nm < \lambda_{vis} < 750\,nm$$

$n_i \rightarrow n_f$	λ	
$4 \rightarrow 1$	$97,2\,nm$	UV
$4 \rightarrow 2$	$486,0\,nm$	Vis
$2 \rightarrow 1$	$129,6\,nm$	UV
$4 \rightarrow 3$	$1874,6\,nm$	IR
$3 \rightarrow 1$	$102,5\,nm$	UV
$4 \rightarrow 3$	$1874,6\,nm$	IR
$3 \rightarrow 2$	$656,1\,nm$	Vis
$2 \rightarrow 1$	$129,6\,nm$	UV

Ci sono quindi cinque transizioni distinte. solo due delle quali emettono un fotone nel campo della luce visibile.

Domande di teoria sulla fisica moderna - $H0007$

Testo *[H0007]* [3 ⭐ 20 ⏳ 5a 📖]
Rispondi in modo conciso ma esauriente alle seguenti richieste.

1. Cosa si intende per "dualismo onda-corpuscolo"? Illustra i fenomeni fisici che mostrano tale concetto
2. Descrivi nel dettaglio le problematiche del modello atomico di Rutherford e come sono state superate dal modello atomico di Bohr.
3. Dopo aver spiegato cosa siano gli spettri di emissione ed assorbimento degli atomi, illustra il motivo per cui sono spettri a righe.
4. Spiega con quale meccanismo gli atomi assorbono ed emettono energia, dando quindi giustificazione agli spettri di emissione e assorbimento misurati in laboratorio.
5. In che modo l'analisi spettrale della luce delle stelle permette di determinarne la loro velocità di allontanamento dalla Terra?
6. Descrivi nel dettaglio cosa si intende per "catastrofe ultravioletta" e come tale problematica è stata superata.
7. Descrivi nel dettaglio cosa sia l'effetto fotoelettrico e perché l'esperimento contraddice la descrizione classica delle onde elettromagnetiche.
8. Descrivi nel dettaglio cosa sia la radiazione di corpo nero e perché l'esperimento contraddice la descrizione classica delle onde elettromagnetiche.
9. Descrivi il motivo per cui l'effetto Compton non è descrivibile nei termini della fisica classica e come tale problema è stato superato
10. La nascita della meccanica quantistica rivoluzione il modo stesso di descrivere la natura: descrivi cosa si intende per *funzione d'onda*, *sovrapposizione di stati*, *grandezze fisiche come operatori*, *principio di indeterminazione*
11. La storiella del gatto di Schrodinger vuole illustrare un particolare aspetto della meccanica quantistica, quale?

*

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Domande di teoria sulla fisica moderna - $H0008$

Testo *[H0008]* [3 4 5a]
Spiega con quale meccanismo gli atomi assorbono ed emettono energia, dando quindi giustificazione agli spettri di emissione e assorbimento misurati in laboratorio.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale.

Svolgimento Gli atomi emettono ed assorbono energia tramite l'emissione o l'assorbimento, da parte di un elettrone, di un fotone di energia $E = h\nu$ dipendente dalla frequenza. Nel modello atomico di Bohr, le energie delle orbite degli elettroni sono quantizzate e dipendono dall'inverso del quadrato di un numero intero

$$E \propto \frac{1}{n^2}$$

L'elettrone assorbe o cede energia a seguito di un salto tra un livello energetico ed uno differente; l'energia del fotone emesso è pari alla differenza di energia tra i livelli energetici di partenza ed arrivo dell'elettrone. Quindi l'equazione che lega la lunghezza d'onda del fotone emesso/assorbito con i numeri interi che identificano i livelli energetici sarà

$$\frac{1}{\lambda} = R_{_H} \left(\frac{1}{n_{_1}^2} - \frac{1}{n_{_2}^2} \right)$$

Tale equazione descrive in modo corretto gli spettri di emissione e assorbimento a righe degli atomi.

Concetti da sviluppare

- L'interazione avviene tramite scambio di un fotone da parte di un elettrone che compie quindi un salto energetico. Le energie del fotone e del salto energetico sono uguali.
- L'energia delle orbite degli elettroni è quantizzata ed identificata dall'inverso del quadrato di un numero intero.
- Il modello atomico di Bohr, introducendo la quantizzazione dei livelli energetici, spiega gli spettri atomici di emissione ed assorbimento misurati sperimentalmente.

Domande di teoria sulla fisica moderna - $H0009$

Testo *[H0009]* [3 4 5a]

Il modello atomico di Rutherford entra in crisi e viene sostituito dal modello atomico di Bohr. Descrivi i due modelli, illustrando cosa non funzionava nel primo modello e come il problema sia stato superato. Descrivi poi quale evidenza sperimentale da credito al modello di Bohr.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale.

Concetti da sviluppare

- L'elettrone dovrebbe collassare per radiazione di sincrotrone; inoltre gli elettroni sono liberi di assorbire ed emettere radiazione di ogni energia in contrasto con gli spettri di emissione e assorbimento a righe.
- La quantizzazione del momento angolare e/o l'elettrone come onda che forma un'onda stazionarie su di un anello, ha come conseguenza la corretta interpretazione delle serie spettrali e delle serie di righe misurate in laboratorio.

Svolgimento Il modello atomico di Rutherford prevede un nucleo carico positivamente nel quale è contenuta quasi tutta la massa dell'atomo, ed un certo numero di elettroni che ruotano intorno a tale nucleo grazie alla forza elettrostatica. L'energia dell'elettrone in orbita dipende dal raggio dell'orbita, e gli elettroni sono liberi di ruotare ad ogni distanza del nucleo. Questo significa che tali elettroni sono in grado di emettere ed assorbire ogni energia. Questo contrasta con l'evidenza sperimentale che vede gli spettri di emissione ed assorbimento fatti a righe secondo un'equazione caratterizzata dalla presenza di due numeri interi

$$\frac{1}{\lambda} = R_{H} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Inoltre, sapendo che cariche elettriche accelerate devono emettere radiazione (detta luce di sincrotrone), gli elettroni dovrebbero regolarmente perdere energia e gradualmente collassare sul nucleo, impedendo alla materia di esistere.

Il problema viene risolto da Bohr, il quale nel suo modello introduce la quantizzazione del momento angolare dell'elettrone.

$$L = n\frac{h}{2\pi}$$

Questo equivale ad affermare che l'elettrone, nella sua orbita, si comporta come un'onda di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{m\mathcal{V}}$$

e forma onde stazionarie tali per cui

$$n\lambda = 2\pi r$$

Si apre così in modo definitivo il concetto di dualismo onda-corpuscolo valido sia per la radiazione che per le particelle.

La conseguenza di tale quantizzazione è vincolare le orbite degli elettroni a distanze dal nucleo determinate ed a determinate energie (risolvendo il problema del collasso dell'elettrone) e dare spiegazione teorica delle righe degli spettri di emissione/assorbimento dovute al fatto che gli elettroni non possono assorbire quantitativi arbitrari di energia ma solo energie pari alla differenza di energia tra diversi livelli energetici.

Domande di teoria sulla fisica moderna - $H0010$

Testo *[H0010]* [3 4 5a]
Cosa si intende per "dualismo onda-corpuscolo"? Illustra i fenomeni fisici che mostrano tale concetto e le due formule che portano poi alla corretta interpretazione dei fenomeni.

Spiegazione Una domanda di teoria. Sii conciso, scrivi l'essenziale. Il livello di approfondimento richiesto è legato a quanto tempo avete a disposizione per rispondere.

Concetti da sviluppare

- Definizione del concetto e scrittura delle due formule che descrivono tale dualismo.
- Descrizione dei fenomeni concentrata sui concetti essenziali a giustificazione del dualismo, piuttosto che sull'apparato sperimentale. Almeno uno per ognuno dei due aspetti del dualismo

Svolgimento Per dualismo *onda-corpuscolo* si intende che sia la radiazione elettromagnetica che le particelle, a seconda dei casi, si comportano come onde o come particelle.

L'interpretazione teorica della radiazione di corpo nero, l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton sono tutti spiegati introducendo la particella di luce (il fotone) di energia

$$E = h\nu$$

dove ν è la frequenza della radiazione. In tutti e tre questi esperimenti la radiazione elettromagnetica interagisce con la materia, ma la spiegazione classica non descrive i risultati sperimentali. Affermando l'esistenza di un *fotone* si afferma che tale radiazione deve scambiare energia per pacchetti discreti invece che per quantità arbitrarie e questo porta alla corretta interpretazione dei fenomeni.

Il modello atomico di Bohr invece permette di introdurre la quantizzazione dei livelli energetici degli elettroni assumendo che essi si comportino come un'onda e formino un'onda stazionaria lungo il percorso circolare dell'orbita. Per poterlo fare è però necessario associare all'elettrone una lunghezza d'onda. Essa è la lunghezza d'onda di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mU}$$

dove m è la massa dell'elettrone.

Un altro esperimento che mostra la natura ondulatoria delle particelle è la versione dell'esperimento di Young effettuata con gli elettroni. Gli elettroni che attraversavano due fenditure mostravano sullo schermo successivo le figure di interferenza tipiche delle onde, quindi gli elettroni mostrano proprietà ondulatorie nuovamente spiegabili con l'introduzione della lunghezza d'onda di De Broglie.

Problema di: Effetto fotoelettrico - $H0022$

Testo *[H0022]* [2 4 5a]
Da una lastra di zinco irradiata con luce ultravioletta, vengono estratti degli elettroni. Il lavoro di estrazione degli elettroni dallo zinco è $L = 6,84 \cdot 10^{-19}\,J$. Calcolare il valore della frequenza di soglia della radiazione incidente sullo zinco. Calcolare inoltre la velocità degli elettroni estratti da una radiazione incidente di lunghezza d'onda $\lambda = 271\,nm$

Spiegazione Un elettrone all'interno di un metallo riceve energia da un quanto di radiazione elettromagnetica. Uscito dal metallo, l'elettrone avrà un'energia cinetica pari all'energia ricevuta meno l'energia utilizzata nel processo di estrazione.

Svolgimento L'energia minima del fotone che è in grado di estrarre un elettrone è esprimibile con la formula

$$h\nu_{min} = L$$

e quindi

$$\nu_{min} = \frac{L}{h} = \frac{6,84 \cdot 10^{-19}\,J}{6,626 \cdot 10^{-34}\,Js} = 1,03 \cdot 10^{15}\,Hz$$

L'energia dell'elettrone estratto da una radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 271\,nm$ sarà

$$E_c = \frac{h\,c}{\lambda} - L = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 299792458\,\frac{m}{s}}{271 \cdot 10^{-9}\,m} - 6,84 \cdot 10^{-19}\,J = 0,49 \cdot 10^{-19}\,J$$

Utilizzando per l'energia cinetica la formula $E = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2$, la sua velocità sarà quindi

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,49 \cdot 10^{-19}\,J}{9,1 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 328159\,\frac{m}{s}$$

E' bene verificare che l'utilizzo della formula classica per l'energia cinetica sia corretto. Nel caso di velocità troppo elevate potrebbe essere infatti necessario utilizzare le equazioni della relatività ristretta.

Il fattore γ relativistico corrispondente a questa velocità risulta essere

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}}} = 1,0000006$$

che possiamo sicuramente approssimare ad 1 senza compiere un errore rilevante.

Problema di: Atomo di Bohr - $H0023$

Testo *[H0023]* [2 ★ 4 ⌛ 5a 📖]
Dopo aver brevemente illustrato le caratteristiche del modello atomico di Bohr, calcolare la frequenza della radiazione emessa da un atomo di idrogeno corrispondente alla terza riga della serie di Balmer ($n_f = 2$). Qual'è la massima frequenza associabile a questa serie? *[La costante di Rydberg vale* $R_H = 1.0974 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$*]*

Spiegazione In questo problema si chiede di descrivere brevemente il modello atomico di Bohr in modo da giustificare la struttura della formula utilizzata per risolvere l'esercizio.

Svolgimento Il modello atomico di Bohr prevede l'esistenza di orbite circolari quantizzate per gli elettroni intorno al nucleo. Le variazioni di energia degli elettroni all'interno del nucleo corrispondono a salti degli elettroni da un'orbita all'altra. Di qui si giustifica sia la stabilità degli atomi, sia gli spettri a righe dei vari elementi.

Utilizzando la costante di Rydberg il problema si svolge nel seguente modo.+

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right)$$

$$\lambda = 434\, nm$$

La frequenza è data da

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 691\, THz$$

La massima frequenza associata a questa serie è ottenibile impostando $n_i = \infty$, corrispondente ad un elettrone slegato dal nucleo che da esso viene catturato, e vale

$$\nu_\infty = \frac{c}{\lambda} = cR_H \left(\frac{1}{4} \right) = 822\, THz$$

Problema di: Pressione di radiazione - $H0026$

Testo *[H0026]* [3★ 2⌛ 5a📖]
L'intensità luminosa sulla superficie terrestre è di circa $I = 1\,\frac{W}{m^2}$. Immaginando un pannello solare della superficie $S = 2\,m^2$ posto perpendicolarmente alla direzione della luce, in grado di assorbire il 100% della radiazione incidente. Quale forza esercita la luce sul pannello solare? Quanto sarebbe tale forza se invece del pannello solare la luce incidesse su di uno specchio al 100% riflettente?

Spiegazione La luce ha quantità di moto. Assorbita o riflessa abbiamo una variazione di quantità di moto nel tempo, e quindi una forza.

Svolgimento I singoli fotoni hanno energia

$$E = pc$$

$$p = \frac{E}{c}$$

Consideriamo il caso in cui la luce è completamente assorbita. L'Intensità luminosa è

$$I = \frac{\Delta E}{S\Delta t} = \frac{\Delta P \cdot c}{S\Delta t}$$
$$\frac{I \cdot S}{c} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = F$$

Nel caso di completa riflessione, nell'ipotesi che lo specchio possa rimanere fermo, la variazione di quantità di moto è doppia rispetto al caso precedente, quindi

$$F = \frac{2\Delta P}{\Delta t} = 2\frac{I \cdot S}{c}$$

In realtà lo specchio, a causa della riflessione, acquista una piccola quantità di energia cinetica; il fotone riflesso ha quindi meno energia di quello incidente e meno quantità di moto. Questo fenomeno è l'effetto doppler relativistico.

Problema di: Pressione di radiazione - $H0027$

Testo *[H0027]* [2★ 2⌛ 5a📖]
Utilizzando una radiazione luminosa di frequenza $\nu = 7,8 \cdot 10^{14}\,Hz$ incide su tre differenti piastre metalliche rispettivamente di argento, cesio e platino. Il lavoro di estrazione per tali metalli è $L_{_{Ag}} = 4,8\,eV$, $L_{_{Cs}} = 1,8\,eV$, $L_{_{Pt}} = 5,3\,eV$. Quali metalli emetteranno elettroni? Quale energia avranno gli elettroni emessi?

Spiegazione Questo è un esercizio è sull'effetto fotoelettrico.

Svolgimento Per prima cosa calcoliamo l'energia dei singoli fotoni

$$E = h\nu = 6,626 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 7,8 \cdot 10^{14}\,Hz = 51,68 \cdot 10^{-20}\,J = 3,2\,eV$$

Sarà quindi possibile estrarre elettroni soltanto dal Cesio, e tali elettroni avranno energia cinetica pari a

$$E_c = 1,4\,eV$$

Problema di: Fisica Moderna - $H0031$

Testo *[H0031]* [2 2 5a]
Data la formula che descrive lo spettro di emissione/assorbimento dell'atomo di idrogeno,

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

con $\left(R = 1,0972 \times 10^7\,\frac{1}{m}\right)$, quanto vale la minima frequenza della luce che un atomo di idrogeno nello stato fondamentale può assorbire? Rappresenta con un disegno od uno schema i possibili salti energetici dell'elettrone dallo stato fondamentale evidenziando quello richiesto dal problema.

Spiegazione In questo problema sull'emissione/assorbimento di un fotone da parte di un atomo è sufficiente avere ben chiaro il significato dei termini nella formula indicata, ed il fenomeno fisico in questione.

Svolgimento Cominciamo con il considerare che l'atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale, per cui

$$n_i = 1$$

La frequenza della luce emessa è direttamente proporzionale all'energia del fotone emesso, quindi chiedere la minima frequenza equivale a chiedere la minima energia, e quindi il minimo salto energetico. Quindi

$$n_f = n_i + 1 = 2$$

La frequenza richiesta è quindi

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 1,0972 \cdot 10^7\,\frac{1}{m} \cdot 299792458\,\frac{m}{s} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\nu = 2,4 \cdot 10^{15}\,Hz$$

Problema di: Fisica Moderna - $H0031a$

Testo *[H0031a]* [2 2 5a]
Disegna un atomo di idrogeno, i suoi primi quattro livelli energetici e tutte le possibili transizioni di un elettrone tra i livelli energetici disegnati. Data la formula che descrive lo spettro di emissione/assorbimento dell'atomo di idrogeno,

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

con $\left(R = 1,0972 \times 10^7\,\frac{1}{m}\right)$, determina quanto vale la minima frequenza della luce emessa da un atomo di idrogeno il cui elettrone si trova nella terza orbita.

Spiegazione La minima frequenza di emissione corrisponde al salto energetico di minore energia.

Svolgimento Dal testo dell'esercizio il livello di partenza da considerare è identificato da $n_i = 3$ e di conseguenza il livello di energia minore più vicino è identificato da $n_f = 2$

Quindi La minima frequenza risulta

$$\nu_{min} = R_H c\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$

Indice